Math. R. 240 no Redtenbacher

<36636566300015

<36636566300015

Bayer. Staatsbibliothek



DIE GESETZE

DES

LOKOMOTIV-BAUES

von

F. Redtenbacher,

Grossherzoglich Badischer Hofrath und Professor an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

Mit 18 lithographirten Figurentafeln.

Mannheim.

Verlag von Friedrich Bassermann.

1855.

49. D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Druck von Malsch und Vogel in Carlsruhe.

Vorrede.

Die Praxis des Lokomotivbaues hat nicht nur in England und Frankreich, sondern sie hat auch in Deutschland eine Stufe erreicht, die der Vollendung nahe kommt. Die Fertigkeit, die Theile einer Lokomotive in einer oder in anderer Weise zu disponiren, und in einen geordneten Zusammenhang zu bringen, ist vorhanden, Missverhältnisse in den Abmessungen der einzelnen Theile, oder unpassende, wie unschöne Formen derselben kommen nicht mehr vor, und in der Durchführung aller Arbeitsprozesse der Ausführung hat man es zu einer wahren Virtuosität gebracht.

Allein, wenn man nach den Grundsätzen forscht, nach welchen die Lokomotiven angeordnet werden, so begegnet man den verschiedensten, oftmals sich ganz widersprechenden Ansichten und Meinungen. In der Regel denkt man gar nicht an allgemeine Grundsätze, oder hält es geradezu für unmöglich, dass man allgemeine Grundsätze aufstellen könne, die unter allen Umständen die richtige Bauart einer für spezielle Zwecke bestimmten Lokomotive festzustellen im Stande wären. Entweder copiren die Construkteurs bereits bestehende Anordnungen, wobei sie gewöhnlich annehmen, dass das Neueste auch das Bessere sei, oder sie überlassen sich ihrem Gefühle und folgen ihren eigenen Anschauungen und Erfahrungen. Auf diese Weise sind die vielen theils guten, theils fehlerhaften Construktionen entstanden, welche nun auf allen Bahnen umherlaufen. Fast auf jeder Eisenbahn findet man Lokomotive von anderer Bauart; ja es gibt Eisenbahnen, die mit einer wahren Modellkammer von allen bereits erfundenen Lokomotiv-Construktionen versehen sind.

Mit diesen Aeusserungen will ich keinen Tadel, sondern nur eine geschichtliche Thatsache aussprechen. In der Geschichte der Entstehung und Entwicklung jeder bedeutendern Erfindung wiederholen sich ähnliche Erscheinungen. Zuerst geht immer die Praxis mit ihrem gesunden Triebe und Gefühle voran, und bringt eine Menge Dinge hervor, über deren Beschaffenheit sie sich selbst nicht ganz Rechenschaft zu geben weiss; dann tritt das Bedürfniss ein, sich in der vorhandenen Mannigfaltigkeit zurecht zu finden; dies gelingt ihr aber in der Regel nicht, weil es gar nicht die Aufgabe der Praxis, sondern vielmehr die Aufgabe der Wissenschaft ist, aus einer Mannigfaltigkeit von Vorhandenem die Regeln und das Gesetz ausfindig zu machen.

Dieses Stadium hat nach meiner Ansicht der Lokomotivbau jetzt erreicht.

Es handelt sich jetzt nicht so sehr um neue Erfindungen, als vielmehr um ein richtiges Verständniss der bereits erfundenen Anordungen. Des Guten und Rechten gibt es bereits sehr viel, man muss es nur aus der Masse des Vorhandenen herauszufinden, und in einen gehörigen Zusammenhang zu bringen wissen.

Erst dann, wenn man zu einer vollständigen Einsicht und Würdigung des bereits Geschaffenen gelangt sein wird, darf man ein weiteres und geregelteres Fortschreiten erwarten. Ich habe jedoch nichts dagegen einzuwenden, wenn uns ein Erfindungstalent, bevor noch die Kritik ihre Aufgabe gelöst haben wird, mit einer ganz neuen Erfindung erfreut, die alle bisherigen an Zweckmässigkeit und Leistungsfähigkeit übertrifft.

Allein die allgemeinen Gesetze des Lokomotivbaues sind nicht nur von der Praxis, sie sind auch von der Wissenschaft bis jetzt noch nicht ausfindig gemacht worden.

Es gibt zwar manche sehr schätzbare Werke, die von den Lokomotiven im Allgemeinen handeln, oder die Lokomotiven von einem gewissen Gesichtspunkt aus betrachten; auch fehlt es nicht an trefflichen einzelnen Abhandlungen über spezielle Theile der Lokomotive, allein die Grundbedingungen, welchen jede Lokomotive genügen muss, wenn sie ihrem Zwecke entsprechen soll, sind, meines Wissens, in keinem dieser Werke festgestellt worden, daher kommt es auch theilweise, dass die bisherigen wissenschaftlichen Leistungen von der Praxis grösstentheils nicht beachtet wurden.

Es ist nicht meine Absicht, die bis jetzt erschienenen, die Lokomotiven betreffenden, wissenschaftlichen Werke und Abhandlungen einer Kritik zu unterwerfen, aber ich muss doch, um meine Behauptung über die bisherigen Leistungen der Wissenschaft zu rechtfertigen, einige der vorzüglicheren dieser Werke, wenigstens nach ihrem Inhalt, berühren.

Obenan steht das bekannte Werk von *Pambour:* Traité des Machines Locomotive. *Pambour* hat das grosse Verdienst, zuerst die Grundgedanken mit Bewusstsein ausgesprochen und analytisch durchgeführt zu haben, auf welchen der Beharrungszustand der Bewegung einer Lokomotive beruht. Diese Grundgedanken sind, streng genommen, keine neuen Erfindungen oder Entdeckungen, sie sind weiter nichts, als die schon längst bekannten Gesetze der Mechanik, dass im Beharrungszustand einer jeden Maschine die Kräfte und Widerstände sich, im Mittel genommen, das Gleichgewicht halten, und dass die Quantität der disponibeln motorischen Substanz eben so gross ist, als diejenige Quantität, welche die Maschine verlässt, nachdem sie in derselben ihre Wirkung hervorgebracht hat. Diese Grundsätze geben die wesentlichsten Aufschlüsse über Alles, was den mittleren Fortlauf einer Lokomotive betrifft; allein für den Bau einer Lokomotive leisten diese Grundsätze nicht das Geringste, und können es auch nicht, weil dieser Bau nicht von den Gesetzen des mittleren Fortlaufes, sondern wie wir sehen werden, von der Kenntniss der Gesetze der störenden Bewegungen abhängt.

Diese von *Pambour* zuerst aufgestellten Grundgedanken über die Bewegung einer Lokomotive im Beharrungszustand werden unbegreiflicher Weise von *Morin*, *Lechatelier* und von andern, um die technischen Wissenschaften verdienten Männern, nicht anerkannt. *Morin* hat sogar durch Versuche nachweisen wollen, dass diese Grundsätze unrichtig seien und *Lechatelier* sagt in seinem Werke: Recherches Expérimentales sur les maschines locomotives Pag. 13:

„Ce n'est pas la pression de la vapeur qui se règle sur la résistance du train; ce sont, au contraire, les résistances de toute sorte qui croissent par suite de l'accélération de vitesse, jusqu'à ce qu'elles fassent équilibre à la pression de la vapeur."

Es gereicht diesen Herren nicht zur Ehre, dass sie die Grundsätze verläugnen, welche vorzugsweise die französische Schule aus dem Gebiete der Wissenschaft in das Gebiet der Praxis eingeführt hat.

Ein zweites Werk, welches ich berühren will, ist das von *Lechatelier, Flachat, Petiet* et *Polonceau,* Guide du mecanicien, Constructeur et Conducteur de Machines Locomotives. In diesem schätzbaren Werk werden wohl alle den Lokomotivbau betreffenden Einzelheiten mit Sachkenntniss besprochen, aber feste, allgemein gültige Regeln werden nicht aufgestellt. Die Verfasser sagen selbst, Pag. 367, dass sie, statt allgemeiner Regeln, eine tabellarische Zusammenstellung der wesentlichsten Abmessungen einer grösseren Anzahl von Lokomotiven geben wollen, weil sie die Aufstellung allgemeiner Regeln nicht für möglich halten, dann heist es: En effet chaque ingénieur, chaque constructeur s'est posé des règles, s'est fait un système pour son propre usage, sans qu'une discussion générale soit venue jusqu'ici poser une ou plusieurs formules pratiques appropriées aux différents cas que l'on peut rencontrer; nous n'élevons donc pas la prétention d'avoir résolu la question

In andern Werken und namentlich in dem früher angegebenen von *Lechatelier* werden Versuchs-Resultate über den Widerstand der Bahnwägen und Lokomotive, über die Verdampfungsfähigkeit der Lokomotivkessel, über die Spannungen des Dampfes in den verschiedenen Gefässen und Röhren, welche der Dampf durchströmt, mitgetheilt. Dadurch ist Manches aufgehellt worden, allein bleibende Gesetze hat man auch auf diesem Wege nicht gefunden, und wird sie auch auf diesem Wege nicht finden, denn die Lokomotive ist ein viel zu komplizirter Versuchsapparat, in welchem gleichzeitig so mannigfaltige Erscheinungen und Wirkungen, die sich wechselseitig modifiziren, vorkommen. Dazu kommt noch, dass man nicht wissen will, was in einer Lokomotive vorgeht, wenn sie ganz gemächlich über die Bahn hinrollt, sondern dass für die praktischen Zwecke nur allein die Kenntniss derjenigen Erscheinungen und Wirkungen, die im hastigen Laufe der Lokomotive vorkommen, einen reelen Werth haben kann. Unter solchen Umständen gibt jedes Dynamometer und gibt überhaupt jedes Messinstrument fehlerhafte Resultate; denn jedes Instrument, das die Intensitäten von Zuständen messen soll, muss mit einem beweg-

lichen Theil versehen sein, dessen Bewegungen ganz prompt den Aenderungen der Zustände folgen sollte. Diess wird aber nie der Fall sein, wenn sich die Zustände plötzlich und hastig ändern. Noch andere Werke geben Beschreibungen und Abbildungen von den vielen bereits bestehenden Lokomotiven. Es ist recht gut, dass man solche Sammelwerke hat, aber Gesetze kann man von derartigen Werken nicht erwarten.

Ich habe schon seit Jahren über die Lokomotive theoretische Studien gemacht, die zunächst blos zu meiner eigenen Belehrung dienen sollten. Die Sache wurde aber allmälig ernstlich; ich kam zu entscheidenden Resultaten, und diess veranlasste mich, den Gegenstand im Zusammenhang und in allen wesentlichsten Punkten vollständig zu behandeln. Auf diese Weise ist das vorliegende Werk entstanden. Ich habe mich dabei grösstentheils so benommen, wie wenn praktische Erfahrungen über den Lokomotivbau gar noch nicht gemacht worden wären, habe mich ganz und gar den Grundsätzen der Mechanik überlassen, und wollte einmal sehen, was dabei herauskommen werde. Man wird es daher an diesem Werke direkt nicht merken, ob mir die Erfahrungen bekannt sind oder nicht.

Ich bereue es nicht, diesen Weg eingeschlagen zu haben. Aus den Formeln, zu welchen ich gekommen bin, haben sich die Grundbedingungen, denen jeder Lokomotivbau entsprechen soll, mit vollkommener Klarheit herausgestellt; auch bin ich zu gewissen Resultaten gekommen, die mich selbst zunächst sehr überrascht haben, und an welche bis jetzt noch Niemand gedacht hat. Kurz ich bin so weit gekommen, dass ich mich für berechtiget hielt, dem Buch den Titel: „Die Gesetze des Lokomotivbaues“ zu geben, womit ich sagen will, dass alle wesentlichen Grundbedingungen, worauf es beim Lokomotivbau ankommt, ausfindig gemacht und für alle Zeiten festgestellt sind.

Die Hauptergebnisse meiner Untersuchungen sind mit dem Entwicklungsgang des Lokomotivbaues in keinem Widerspruch, sondern es wird nur alles erklärt, und es zeigt sich, dass man allmälig auf den rechten Weg gekommen ist. Der eigentliche Schlüssel zur Entwirrung der Sache hat sich rein aus den Endresultaten analytischer Rechnungen ergeben, welche zu dem Zwecke unternommen wurden, mit Hülfe der allgemeinen Grundsätze der Mechanik alle Bewegungen, die in einer Lokomotive vorkommen und insbesondere die mannigfaltigen störenden Bewegungen zu untersuchen, um auf diese Weise wo möglich die Bedingungen kennen zu lernen, die erfüllt werden müssen, damit diese störenden Bewegungen entweder gar nicht, oder nur in einem sehr schwachen Maasse eintreten. Da zeigte es sich denn, was mich selbst anfangs überraschte, und mir längere Zeit naturwidrig zu sein schien, später aber ganz evident wurde, dass es im Allgemeinen für jede Lokomotive sechs Fahrgeschwindigkeiten gibt, bei welchen die störenden Bewegungen sehr heftig werden, ja sogar jedes beliebige Maass überschreiten können, dass man aber durch gewisse Dispositionen und Construktionsverhältnisse bewirken kann, dass diese gefährlichen Geschwindigkeiten alle grösser ausfallen, als die grösste Geschwindigkeit ist

mit der man eine Lokomotive laufen lassen will. Dadurch haben sich die wichtigsten und interessantesten Gesetze des Lokomotivbaues ergeben, nach denen man die bestehenden Construktionen richtig beurtheilen und neu zu erbauende Lokomotive zweckmässig anordnen kann.

Diese Untersuchung hat auch gezeigt, welche Bedingungen erfüllt werden müssten, um eine hinsichtlich der störenden Bewegungen absolut fehlerfreie Construktion zu erhalten. Diese Bedingungen sind so einfach, dass sie sich leicht mit Worten ausdrücken lassen; der praktischen Verwirklichung derselben stehen aber Hindernisse im Wege, die ich bis jetzt noch nicht zu beseitigen im Stande war. Jedenfalls wird man zugeben, dass man um einen guten Schritt vorwärts gekommen ist, wenn man einmal mit Sicherheit und mit voller Bestimmtheit sagen kann, was eigentlich zu thun wäre, um das absolut Beste zu erzielen.

Die Rechnungen, durch welche die Resultate gewonnen wurden, sind allerdings nicht für Jedermann zugänglich, denn in der Störungstheorie handelt es sich um die Integration dreier gleichzeitig bestehenden Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung, allein die Rechnungsresultate sind zuletzt alle so einfach, dass sie sich mit Worten, die für Jedermann verständlich sind, interpretiren lassen.

Nach diesen allgemeinen Andeutungen über die Tendenz dieses Buches lasse ich noch einige Erläuterungen über den Inhalt der einzelnen Abschnitte folgen.

Im ersten kurzen Abschnitt werden die gebräuchlichsten Lokomotive hinsichtlich ihrer Bauart beschrieben. Das Detail wird nicht berührt, denn es ist ja Jedermann, der diess Buch zur Hand nimmt, hinlänglich bekannt.

Der zweite Abschnitt handelt von der Bahn, von den Wägen und ihren Bewegungen in geraden und gekrümmten Strecken. Es sind mehr nur Fragmente und nicht ein organisches Ganzes. Ich wollte ein solches zu Stande bringen, stiess aber auf Schwierigkeiten, die ich nicht zu bewältigen vermochte, und begnügte mich zuletzt mit Stückwerk.

Der dritte Abschnitt behandelt alles Wesentliche, was die Bildung des Wasserdampfes betrifft. Namentlich den Durchgang der Wärme durch ebene, cylindrische und sphärische Gefässwände, die Bestimmung der Wärmemenge, die in den Lokomotivkessel eindringt; ferner auch die Kesselfeuerung. Um die Wärmemenge zu bestimmen, die durch die Gefässwände geht, bin ich von dem Grundgedanken ausgegangen, auf welchen *Tourier* und *Poisson* ihre Wärmetheorien auferbaut haben, und bin zu dem Ergebniss gekommen, dass dieser Wärmedurchgang genau nach dem Gesetz geschieht, welches *Ohm* für den elektrischen Strom gefunden hat. Dieses Ergebniss hat mich zwar im ersten Augenblick, später aber nicht mehr überrascht, denn *Ohm* ist ja auch von dem Grundgedanken *Tourier's* ausgegangen. Das Güteverhältniss eines Kessels, d. h. das Verhältniss zwischen der Wärmemenge, die in einer Zeiteinheit in einen Kessel eindringt, und der Wärmemenge des Brennstoffs, der in einer Sekunde verbrannt wird, habe ich bereits, jedoch ohne Herleitung der Formel in der

ersten Auflage der Resultate für den Maschinenbau, mitgetheilt. Es hat sich bis jetzt kein Mensch darum bekümmert, und kann doch alles Wesentliche so leicht und klar herausgelesen werden.

Der vierte Abschnitt behandelt den mittleren Fortlauf der Lokomotive und Wagen. Diese Untersuchungen beruhen im Wetentlichen auf den von *Pambour* zuerst ausgesprochenen einfachen Grundgedanken, dass im Beharrungszustand der Bewegung die Kräfte und Widerstände, im Mittel genommen, im Gleichgewicht sind, und dass die consumirte Dampfmenge der produzirten gleich ist. Besonderes Neues werden in diesem Abschnitt Diejenigen nicht finden, welche mit den Arbeiten von *Pambour* vertraut sind.

Im folgenden kurzen Abschnitt wird die Taschensteuerung untersucht. Ich habe die verschiedenen Steuerungsapparate, und insbesondere die expandirenden, schon vor Jahren zu meiner eigenen Belehrung untersucht. Die weitläufigen in diesen Untersuchungen vorkommenden Rechnungen einerseits, und der für Lokomotive geringe praktische Werth der Expansionssteuerungen anderseits, haben mich veranlasst, diese Arbeiten in dieses Werk nicht aufzunehmen; nur die für Lokomotive so nützliche Taschensteuerung wollte ich nicht unberücksichtigtiget lassen. Da jedoch dieser Gegenstand bereits von *Phillipps* (Théorie de la Coulisse etc. Annales des mines, Tome III) behandelt wurde, und zwar in einer Weise, welcher von Seite der Pariser Akademie eine sehr ehrende Anerkennung zu Theil wurde, so schien es mir am angemessensten zu sein, von dieser Abhandlung eine Uebersetzung im Auszug aufzunehmen. Allein als ich an die Arbeit ging, machte ich die Entdeckung, dass *Phillipps* auf einem ganz entsetzlichen Umweg zu einem schliesslich ganz einfachen Resultat gelangt, das man unmittelbar aus der den Apparat darstellenden Figur herauslesen kann; ich zog es daher vor, die Arbeit von *Phillipps* auf sich beruhen zu lassen und einen gerade zum Ziel führenden Weg einzuschlagen.

Der fünfte Abschnitt handelt von denjenigen störenden Bewegungen, die durch das Spiel der hin- und hergehenden Massen hervorgerufen werden, und von der Aufhebung dieser Störungen durch balanzirende Massen. Bekanntlich hat zuerst *Lechatelier* diesen Gegenstand in Anregung gebracht. In der zweiten Auflage der Resultate habe ich für spezielle Fälle die richtige Position und Grösse der Balanzirungsmassen bestimmt, ohne jedoch die Herleitung der Formeln mitzutheilen. In diesem Abschnitt findet man diesen Gegenstand allgemein und erschöpfend behandelt. Der praktische Werth einer richtigen Balanzirung der Massen ist bis jetzt meistens entweder zu hoch oder zu niedrig angeschlagen worden. In England hat man sich um diese Sache wenig bekümmert, in Frankreich hat man gemeint, dass mit einer richtigen Balanzirung alle störenden Bewegungen beseitiget werden könnten. So ist es nun allerdings nicht. Eine richtige Balanzirung der Massen ist in vielen Fällen eine gute Sache, allein die störenden Bewegungen entstehen nicht bloss durch die hin- und hergehenden Massen, sondern auch noch durch andere Wirkungen, sie können also durch Balanzirungsmassen nur theilweise aufgehoben werden.

Nun folgt der interessanteste und wichtigste Abschnitt, welcher die eigentlichen Gesetze des Lokomotivbaues geliefert hat. Dieser handelt von den verschiedenen störenden Bewegungen, welche theils durch den Linealdruck, d. h. durch den Druck der Gleitstücke gegen die Führungslineale, theils durch den veränderlichen Druck der Axen gegen die Axenbüchsen und Axengabeln hervorgerufen werden.

Diese störenden Bewegungen sind aus drei Arten von Schwingungen zusammengesetzt, nämlich: 1) Vertikalschwingungen des Schwerpunktes des an den Federn hängenden Baues, 2) drehende Schwingungen dieses Baues um eine durch seinen Schwerpunkt gehende Längenaxe, 3) drehende Schwingungen um eine durch den Schwerpunkt gehende Queraxe. Ich nenne sie das Wogen, das Wanken und das Nicken. Jede einzelne dieser Schwingungsarten ist aber aus mehreren Elementarschwingungen zusammengesetzt. Die Totalität sämmtlicher Elementarschwingungen lässt sich in zwei charakteristische Gruppen theilen, die ich Grundschwingungen und Kurbelschwingungen nenne, obgleich diese Benennungen nicht ganz bezeichnend sind. Die Grundschwingungen richten sich nach der Grösse und Vertheilung der Massen, und nach dem Starrheitsgrad der Federn, sind aber von der Laufgeschwindigkeit der Lokomotive unabhängig. Die Kurbelschwingungen dagegen richten sich nicht nur nach der Grösse und Vertheilung der Massen, sondern hängen auch von der Laufgeschwindigkeit der Lokomotive ab, und zwar in einer Weise, die eine merkwürdige und bedeutungsvolle genannt werden darf.

Denkt man sich, dass eine Lokomotive aus dem ruhigen Zustand allmälig in einen fort und fort rascher werdenden und zuletzt in einen ganz extravagant schnellen Bewegungszustand übergeht, so treten anfangs die störenden Bewegungen nur in einem schwachen Grade ein; sie wachsen jedoch mit der Geschwindigkeit und werden, wenn diese eine gewisse Grenze erreicht hat, maasslos. Diess geschieht aber nicht nur bei einer, sondern bei noch fünf andern, im Ganzen also bei sechs Geschwindigkeiten. Ist aber die Lokomotive glücklich über diese gefährlichen Geschwindigkeiten hinausgekommen, so wird ihr Schwingungszustand allmälig schwächer und schwächer und wird zuletzt, nachdem eine extravagante Geschwindigkeit eingetreten ist, verschwindend klein. So ist der Lauf jeder Lokomotive beschaffen. Die Erklärung dieser Erscheinung will ich hier nicht geben, sondern will nur hervorheben, dass die Kenntniss dieser Bewegungsgesetze von einer für die Praxis entscheidenden Wichtigkeit ist, denn es ist klar, dass es sich darum handeln muss, jede Lokomotive so zu bauen, dass überhaupt die störenden Bewegungen möglichst klein ausfallen, und dass die kleinste von den sechs gefährlichen Geschwindigkeiten grösser wird, als die grösste Geschwindigkeit, mit der man eine Lokomotive laufen lassen will, und wir werden sehen, dass das Eine wie das Andere die Erfüllung gewisser Bedingungen erfordert, wodurch die gegenseitige Lage und die Grösse aller wesentlichen Construktionstheile, wodurch namentlich der Rahmenbau, die Radstellung, die Position der Dampfcylinder,

das System der Federung, die Grösse der Räder, Länge der Schubstangen und Bahnschienen bestimmt wird. Diese Bedingungen sind nichts anderes, als die wesentlichsten Gesetze des Lokomotivbaues, die man ungestraft nicht übertreten darf und wodurch der ganze Lokomotivbau zu einer vollkommenen Klarheit gebracht wird.

In dem nun folgenden fünften Abschnitt werden die wesentlichsten Festigkeitsverhältnisse der Lokomotivbestandtheile und werden namentlich die Federn, Zapfen, Axen, Rahmen und Kesseltheile behandelt.

In Betreff der Theorie der Federn muss ich mich durch eine Erklärung gegen mögliche Missverständnisse schützen. Als ich an die Bearbeitung dieses Gegenstandes ging, war mir das Mémoire sur les ressorts en acier employés dans le matériel des chemins de fer par *Phillips*. Annales des mines, cinquieme Série, 2e livraison de 1852, nicht bekannt, sondern nur der Bericht, den die comptes rendus über dieses Mémoire gegeben haben. Dass ich nicht Nachahmer bin, werden Diejenigen, welche mit der Arbeit von *Phillips* vertraut sind, an zwei Dingen erkennen. Erstlich ist der Grundgedanke, von dem ich ausgehe, ein ganz anderer, als der, von dem *Phillips* ausgeht. *Phillips* untersucht den Gleichgewichtszustand eines Federwerkes, dessen Schienen ihrer ganzen Ausdehnung nach in wechselseitiger Berührung stehen; ich dagegen untersuche ein Federwerk, in welchem die Schienen in der Mitte und an den Enden etwas dicker sind, als in den übrigen Theilen. In diesem Federwerk berühren sich also die Schienen nur in der Mitte und an den Enden. Diese Verschiedenheit im Ausgangspunkt hat auch eine verschiedene Behandlungsweise des Gegenstandes zur Folge. Dann aber sind zweitens die Ergebnisse meiner Untersuchung von anderer Art, als jene, welche *Phillips* findet; zwischen beiden Resultaten besteht jedoch kein Widerspruch.

In dem folgenden sechsten Abschnitt werden alle in den vorhergehenden Abschnitten gewonnenen Ergebnisse zur Aufstellung von Regeln für alle wesentlichsten Grössenbestimmungen ausgebeutet. Den numerischen Rechnungen sind die französischen Maasse und Gewichte zu Grunde gelegt. In der Regel sind die Längen in Metern, die Flächen in Quadratmetern, die Volumen in Kubikmetern, die Gewichte und Kräfte in Kilogrammen ausgedrückt; ausnahmsweise werden kleinere Dimensionen in Centimetern und grössere Gewichte oder Kräfte in Tonnen ausgedrückt. In allen Fällen, in welchen die Maasseinheiten nicht ausdrücklich genannt sind, gilt der Meter und das Kilogramm.

Ich schliesse diese Worte mit dem Wunsche, dass diese Arbeit dazu beitragen möge, eine Uebereinstimmung in dem Bau der Lokomotiven zunächst in Deutschland in Anregung zu bringen!

Carlsruhe, den **1.** *August* **1855.**

Der Verfasser.

Inhalt.

	Seite
Vorrede	I
Literatur	XV

I. Bauart der Lokomotive.

Bauart der Lokomotive im Allgemeinen	1
Beschreibung mehrerer Personenzug-Lokomotiver	2
Beschreibung mehrerer Güterzug-Lokomotiven	3
Beschreibung der Semmering-Lokomotive	4
Zwei veränderte Constructionen und eine neue Anordnung	5

II. Bahn und Wägen.

Widerstände eines Trains	6
Bedingungen, unter welchen ein vierrädriger Wagen ohne Widerstand in einer Bahnkrümmung läuft	9
Bewegung der Bahnwägen in Krümmungen	10
Die Höherlegung der äusseren Schiene	12
Geleiserweiterung in Bahnkrümmungen	14
Kraft zur Fortbewegung eines Wagens in einer Bahnkrümmung	15
Conizität der Räder eines Wagens mit drei Axen	18
Zusammenhängung der Wägen	20
Grösster zulässiger Druck eines Triebrades gegen die Bahn	22
Stabilität der Wagenbewegung	25
Die Spurweite der Bahnen	27

III. Die Dampfbildung

Temperatur, Spannkraft und Dichte der Kesseldämpfe	29
Wärmemenge zur Erzeugung von 1 Kilogramm Dampf	31
Zusammenhang zwischen Spannkraft und Temperatur der Kesseldämpfe	32
Zusammenhang zwischen Spannkraft und Dichte der Kesseldämpfe	32
Das Verhalten des Kesseldampfes bei Volumenänderungen ohne Wärmeverlust	33
Condensation des Dampfes	33
Das Verhalten von überhitztem Dampf	34
Dampfausströmung aus einem Gefäss	34
Durchgang der Wärme durch Gefässwände	36
Wärmemenge, die durch eine ebene Gefässwand von gleicher Dicke geht	37
Wärmemenge, die durch eine Wand geht, welche aus mehreren sich berührenden Schichten von ungleichartigen Substanzen besteht	39
Wärmemenge, die in einer Zeiteinheit durch eine cylindrische Gefässwand geht	42
Wärmemenge, die durch eine kugelförmige Gefässwand geht	44
Vergleichung der Wärmemengen, die durch eine Flächeneinheit einer ebenen, einer cylindrischen und einer sphärischen Wand gehen	46
Wärmemenge, die in einer Sekunde durch die Wände einer Röhre geht, die von Wasser umgeben und von heisser Luft durchströmt wird	48
Wärmemenge, die durch die Heizfläche in den Kessel eindringt	50
Wärmemenge, die durch die einzelnen Theile des Röhrensystems gewonnen wird	55

Seite.
Temperatur der in die Rauchkammer entweichenden Gase 56
Die anfachende Wirkung des Blasrohres . 57
Die Dampfausströmmung und der mittlere Druck vor dem Kolben 59
Theoretische Bestimmung der wesentlichsten Abmessungen eines Lokomotivkessels 62
Heizung der Lokomotivkessel . 66

IV. Der mittlere Fortlauf der Lokomotive.

Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit die Triebräder im Moment der Abfahrt, so wie auch während der Fahrt nicht glitschen . 71
Der Beharrungszustand der Bewegung einer Lokomotive 74
Lokomotive mit Maschinen, die nicht expandiren 76
Geschwindigkeit, mit welcher eine Lokomotive einen Wagenzug bei einer bekannten Dampfproduktion fortzuziehen vermag . 77
Vortheilhafteste Verhältnisse hinsichtlich des Brennstoffaufwandes 79
Bestimmung der wesentlichsten Dimensionen einer zu erbauenden Lokomotive 80
Lokomotive mit expandirenden Maschinen . 81
Geschwindigkeit, mit welcher eine expandirende Lokomotive einen Train fortzieht 82
Vortheilhafteste Leistungen einer expandirenden Lokomotive 83
Bestimmung der wesentlichsten Dimensionen expandirender Maschinen für neu zu erbauende Lokomotive 84
Die Güteverhältnisse einer Lokomotive mit expandirenden und einer Lokomotive mit nicht expandirenden Maschinen . 85
Fahrt mit zwei Lokomotiven . 86
Differenz zwischen der Spannung des Dampfes in den Cylindern und der Spannung des Dampfes im Kessel 88
Wahre Bewegung des Schwerpunktes einer Lokomotive 91
Uebergang aus einem Beharrungszustand in einen andern 98

V. Die Taschensteuerung.

Krümmungshalbmesser der Tasche . 99
Gleichung der Bewegung des Schiebers . 100

VI. Die störenden Bewegungen der Lokomotive.

Einleitung . 108

Das Zucken und Schlingern.

Bewegung einer frei hängenden Lokomotive . 111
Das Zucken oder Längenschwingungen einer frei hängenden Lokomotive 112
Aufhebung der Längenschwingungen . 116
Längenschwingungen einer aufgehängten Lokomotive der allgemeinsten Art 117
Das Schlingern oder drehende Schwingungen einer frei hängenden Maschine 119
Drehende Schwingungen einer frei hängenden nicht balanzirten Maschine mit aussen liegenden Cylindern und Kupplungsstangen . 127
Gleichung der Kurve, welche der Mittelpunkt der Kurbelaxe beschreibt, wenn Längenschwingungen und drehende Schwingungen gleichzeitig stattfinden 127
Drehende Schwingungen einer aufgehängten mit Centrifugalmassen versehenen Lokomotive der allgemeinsten Art . 128
Vollständige Aufhebung des Zuckens und Schlingerns durch rotirende Balanzirungsmassen 130
Directes Verfahren zur Bestimmung der Balanzirungsmassen 132
Pressungen der Triebräder gegen die Bahn, wenn dieselbe mit rotirenden Massen versehen sind . . 134
Der praktische Werth der Massenbalanzirung . 136

Das Gaukeln, oder das Wanken, Wogen und Nicken.

Die Kräfte, welche das Gaukeln verursachen . 137
Druck der Gleitstücke gegen die Führungslineale 138
Allgemeine Gleichungen zur Bestimmung der gaukelnden Bewegung 139
Ausmittlung der Kräfte und Momente . 141
Differenzialgleichungen, welche die gaukelnden Bewegungen bestimmen 146
Integration der Differenzialgleichung, welche das Wanken bestimmt 148

Seite.
Ausnahmsfälle, in welchen die für das Wanken aufgefundenen Ausdrücke unrichtig sind 152
Bedingungen, bei deren Erfüllung die wankenden Bewegungen einer Lokomotive nur in einem schwachen Grade eintreten . 156

Das Wogen und Nicken.

Integration der Differenzialgleichungen, welche das Wogen und Nicken bestimmen 159
Interpretation der Integrale, die Gesetze des Wogens und Nickens, Schwächung und Aufhebung der Bewegung des Nickens und Wogens . 168
Beurtheilung verschiedener Lokomotive hinsichtlich der Stabilität ihres Baues 177
Die Lokomotive von *Crampton* mit Blindaxe 179
Die Lokomotive mit Schleifenbewegung . 185
Integration der Differenzialgleichungen, welche das Wogen und Nicken bestimmen, nach der Methode der Variation der Constanten . 191

VII. Festigkeitsverhältnisse.

Theorie der Federn.

Gleichgewicht eines elastischen Stabes . 201
Berechnung der Wirkungsgrösse, welche der Biegung eines Stabes entspricht 204
Wirkung, um einen im natürlichen Zustand kreisbogenförmigen Stab in einen andern kreisbogenförmigen zu versetzen . 205
Biegung eines an einem Ende eingespannten Stabes 206
Biegung eines auf zwei Stützen liegenden Stabes 207
Gleichgewichtsverhältnisse eines Federwerkes mit nicht zugespitzten Endstücken 208
Bestimmung der Constanten für neu zu construirende Federwerke 214
Construktion eines Federwerkes, dessen Schienen im belasteten Zustand übereinstimmende Krümmungen annehmen . 215
Federwerk aus Schienen von gleicher Länge und von gleicher Dicke 222
Trapez-Federn von durchaus gleicher Festigkeit 223
Druck gegen einen Axenzapfen . 226
Durchmesser der Axenzapfen . 229
Stahlzapfen . 231
Stärke der Axen der Trieb- und Laufräder 231
Festigkeit eines cylindrischen Gefässes 234
Festigkeit eines sphärischen Gefässes 240
Festigkeitsverhältnisse der Feuerbüchse 244
Gleichgewicht eines Stabes, der auf einer Reihe von Unterstützungen liegt, nach normaler Richtung gepresst und nach seiner Länge gedehnt wird 245
Gleichgewicht eines Stabes, der auf einer Reihe von Unterstüztungen liegt, nach normaler Richtung gepresst und einer Zusammendrückung ausgesetzt ist 250
Stärke der Wand- und Deckbolzen . 253
Decke der Feuerbüchse . 254
Wände des Feuerkastens . 254
Wände des Wasserkastens . 255
Stärke der Deckbarren . 256
Gleichgewicht eines krummen elastischen Stabes 258
Formänderung eines ellyptischen Kessels 264
Verbindungsstangen in einem ellyptischen Kessel 267
Verbindungsstangen in einem Blasenkessel 270
Vernietungen . 272
Festigkeit des Rahmenbaues . 274

VIII. Resultate.

Der Inhalt dieses Abschnittes . 275
Die Fahrgeschwindigkeit . 275
Gewicht eines Trains . 276
Verhältniss zwischen der Leistungsfähigkeit und dem Gewicht einer Lokomotive 277
Bestimmung des Widerstandes eines Trains und des Gewichtes der Lokomotive 277
Verhältniss zwischen dem Totalgewicht einer Lokomotive und dem Druck der Triebräder gegen die Bahn 278

Seite
Durchmesser der Triebräder 280
Anzahl der Triebräder 282
Anzahl und Grösse der Laufräder 283
Bauart der Lokomotive 283
Conizität der Räder eines vierrädrigen Wagens 285
Conizität der Räder eines Wagens mit mehr als vier Räder 286
Kolbengeschwindigkeit und Kolbenschub 288
Länge der Schubstangen 289
Spannung des Dampfes in den Cylindern 291
Querschnitt der Dampfcylinder 292
Hauptabmessungen des Kessels 293
Querschnitt des Regulators der Dampfkanäle und der Blasrohrmündung 296
Position und Belastung der Axen 296
Zusammenhängung der Wagen. 299
Federwerke 299
Trapez-Federwerke 301
Geometrisch ähnliche Trapez-Federwerke 301
Hyperbel-Federwerke 302
Aeussere Axenzapfen für Lauf- und Triebaxen 303
Kurbelzapfen von Stahl 305
Stärke der Axen 305
Balanzirungsmassen 306
Metallstärke cylindrischer Gefässe 308
Metallstärke cylindrischer Dampfkessel 308
Metallstärke kugelförmiger Gefässe 309
Metallstärke kugelförmiger Theile der Dampfkessel 309
Stärke der Wand- und Deckbolzen der Feuerbüchse 310
Wände des Feuerkastens 310
Wände des Wasserkastens 310
Verbindungen in einem ellyptischen Kessel. 311
Verbindungsstangen in einem Blasenkessel 311
Vernietungen 312
Tabelle der Abmessungen von 18 Lokomotiven aus dem Werke Guide du mécanicien constructeur et conducteur par *Lechatelier* 313
Empirische Verhältnisszahlen zur Bestimmung der Detailabmessungen der Lokomotive 324
Verbesserungen 327

Literatur.

Traité théorique et pratique des machines locomotives par Le Chev. F. M. Guyenneau de Pambour.

Guide du mécanicien, constructeur et conducteur de machines locomotives par MM. L. Lechatelier, E. Flachat, J. Petiet et C. Polonceau.

The principles and practice and explanation of the machinery of Locomotive Engine by Tredgold.

Railway Machinery. A traitice on the mechanical engineering of railways, by Daniel Kinnear Clark, Engineer.

Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens in technischer Beziehung, von Edmund Heusinger von Waldegg.

Beiträge zur Theorie der Bewegung der Räderfuhrwerke, insbesondere der Dampfwagen, von J. P. G. von Heim.

Théorie de la coulisse servant à produire la détente variable dans les machines à vapeur et particulièrement dans les machines locomotives. Par M. Phillips. Annales des mines 1853, 5me série, Tom. III.

Sur la stabilité des machines locomotives par M. Resal. Annales des mines 5m série. 1853. Tom. III.

Des Contre-Poids appliqués aux roues motrices des machines locomotives. Par Couche. Annales des mines 1853, 5me série, Tom. III.

Chemins de fer d'Angleterre eu 1851. Rapport adressé à M. le ministre des travaux publics par M. Lechatelier, ingénieur en chef des mines, Annales des mines, cinquième série, tom. I, 1re livraison de 1852.

Mémoire sur les ressorts en acier employés dans le matériel des chemins de fer, par Phillips, ingénieur des mines. Annales des mines, cinquième série, 2e livraison de 1852.

Sur l'emploi de coke dans les locomotives, et sur les expériences faites en Autriche dans le but de substituer au bois les houilles et les lignites de Bohême pour le service des chemins de fer, par M. Couche. Annales des mines, quatrième série, tom. XIX.

Literatur.

Traité théorique et pratique des machines locomotives par le Cte. F. M. Guyonneau de Pambour.

Guide du mécanicien, constructeur et conducteur de machines locomotives par MM. L. Lechatelier, E. Flachat, J. Petiet et C. Polonceau.

The principles and practice and explanation of the machinery of Locomotive Engine by Tredgold.

Railway Machinery, a treatise on the mechanical engineering of railways, by Daniel Kinnear Clark, Engineer.

Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens in technischer Beziehung, von Edmund Heusinger von Waldegg.

Beiträge zur Theorie der Bewegung der Eisenbahnwagen, insbesondere der Dampfwagen, von J. P. G. von Heim.

Théorie de la coulisse servant à produire la détente variable dans les machines à vapeur et particulièrement dans les machines locomotives. Par M. Phillips. Annales des mines 1853, 5me série, Tom. III.

Sur la stabilité des machines locomotives par M. Resal. Annales des mines 5me série, 1853. Tom. III.

Des Contre-Poids appliqués aux roues motrices des machines locomotives. Par Couche. Annales des mines 1853 5me série, Tom. III.

Chemins de fer d'Angleterre en 1851. Rapport adressé à M. le ministre des travaux publics par M. Lechatelier, ingénieur en chef des mines. Annales des mines, cinquième série, tom. I, 1re livraison de 1852.

Mémoire sur les ressorts en acier employés dans le matériel des chemins de fer, par Phillips, ingénieur des mines. Annales des mines, cinquième série, 2e livraison de 1852.

Sur l'emploi du coke dans les locomotives, et sur les expériences faites en Autriche dans le but de substituer au bois les houilles et les lignites de Bohême pour le service des chemins de fer; par M. Combes. Annales des mines, quatrième série, tom. XIX.

DIE

GESETZE DES LOKOMOTIVBAUES.

I.

Bauart der Lokomotive.

Bauart der Lokomotive im Allgemeinen.

Alle gegenwärtig im Gebrauch befindlichen Lokomotive stammen von einer von *Robert Stephenson* erfundenen Anordnung ab, stimmen daher in gewissen wesentlichen Einrichtungen überein.

Der Wagenrahmen besteht aus zwei, vier oder selbst aus sechs ziemlich hohen, aber dünnen Schienen, von denen die äusseren durch eiserne oder hölzerne Querbalken, die sogenannten Bufferbalken, verbunden sind. Die Räder sind fest mit den Axen verbunden, und diese letzteren sind entweder innerhalb oder ausserhalb der Räder mit Axenbüchsen versehen. Der Rahmenbau liegt vermittelst eines Systems von Federn auf den Axenbüchsen, und jede derselben wird durch eine von dem Rahmen ausgehende Gabel, der sogenannten Axengabel, umfasst. Bei dieser Wagenconstruction kann der Rahmenbau vermittelst des Systems der Federn innerhalb gewisser Grenzen jede beliebige Lage gegen die Axen annehmen; so wie aber der Rahmen fortgezogen wird, werden die Axen und Räder durch die Axengabeln mit fortgenommen.

Der Kessel besteht aus den vier Hauptbestandtheilen: Feuerkasten, Röhrenkessel, Rauchkammer, Kamin. Er ist mit dem Rahmenbau zu einem starren Ganzen verbunden, das vermöge der Federn auf den Axenbüchsen umhergaukeln kann.

Alle Lokomotive sind wenigstens mit zwei Dampfmaschinen versehen. Die Cylinder derselben haben stets eine genau oder nahezu horizontale Lage, und sind entweder mit dem Kessel oder mit dem Rahmenbau unveränderlich verbunden. Rahmenbau, Kessel und Cylinder bilden also ein starres Ganzes. Der Hin- und Herlauf der Kolben wird durch Vermittlung von Schubstangen und Kurbeln in die drehende Bewegung einer der Wagenaxen verwandelt. Die Punkte, in welchen die Kolbenstangen mit den Schubstangen verbunden sind, werden durch Gleitstücke und Führungslineale, die an dem Rahmenbau oder am Kessel befestigt sind, geradlinig geführt.

Zur Steuerung werden gewöhnlich einfache Schieber mit schwacher innerer und starker äusserer Ueberdeckung gebraucht, die eine schwache Expansion zulassen. Ihre Bewegung wird durch excentrische mit der Triebaxe verbundene Scheiben hervorgebracht. Diese excentrischen Scheiben dienen gewöhnlich auch zur Bewegung der Speisepumpen.

Die Abweichungen in der Bauart der Lokomotive betreffen vorzugsweise:

a. die Bauart des Rahmens;

b. die Lage der Dampfcylinder;

c. die Stellung und Verbindung der Räder.

In diesen Hinsichten gibt es:

a. Lokomotive mit innen liegenden, mit aussen liegenden, mit sowohl innen als auch aussen liegenden Rahmen;

b. Lokomotive mit innen in der Rauchkammer liegenden Cylindern, mit aussen an der Rauchkammer liegenden Cylindern, mit aussen ungefähr in der Mitte des ganzen Baues angebrachten Cylindern;

c. Lokomotive mit freien und mit gekoppelten Rädern.

Eine vollständige Uebersicht aller bis jetzt in Gebrauch gekommenen Lokomotive ist für unsere Zwecke nicht nothwendig; die bis jetzt am häufigsten in Gebrauch gekommenen Constructionen sind folgende:

A. Personenzug-Lokomotive.

I. *Erste Personenzug-Lokomotive von Robert Stephenson* (Tab. I, Fig. 1 und 2). Dieses ist die erste vollkommenere Construction, nach welcher alle späteren angeordnet wurden. Die Cylinder liegen in der Rauchkammer und werden durch die Wände derselben getragen. Sie sind durch vier von den Cylindern ausgehende, die Triebaxe mit Gabeln umfassende und an die vordere Wand der Feuerbüchse genietete hohe Schienen direkt an die Triebaxe gehängt. Die zur Geradführung der Kolbenstangen dienenden Führungslineale sind gegen die inneren dieser vier Schienen geschraubt. Die in die Nähe der Feuerbüchse gelegte Triebaxe ist mit zwei rechtwinklig gegen einander gestellten Kurbeln versehen. Von den zwei Axen der Laufräder befindet sich die eine vorn in der Nähe der Rauchkammer, die andere unmittelbar hinter dem Feuerkasten. Die Lokomotive hat auch einen äusseren Rahmen, mit welchem der Kesselbau verbunden ist. Sämmtliche Axen haben ausserhalb ihrer Räder Axenzapfen, die von Axenbüchsen umgeben sind, und auf welchen der ganze Bau vermittelst eines Systems von Federn elastisch aufliegt.

II. *Zweite Personenzug-Lokomotive von Robert Stephenson,* mit innen liegenden Cylindern (Tab. I, Fig. 3 und 4). Diese unterscheidet sich von der vorhergehenden durch den Rahmenbau und durch die Radstellung. Die Lokomotive hat einen ganz einfachen inneren Rahmen, der an den Seitenwänden des Feuerkastens und der Rauchkammer hinzieht und mit welchem der Kessel und die Cylinder verbunden sind. Die an der ersteren Lokomotive angebrachte direkte Verbindung der Cylinder mit der Triebaxe, so wie auch die äusseren Rahmen sind hier nicht vorhanden. Die Axen sämmtlicher Räder befinden sich zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer; die Axe der hinteren Laufräder unmittelbar vor dem Feuerkasten, die Axe der vorderen Laufräder unmittelbar hinter der Rauchkammer. Die mit zwei rechtwinklig gegen einander gestellten Kurbeln versehene Triebaxe befindet sich in der Mitte etwas hinter dem Schwerpunkt des ganzen Baues. Die Axen haben keine äusseren Axenzapfen, sondern sie sind innerhalb der Räder mit Axenbüchsen versehen, auf welchen der ganze Bau mit Federn elastisch aufsitzt.

III. *Dritte Personenzug-Lokomotive von Robert Stephenson* (Tab. II, Fig. 5 und 6), mit äusseren Cylindern. Kessel, Rahmenbau und Radstellung stimmen bei dieser Lokomotive mit der unter II. beschriebenen überein. Die Cylinder liegen aussen neben der Rauchkammer und sind an die inneren Rahmen geschraubt. Auch hier haben die Axen keine äusseren Zapfen, sondern sind innerhalb der Räder mit Axenbüchsen versehen.

Die Geradführungen sind an die Rahmen geschraubt. In die kurbelförmig erweiterten Naben der Triebräder sind Kurbelzapfen eingesetzt, auf welche die Maschinen durch Vermittlung von Schubstangen einwirken.

IV. *Vierte Personenzug-Lokomotive von Robert Stephenson* (Tab. II, Fig. 7 und 8). Diese unterscheidet sich von der vorhergehenden theils durch die Radstellung, theils durch die Cylinderlage. Alle Axen liegen zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer, die Triebaxe befindet sich aber nicht in der Mitte, sondern etwas vor der vorderen Wand des Feuerkastens. Die Cylinder liegen ausserhalb, aber ungefähr in der Mitte der Lokomotive.

V. *Personenzug-Lokomotive von Crampton ohne Blindaxe* (Tab. III, Fig. 9 und 10). Diese unterscheidet sich von der vorhergehenden theils durch den Rahmenbau, theils durch die Radstellung. Die Lokomotive hat innere und äussere durch die Bufferbalken verbundene Rahmen; die inneren Rahmen liegen an den Seitenwänden des Feuerkastens und der Rauchkammer. Die Cylinder liegen ausserhalb ungefähr in der Mitte der Lokomotive, und jeder derselben ist an die zwei an einer Seite der Lokomotive befindlichen Rahmen geschraubt. Die Triebräder sind von beträchtlicher Grösse; ihre Axe liegt unmittelbar hinter dem Feuerkasten. Die Axengabeln für die Triebaxe sind nach aufwärts gekehrt, so dass die Triebaxe mit den Rädern leicht ausgehoben werden kann.

VI. *Personenzug-Lokomotive von Crampton mit Blindaxe* (Tab. III, Fig. 11 und 12). Die Construction dieser Lokomotive ist eine Combination der früher beschriebenen Anordnungen. Die Cylinder liegen im Innern in der Rauchkammer und sind gegen innere Rahmen geschraubt. Die Maschinen wirken auf eine in der Nähe des Feuerkastens angebrachte, in dem Rahmen gelagerte Kurbelaxe ohne Räder. Ausserhalb der Rahmen ist diese Kurbelaxe (die Blindaxe) ebenfalls mit Kurbeln versehen, und von diesen aus werden die Triebräder, deren Axe hinter dem Feuerkasten liegt, durch Kupplungsstangen getrieben.

B. Güterzug-Lokomotive.

VII. *Güterzug-Lokomotive von R. Stephenson mit innen liegenden Cylindern und mit vier gekuppelten Triebrädern* (Tab. IV, Fig. 13 und 14). Diese Lokomotive ist im Wesentlichen wie die unter I. beschriebene construirt, und unterscheidet sich von derselben nur dadurch, dass die vier hintern Räder gleich gross und durch Kupplungsstangen verbunden sind.

VIII. *Güterzug-Lokomotive von R. Stephenson mit aussen liegenden Cylindern und mit vier gekuppelten Rädern* (Tab. IV, Fig. 15 und 16). Die Bauart dieser Lokomotive stimmt mit der unter III. beschriebenen überein und unterscheidet sich von dieser nur dadurch, dass die vier hinteren Räder gleiche Grössen haben und durch Kupplungsstangen verbunden sind.

IX. *Die Lokomotive von Norris* (Tab. V, Fig. 17 und 18). Diese Lokomotive hat einen cylindrischen Feuerkasten, innere Rahmen, vier durch Kupplungsstangen verbundene Triebräder. Von den Axen der Triebräder liegt die eine vor, die andere hinter der Feuerbüchse. Die Cylinder liegen aussen an der Rauchkammer in etwas schiefer Richtung. Die Maschinen wirken zunächst vermittelst sehr langer Schubstangen auf die hinter dem Feuerkasten befindlichen Triebräder. Es sind vier Laufräder vorhanden, die zu einem besonderen um einen mittleren vertikalen Zapfen drehbaren Wagen vereinigt sind. Der

vordere Theil der Lokomotive liegt in zwei Punkten auf den Federn dieses Wagens. Durch diesen drehbaren Vorderwagen kann diese Lokomotive leichter in Krümmungen laufen als starr gebaute Lokomotive.

X. *Die Lokomotive der Würtembergischen Eisenbahnen* (Tab. V, Fig. 19 und 20). Diese Lokomotive ist im Wesentlichen nach der von *Norris* construirt. Die Cylinder liegen jedoch horizontal und wirken zunächst auf die vor dem Feuerkasten befindliche Triebaxe.

XI. *Güterzug-Lokomotive mit innenliegenden Cylindern und mit sechs gekuppelten Rädern* (Tab. VI, Fig. 21 und 22). Diese Lokomotive unterscheidet sich von der unter II. beschriebenen nur dadurch, dass alle Räder dieselbe Grösse haben und mit einander verkuppelt sind.

XII. *Güterzug-Lokomotive mit aussen liegenden Cylindern und mit sechs gekuppelten Rädern* (Tab. VI, Fig. 23 und 24). Diese Lokomotive unterscheidet sich von der unter III. beschriebenen nur dadurch, dass die Triebräder gleich gross und mit einander gekuppelt sind.

C. Berg-Lokomotive.

XIII. *Die neuere Sömmering-Lokomotive von Engerth.* Es ist für unsere Zwecke nicht nothwendig, alle bis jetzt versuchten Construktionen von Berglokomotiven zu beschreiben; wir begnügen uns mit der Beschreibung der in neuerer Zeit auf der Sömmering-Bahn in Anwendung gekommenen, von *Engerth* erfundenen und in der Maschinenfabrik zu Esslingen ausgeführten Lokomotive (Tab. VII, Fig. 25 und 26). Bei dieser Construktion bilden die eigentliche Lokomotive und der Tender ein zusammenhängendes Ganzes. Die eigentliche Lokomotive hat aussen liegende Cylinder und sechs mit einander gekuppelte Räder. Dieser Theil des ganzen Baues weicht von der unter XII. beschriebenen Lokomotive im Wesentlichen nur dadurch ab, dass die hintere Axe von den Cylindern aus vermittelst Schubstangen getrieben wird, und dass der Kessel nach rückwärts beträchtlich verlängert ist. Dieser verlängerte Theil des Kessels wird durch den Tender getragen, der mit vier gekuppelten Rädern versehen ist. In Fig. 26 ist zu erkennen, wie der Kessel vermittelst zweier Tatzen auf dem Rahmen des Tenders aufliegt. Tender und Lokomotive sind aber auf zweierlei Weise in Zusammenhang gebracht. Sie sind zunächst mit einem in Fig. 26 angedeuteten vertikalen Bolzen so verbunden, dass sie sich gegen einander verstellen und in Bahnkrümmungen ungezwungen laufen können. Die hintere Axe der Lokomotive und die vordere Axe des Tenders sind aber auch noch durch drei Räder in Zusammenhang gebracht, so dass das totale Gewicht des ganzen Baues auf Adhäsion wirkt. Die Axe des mittleren dieser drei Räder, deren Zähne von Gussstahl sind, wird durch einen Rahmen getragen, welcher gegen die hintere Axe der Lokomotive eine unveränderliche Lage hat, gegen welchen jedoch die vordere Axe des Tenders bei einer Verwendung desselben gegen die Lokomotive ihre Lage verändern kann. Die Richtung des Bolzens, durch welchen Tender und Lokomotive zusammengehängt sind, geht durch den Eingriffspunkt des hinteren und des mittleren Rades.

D. Abänderungen von zwei bereits bestehenden Lokomotiven, und eine neue Anordnung.

Ich lasse noch die Beschreibung dreier Lokomotive folgen; zwei derselben sind Modifikationen von bereits bestehenden Lokomotiven, die dritte ist eine neue Anordnung.

XIV. *Eine Modifikation der Lokomotive von Crampton* (Tab. VII, Fig. 27 und 28). Diese Modifikation besteht darin, dass die vier Laufräder zu einem um einen vertikalen Zapfen drehbaren Wagen vereiniget sind, was die Bewegung der Lokomotive in Bahnkrümmungen erleichtert.

XV. *Eine Modifikation der Würtembergischen Lokomotive* (Tab. VIII, Fig. 29 und 30). Diese Modifikation besteht darin, dass die Cylinder von der Rauchkammer weg ungefähr gegen die Mitte der Maschine hin verlegt sind, und dass die hinter dem Feuerkasten befindliche Axe von den Cylindern aus durch Schubstangen bewegt wird.

XVI. *Lokomotive mit Schleifenbewegung* (Tab. VIII, Fig. 31 und 32). Diese Lokomotive unterscheidet sich von allen im Vorhergehenden beschriebenen durch den Mechanismus, vermittelst welchem die hin- und hergehende Bewegung der Kolben in die drehende Bewegung der Triebaxe verwandelt wird. Es ist nämlich der Schubstangenmechanismus durch die Schleifenbewegung ersetzt. Die Radstellung ist wie bei der Lokomotive von *Crampton*. Die Laufräder können aber auch hier zu einem drehbaren Wagen vereiniget werden. Die Anwendung dieser Schleifenbewegung ist keine willkürhliche Erfindung; man wird sich in der Folge überzeugen, dass bei dieser Anordnung die Mehrzahl der störenden Bewegungen, mit denen die gewöhnlichen Construktionen behaftet sind, gar nicht vorkommen können.

Die Vortheile und Nachtheile dieser verschiedenen Anordnungen, so wie deren Anwendbarkeit wird man durch die in diesem Werke vorkommenden Untersuchungen über die störenden Bewegungen gründlich kennen lernen.

II.

Bahn und Wägen.

Widerstände eines Trains.

Eine ganz genaue Kenntniss der Widerstände, welche der Bewegung eines Wagenzuges entgegenwirken, wäre für den Bau der Bahn, so wie auch für die Construktion der Wägen von sehr grosser Wichtigkeit. Wären diese Widerstände ganz genau bekannt, so würde man daraus ersehen, wie die Bahn und wie die Wägen zu bauen wären um die Widerstände der Bewegung und die verschiedenen zweckwidrigen schlängelnden und gaukelnden Bewegungen der Wägen möglichst zu vermindern. Insbesondere würde man durch die Kenntniss der wahren Gesetze der Widerstände die zweckmässigste Spurweite der Bahn, die angemessenste Grösse und Umfangsform der Räder, die Entfernung der Axen und das System der Federung best möglichst zu bestimmen im Stande sein. Allein eine scharfe Bestimmung der Wagenbewegungen auf Eisenbahnen ist mit nicht geringen Schwierigkeiten verbunden, denn der Ursachen, welche auf diese Bewegung Einfluss haben gibt es gar zu viele. Es hängt diese Bewegung ab: 1) von den Krümmungsverhältnissen der Bahn; 2) von ihrer Steigung; 3) von den Unebenheiten der Schienen und der mehr oder weniger vollkommenen Verbindung derselben; 4) von der Spurweite; 5) von der Querschnittsform der Schienen; 6) von der Anzahl, Grösse und Umfangsform der Räder; 7) von der Entfernung der Axen und ihrer gegenseitigen Beweglichkeit; 8) von dem Systeme der Federung; 9) von der Lage des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues gegen die Axen und insbesondere von der Höhe dieses Schwerpunktes über den Axen u. s. w.

Für den Lokomotivbau, welchen wir hier nur allein im Auge haben, ist eine so scharfe Kenntniss der Widerstände nicht so dringend nothwendig; es genügt für diesen Zweck diejenige Genauigkeit, welche durch Versuche und Beobachtungen erreicht werden kann. Die bis jetzt durch Versuche erreichte Genauigkeit ist aber eben keine grosse; die Resultate, welche verschiedene gleich achtenswerthe Beobachter gefunden haben, weichen sehr beträchtlich von einander ab, und es kann nicht wohl anders sein, denn die Bewegungen sind einmal so complizirt, geschehen theilweise so regellos und mit so grosser Geschwindigkeit, dass von genauen Messungen der Erscheinungen gar nicht die Rede sein kann.

W. Harding gibt für den Widerstand eines Wagenzuges ohne Lokomotive folgenden Ausdruck:

$$W_1 = T_1 \left(6 + \frac{V_1}{3} + \frac{0{\cdot}0025\ F_1\ V_1^2}{T_1}\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

In demselben bedeutet:

W_1 den Widerstand des Trains in englischen Pfunden zu 0.454 Kilg.

T_1 das Gewicht des Trains in englischen Tonnen zu 1016 Kilg.

F_1 die Stirnfläche des vordersten Wagens in englischen Quadratfussen zu 0.093 Quadradmetern.

V_1 die Geschwindigkeit des Trains in einer Stunde in englischen Meilen zu 1609 Meter.

Das erste Glied innerhalb der Klammer bezieht sich auf die Axenreibungen, das zweite der Geschwindigkeit proportionale Glied soll den Widerstand bestimmen, den die Bahn und die schlängelnde Bewegung des Wagenzuges verursacht; das dritte Glied bezieht sich auf den Luftwiderstand.

Um diese Formel in französische Maaseinheiten zu übersetzen, nennen wir:
W den Widerstand des Trains in Kilogrammen.
T das Gewicht des Trains in Tonnen a 1000 Kilogramme.
F die Stirnfläche des vordersten Wagens in Quadratmetern.
V die Geschwindigkeit des Trains in Metern in einer Sekunde.

Dann ist:

$$W_1 = 2{\cdot}205\ W \qquad T_1 = 0{\cdot}984\ T \qquad F_1 = 10{\cdot}75\ F \qquad V_1 = 2{\cdot}23\ V$$

Führt man diese Werthe in den Ausdruck (1) ein, so findet man:

$$W = T\left[2{\cdot}680 + 0{\cdot}3323\ V + 0{\cdot}0609\ \frac{F V^2}{T}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Es wird gewöhnlich behauptet, dass dieser Ausdruck mit der „Erfahrung" ziemlich gut stimmende Werthe gebe. Dies scheint jedoch nicht möglich zu sein. Der Coeffizient des zweiten Gliedes ist wahrscheinlich viel zu gross, und der Luftwiderstand richtet sich doch nicht blos nach der Stirnfläche des vordersten Wagens, sondern auch nach der Anzahl der Wagen des Trains.

D. Gooch berechnet den Widerstand eines Trains mit Lokomotive vermittelst folgender Formel, in welcher W_1 T_1 V_1 die früher angegebene Bedeutung haben und durch L_1 das Gewicht der Lokomotive in englischen Tonnen, $\mathfrak{B}_1$ das Volumen des Trains in englischen Kubikfussen bezeichnet ist:

$$W_1 = \left\{\begin{array}{l} L_1\left[5 + 0{\cdot}5\ V_1 + 0{\cdot}00004\ T_1\ V_1^2\right] \\ 0{\cdot}00002\ \mathfrak{B}_1\ V_1^2 \\ \frac{1}{15}\ V_1\ T_1 \\ 6\ T_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Das erste Glied bestimmt den Widerstand der Lokomotive mit Einschluss des Tenders in englischen Pfunden, das zweite Glied bestimmt den Luftwiderstand, das dritte den Widerstand, den die Unebenheit der Bahn und die schlängelnde Bewegung der Wägen verursacht, das vierte Glied endlich die Axenreibung.

Reduzirt man diese Werthe auf französische Einheiten, indem man setzt:

$$W_1 = 2{\cdot}205\ W \qquad T_1 = 0{\cdot}984\ T \qquad V_1 = 2{\cdot}23\ V \qquad \mathfrak{B}_1 = 35{\cdot}3\ \mathfrak{B}$$

wobei $\mathfrak{B}$ das Volumen des Trains in Kubikmetern bedeutet, so findet man:

$$\frac{W}{T} = \left\{\begin{array}{l} \frac{L}{T}\left[2{\cdot}23 + 0{\cdot}138\ V + 0{\cdot}0000068\ T V^2\right] \\ 0{\cdot}000124\ \frac{\mathfrak{B}\ V^2}{T} \\ 0{\cdot}0185\ V \\ 2{\cdot}68 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Diese Berechnungsweise verdient aber wenig Vertrauen. Das Glied $0{\cdot}0000068\ T\ V^2$ scheint mit der Natur der Sache in keinem richtigen Zusammenhang zu sein, der Luftwiderstand des Trains ist seinem Volumen proportional angenommen, was gewiss unrichtig ist, und der von der schlängelnden Bewegung herrührende Widerstand ist wahrscheinlich zu klein in Rechnung gebracht; wenigstens ist es auffallend, dass er 5 mal kleiner ist, als nach der Regel von *Harding*.

Ich glaube, dass man durch die folgende Berechnung, die auf einer Combination der durch verschiedene Beobachter gemachten Erfahrungen beruht, der Wahrheit näher kommen dürfte als durch die Berechnungen von *W. Harding* und von *Gooch*.

Widerstand des Trains und der Lokomotive.

(Englische Masseinheiten.)

1. Axenreibung eines Trains ohne Lokomotive, sowohl nach *Harding* als nach *Gooch*	$6\ T_1$
2. Widerstand, den die Bewegung des Trains auf der Bahn theils durch ihre Unebenheiten, theils durch die schlängelnde Bewegung verursacht, nach *Gooch* .	$\frac{1}{15}\ V_1\ T_1$
3. Axenreibung der Lokomotive nach *Pambour* . . .	$6\ L_1$
4. Reibungswiderstand, den die Mechanismen der Lokomotive verursachen, wenn dieselbe keinen Train zieht, nach *Pambour*	$8\ L_1$
5. Bahn- und Rollungswiderstand der Lokomotive nach *Gooch*	$\frac{1}{2}\ L_1\ V_1$
6. Zunahme der Maschinenreibung, wenn die Lokomotive einen Train fortzieht, der einen Widerstand W_1 verursacht, nach *Pambour*	$0{\cdot}14\ W_1$
7. Luftwiderstand des ganzen Trains sammt Lokomotive, nach *Pambour* Hier bedeutet F_1 die Stirnfläche des Trains, f die Stirnfläche eines Wagens, i die Anzahl der Wägen.	$0{\cdot}0025\ (F_1 + \frac{1}{4}\ i\ f)\ V_1^2$
8. Neigung der Bahn wobei α den Neigungswinkel der Bahn bezeichnet.	$2200\ \sin.\alpha\ (T_1 + L_1)$
9. Krümmungswiderstand Der Werth von K_1 wird in der Folge bestimmt werden.	K_1

Die Summe dieser Glieder gibt den Totalwiderstand W_1. Bildet man diese Summe, setzt dieselbe gleich W_1 und sucht aus dieser Gleichheit den Werth von W_1, so findet man:

$$W_1 = 6{\cdot}97\ T_1 + 0{\cdot}077\ T_1\ V_1 + 16{\cdot}27\ L_1 + 0{\cdot}581\ L_1\ V_1 + 0{\cdot}0029\left(F_1 + \frac{1}{4}\ i\ f_1\right) V_1^2$$
$$+ 2556\ \sin.\alpha\ (T_1 + L_1)$$
$$+ 1{\cdot}162\ K_1$$

Um den Widerstand mit französischen Einheiten zu berechnen, hat man zu setzen:

$$W_1 = 2{\cdot}205\ W \quad T_1 = 0{\cdot}984\ T \quad L_1 = 0{\cdot}984\ L \quad F_1 = 10{\cdot}75\ F$$
$$f_1 = 10{\cdot}75\ f \quad K_1 = 2{\cdot}205\ K \quad V_1 = 2{\cdot}23\ V$$

und dann findet man:

$$W = 3{\cdot}11\ T + 0{\cdot}077\ V\ T + 7{\cdot}25\ L + 0{\cdot}577\ L\ V + 0{\cdot}0704 \left(F + \frac{1}{4}\ i\ f\right) V^2$$
$$+ 1162\ \sin.\ \alpha\ (T + L)$$
$$+ 1{\cdot}162\ K$$

oder auch:

$$W = [3{\cdot}11 + 0{\cdot}077\ V]\ T + [7{\cdot}25 + 0{\cdot}577\ V]\ L + 0{\cdot}0704 \left(F + \frac{1}{4}\ i\ f\right) V^2$$
$$+ 1162\ \sin.\ \alpha\ (T + L)$$
$$+ 1{\cdot}162\ K$$

Mittelst dieser Formel ist die nachstehende Tabelle unter folgenden Voraussetzungen berechnet:

$\sin.\ \alpha = 0 \quad K = 0 \quad F = 7 \quad f = 4 \quad i = \frac{T}{7} \quad L = 20$

d. h. es ist angenommen, dass auf einer horizontalen geraden Bahnstrecke mit einer Lokomotive von 20 Tonnen Gewicht, deren Stirnfläche 7 Quadratmeter beträgt, Wagen fortgeschafft werden, von denen jeder 7 Tonnen wiegt und eine Stirnfläche von 4 Quadratmetern hat.

Widerstände, welche jede Tonne von dem Totalgewicht des Trains mit Einschluss der Lokomotive auf horizontaler gerader Bahn verursacht.

Gewicht des Trains.	Werthe von $\frac{W}{L+T}$, wenn die Geschwindigkeit in Metern in einer Secunde beträgt:				
	10	12	14	16	18
Tonnen.	Kilog.	Kilog.	Kilog.	Kilog.	Kilog.
50	7·90	8·98	10·17	11·61	12·91
100	6·65	7·57	8·51	9·56	10·76
150	6·13	6·92	7·81	8·78	9·87
200	5·84	6·58	7·63	8·35	9·39

Diese Werthe sind wahrscheinlich etwas zu klein, denn der Bahnwiderstand ist nach *Gooch* in Rechnung gebracht, und der Luftwiderstand der Räder ist unberücksichtigt geblieben.

Bedingungen,

unter welchen ein vierrädriger Wagen ohne Widerstand in einer Bahnkrümmung läuft.

Wenn ein Laufwerk (Tab. IX, Fig. 33), das aus einer Axe und aus zwei ungleich grossen Rädern besteht, auf eine ebene Fläche gelegt und in Bewegung gesetzt wird, so rollt es wie ein Kegel, ohne einen Widerstand zu verursachen um denjenigen Punkt C der Ebene herum, in welchem die Axe des Laufwerkes die Ebene durchschneidet. Legt man durch die Punkte A und a, in welchen die Räder in irgend einer Position des

Laufwerks diese Ebene berühren, Ebenen senkrecht zur Axe des Laufwerkes, so werden die Oberflächen der Räder in Kreisen geschnitten, welche wir die Laufkreise der Räder nennen wollen. Zieht man von C aus nach allen Punkten des Laufkreises A gerade Linien, so liegen diese in einer Kegelfläche, welche die beiden Radflächen in ihren Laufkreisen berührt. Diesen Kegel wollen wir den Laufkegel des Laufwerkes nennen. Nennt man A und a die Halbmesser der Laufkreise, R und r die Halbmesser $\overline{CA}$ und $\overline{Ca}$ der Kreise, auf welchen die Laufkreise herumrollen, so ist:

$$\frac{A}{a} = \frac{R}{r}$$

d. h. bei einem solchen Laufwerk verhalten sich die Halbmesser der Laufkreise wie die Halbmesser der Bahnkreise.

Legt man zwei ganz gleiche Laufwerke mit ungleich grossen Rädern in der Weise auf eine Ebene, dass die Spitzen der Laufkegel zusammentreffen und verbindet dann die Axen der Laufwerke vermittelst eines Rahmens, der eine Aenderung ihrer relativen Lage nicht gestattet, in dem sie sich jedoch ungehindert drehen können, so entsteht ein vierräderiger Wagen mit convergirenden Axen. Setzt man diesen Wagen in Bewegung, so läuft er, ohne einen Widerstand zu verursachen, um den Punkt herum, in welchem die Spitzen der Laufkegel liegen. Ein vierräderiger Wagen kann also ohne einen andern Widerstand, als den der Axenreibung zu verursachen, in einer kreisförmigen Bahn laufen, wenn die Axen der Laufkegel nach dem Mittelpunkt der Bahn gestellt sind, und wenn sich die Halbmesser der Laufkreise wie die Halbmesser der Bahnkreise verhalten.

Dieses für eine ungezwungene Bewegung erforderliche Verhältniss der Laufkreise kann bei einem Wagen, der mit vier gleichen konischen Rädern versehen ist, hervorgebracht werden, wenn man denselben so auf die Bahnschienen stellt (Tab. IX, Fig. 34), dass seine Stellung von der mittleren Stellung, in welcher die Laufkreise der Räder gleich grosse Halbmesser r haben, nach radialer Richtung um ein gewisses Maas σ abweicht. Nennt man α den Winkel, den eine Seite eines Radkegels mit der Axe bildet, so sind bei einer solchen Stellung des Wagens $r + \sigma \operatorname{tang.} \alpha$ und $r - \sigma \operatorname{tang.} \alpha$ die Halbmesser der Laufkreise. Nennt man ferner R den mittleren Halbmesser der Bahnkrümmung, $2e_2$ die Spurweite der Bahn, so sind $R + e_2$ und $R - e_2$ die Halbmesser der Schienenkreise. Für eine ungezwungene Bewegung muss daher sein:

$$\frac{r + \sigma \operatorname{tang.} \alpha}{r - \sigma \operatorname{tang.} \alpha} = \frac{R + e_2}{R - e_2}$$

und hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{r\, e_2}{R \operatorname{tang.} \alpha} \\ \operatorname{tang.} \alpha &= \frac{r\, e_2}{R\, \sigma} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die erste dieser Gleichungen bestimmt die Verschiebung wenn die Conizität, die zweite Gleichung bestimmt die Conizität wenn die Verschiebung gegeben ist.

Bewegung der Bahnwagen in Krümmungen.

Die Bedingungen, welche, wie wir gesehen haben, erfüllt sein müssten damit ein Wagen in einer Bahnkrümmung keinen grösseren Widerstand verursacht, als auf einer geraden Bahnstrecke, sind bei den auf Eisenbahnen gebräuchlichen Wägen nicht erfüllt.

Die Axen dieser Wägen haben gegen einander eine unveränderliche parallele Lage und es sind die Kräfte nicht vorhanden, welche erforderlich wären, um die Laufwerke stets um so viel nach aussen zu verschieben, dass das Verhältniss der Laufkreise jenem der Bahnkreise gleich würde.

Denken wir uns, dass ein mit zwei parallelen Axen und mit vier konischen Rädern versehener Wagen aus einer geraden Bahnstrecke in eine Bahnkrümmung einläuft, so ist leicht einzusehen, dass das äussere Vorderrad auf die äussern Schienen auflaufen wird. Dabei wird der Laufkreis des äusseren Vorderrades vergrössert, der Laufkreis des inneren Vorderrades verkleinert, und wenn die Conizität α der Räder mit dem Spielraum σ der Räder zwischen den Schienen in dem durch die Gleichungen (1) Seite 10 ausgedrückten Zusammenhange steht, so kann das vordere Laufwerk in eine solche Stellung kommen, dass sich die Halbmesser seiner Laufkreise wie die Halbmesser der Bahnkreise verhalten. Allein während die Halbmesser der Laufkreise des vorderen Laufwerks das richtige Verhältniss erhalten, tritt an den Rädern des hinteren Laufwerkes ein fehlerhaftes Verhältniss ein; denn indem der Wagen in die Krümmung einläuft, läuft das innere Hinterrad auf der innern Schiene auf und lauft das äussere Hinterrad von der äusseren Schiene ab. Dabei wird aber der Laufkreis des inneren Hinterrades vergrössert, jener des äusseren Hinterrades verkleinert, es tritt also gerade das Umgekehrte von dem ein, was eintreten sollte. Dazu kommt noch, dass die Axen der Laufwerke fehlerhafte Richtungen erhalten, denn der ganze Wagen kommt in eine gegen die Bahnrichtung verwendete Stellung, die von der Art ist, dass sich zwar die Richtung der hinteren Axe der radialen Richtung nähert, dass dagegen die Richtung der vordern Axe um so mehr von der richtigen radialen Richtung abweicht. Tab. X, Fig. 39 zeigt die Stellung, in welcher ein vierräderiger Wagen eine Bahnkrümmung durchläuft. Am vordern Laufwerk haben die Laufkreise das richtige Verhältniss, vorausgesetzt dass die Conizität der Räder der Bedingung (1) Seite 10 entspricht. Am hintern Laufwerke haben die Laufkreise ein verkehrtes Verhältniss. Die vordere Axe entfernt sich, die hintere Axe nähert sich der richtigen radialen Lage. Oder mit andern Worten: am vordern Laufwerke ist das Verhältniss der Laufkreise ein richtiges, die Axenrichtung eine fehlerhafte. Am hinteren Laufwerk ist umgekehrt die Axenrichtung eine beinahe richtige, das Verhältniss der Laufkreise ein fehlerhaftes. Jedes Laufwerk entspricht also annähernd nur einer, und zwar jedes einer andern von den beiden Bedingungen, die erfüllt sein müssten, wenn die Bewegung des Wagens in der Bahnkrümmung nicht mehr Widerstand verursachen sollte, als in einer geraden Bahnstrecke.

Es entsteht nun die Frage, ob die Wägen nicht in der Art eingerichtet werden könnten, dass sie eine natürliche Tendenz hätten, sich in jeder Bahnkrümmung so zu stellen, dass nicht nur am vordern, sondern auch am hinteren Laufwerk das richtige Verhältniss der Laufkreise sich einstellte. Dies kann man in der That bewirken, wenn man die Räder an der hinteren Axe verkehrt, d. h. so anbringt, dass die Spitzen der Radkegel gegen die Bahn einwärts gekehrt sind.

Tab. X, Fig. 40 ist ein solcher Wagen dargestellt. Er ist so auf die Bahn gestellt, dass die den Berührungspunkten A_1 A_2 A_3 A_4 entsprechenden Laufkreise gleich gross sind. Wird dieser Wagen fortgezogen, so werden die Laufkreise der äusseren Räder grösser, jene der innern Räder kleiner, und wenn die Conizitäten die richtige Grösse haben, so gelangt der Wagen in eine Stellung (Fig. 38), in welcher die Laufkreise des vordern und des hintern Laufwerkes das richtige Verhältniss erhalten.

Leider ist diese Anordnung aus zwei Gründen von keinem praktischen Werth; denn erstlich ist die Stellung des hinteren Laufwerkes keine hinreichend stabile, und zweitens müsste ein solcher Wagen immer erst umgekehrt werden, wenn er nach entgegengesetzter Richtung zu laufen hätte, denn man sieht an der Figur 40, dass in beiden Lauf-

werken die Verhältnisse der Laufkreise verkehrt werden, wenn man den Wagen nach einer Richtung bewegt, die der in der Figur angegebenen Pfeilrichtung entgegengesetzt ist. Wir müssen also diese Einrichtung als eine praktisch unbrauchbare verwerfen.

Die Höherlegung der äusseren Schiene.

Die Stellung, in welcher ein vierrädriger Wagen mit parallelen Axen eine Bahnkrümmung durchläuft, ist vorzugsweise für die Bewegung des äusseren Vorderrades eine ungünstige, indem durch die verwendete Stellung des Wagens der Winkel, den die Ebene des Laufkreises des äusseren Vorderrades mit der Bahnrichtung bildet, sehr gross ausfällt. Wenn nicht geeignete Mittel angewendet werden, wird der Spurkranz dieses Rades gegen die Schienen stossen, oder es kann sogar der Fall eintreten, dass das Rad auf die Schiene steigt, so dass der Wagen aus dem Geleise kommt. Es ist daher vorzugsweise von Wichtigkeit, der Bewegung des äusseren Vorderrades nachzuhelfen, um das Aufsteigen dieses Rades oder das Anstossen seines Spurkranzes an die Schiene zu verhüten. Dies kann bewirkt werden, wenn man die äussere Schiene um so viel höher legt als die innere, dass das ganze vordere Laufwerk nach radialer Richtung einwärts gleitet, wenn es um so viel nach auswärts gelaufen ist, dass der Spurkranz des äusseren Rades der inneren Fläche der äusseren Schiene ganz nahe kommt. Das vordere Laufwerk muss also, wenn es die auf Tab. IX, Fig. 35 dargestellte Stellung erreicht hat, durch sein eigenes Gewicht und insbesondere durch die Belastung seiner Zapfen mit einer Kraft nach einwärts getrieben werden, die nicht nur die Reibung zu überwinden vermag, welche dem Einwärtsgleiten der Räder entgegenwirkt, sondern auch noch eine Ablenkungskraft für die Bewegung des Wagens in der kreisförmigen Bahnkrümmung liefert. Allein bei der früher beschriebenen Stellung, in welcher ein Wagen eine Bahnkrümmung durchläuft, ist die vordere Axe nach einwärts, die hintere Axe nach auswärts geneigt, es liegt also die Belastung vorzugsweise auf dem äusseren Zapfen der vorderen Axe und auf dem inneren Zapfen der hinteren Axe; wir werden uns also der Wahrheit ziemlich nähern, wenn wir annehmen, dass der innere Zapfen der Vorderaxe gar nicht, der äussere Zapfen dieser Axe dagegen mit dem halben Gewicht der ganzen Wagenconstruction und der darauf liegenden Last belastet ist.

Nennen wir Q das totale Gewicht des Wagens sammt Belastung, $2 e_2$ die Spurweite der Bahn, h die Ueberhöhung der äusseren Schiene, v die Fahrgeschwindigkeit des Wagens, α die Conizität der Räder, d. h. den Winkel, den die Seite des Radkegels mit der Axe bildet, σ den Spielraum des Rades zwischen den Schienen, R den mittleren Halbmesser der Bahnkrümmung, f den Reibungscoeffizienten zwischen den Rädern und den Schienen, $g = 9.808$ Meter die Beschleunigung durch die Schwere, r den Halbmesser des mittleren Laufkreises eines Rades, φ den Winkel ABC (Fig. 35), den die untere Seite des Radkegels des äusseren Vorderrades mit dem Horizont bildet, so ist zunächst annähernd, wie man leicht findet:

$$\varphi = \alpha + \frac{h}{2 e_2} + \frac{\sigma \text{ tang. } \alpha}{e_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Da wir voraussetzen, dass das äussere Vorderrad mit dem halben Gewicht $\frac{Q}{2}$ des Wagens nach vertikaler Richtung gegen die Bahn drückt, so ist $\frac{Q}{2} \sin. \varphi$ die aus diesem Druck entspringende Kraft, mit welcher das Rad nach der Richtung AB herabzugleiten

sucht. Diese Kraft muss also die Reibung $\frac{Q}{2}$ f überwinden und noch überdiess eine Ablenkungskraft $\frac{\frac{1}{2}Q}{g}\frac{V^2}{R}$ liefern. Man hat daher:

$$\frac{Q}{2}\sin.\varphi = \frac{Q}{2}f + \frac{\frac{Q}{2}}{g}\frac{V^2}{R}$$

demnach:

$$\sin.\varphi = f + \frac{V^2}{gR} \quad \ldots \quad (2)$$

Da φ jederzeit ein kleiner Winkel ist, darf man $\sin.\varphi = \varphi$ setzen, und dann wird:

$$\varphi = f + \frac{V^2}{gR} \quad \ldots \quad (3)$$

Aus (1) und (3) folgt durch Elimination von φ:

$$\alpha + \frac{h}{2e_2} + \frac{\sigma \operatorname{tang.}\alpha}{e_2} = f + \frac{V^2}{gR} \quad \ldots \quad (4)$$

Allein wenn die Räder die angemessene Conizität haben, ist:

$$\frac{\sigma \operatorname{tang.}\alpha}{e_2} = \frac{r}{R}$$

Die Gleichung (4) gibt daher:

$$\frac{h}{2e_2} = \frac{V^2}{gR} + f - \alpha - \frac{r}{R} \quad \ldots \quad (5)$$

Durch die Schienenüberhöhung, welche diese Gleichung bestimmt, wird also den Hauptübelständen, welche in der Bewegung des äusseren Vorderrades vorkommen können, abgeholfen. Allein der Zustand des hinteren Laufwerkes wird dadurch nicht verbessert; es stellt sich zu weit nach einwärts und sollte hinaus getrieben werden, was durch die Höherlegung der äusseren Schiene nicht geschehen kann. Allein weil die Stellung des hinteren Laufwerkes keine gefährliche ist, so kann dieselbe doch nur in so fern nachtheilig wirken, als ein gewisser Kraftaufwand nothwendig ist, um den aus der fehlerhaften Stellung dieses Laufwerkes entspringenden Reibungswiderstand zu überwinden, und diesen Kraftverlust muss man sich nun einmal gefallen lassen.

Die Gleichung (5) zeigt, dass die richtige Schienenüberhöhung von der Fahrgeschwindigkeit, vom Bahnhalbmesser, vom Reibungscoeffizienten und von der Conizität der Räder abhängt. Der Quotient $\frac{r}{R}$ ist nicht zu beachten. Ungünstige Verhältnisse sind also: eine grosse Fahrgeschwindigkeit, eine starke Krümmung, trockene bestaubte Schienen und eine schwache Conizität der Räder. Der Reibungscoeffizient ist für trockene bestaubte Schienen $\frac{1}{3}$, für nasse oder leicht beschneite Schienen $\frac{1}{10}$. Die Befahrung von Bahnkrümmungen geschieht also bei nassem Wetter und im Winter leichter als bei gutem Wetter. Eine starke Conizität der Räder ist für Bahnkrümmungen günstig; allein man kann in dieser Hinsicht nicht wohl über eine gewisse Grenze gehen, weil sonst die Bahnschienen zu stark auseinandergedrängt würden.

Wir wollen sehen, wie die numerischen Werthe ausfallen, welche die Gleichung (5) liefert.

Ein Krümmungshalbmesser von 200 Metern wird zu den kleinen noch zulässigen gerechnet, und eine Fahrgeschwindigkeit von 10 Metern in einer Sekunde ist für eine solche Krümmung eine beträchtliche. Bei gewöhnlichem Wetter, wenn die Schienen weder bestaubt noch nass sind, ist der Reibungscoeffizient $\frac{1}{6}$. Eine Conizität von $\frac{1}{7}$ ist für den Bahnbau noch zulässig. Setzen wir also:

$$V = 10^{m} \qquad R = 200 \qquad f = \frac{1}{6} \qquad \alpha = \frac{1}{7} \qquad g = 9{\cdot}808 \qquad r = 0{\cdot}5$$

$$b = 1{\cdot}5 \text{ Meter (schmale deutsche Spur)}$$

so gibt die Gleichung (5)

$$\frac{h}{b} = 0{\cdot}072, \quad h = 0{\cdot}1 \text{ Met.}$$

Diese Ueberhöhung ist aber eine sehr beträchtliche zu nennen. Eine Fahrgeschwindigkeit von 10 Metern in der Sekunde ist also in einer Bahnkrümmung von 200 Metern Halbmesser zu gross.

Geleiserweiterung in Bahnkrümmungen.

Für die Befahrung von geraden Bahnstrecken ist ein geringer Spielraum der Räder zwischen den Schienen und eine schwache Conizität der Räder vortheilhaft. Ein so geringer Spielraum ist aber insbesondere bei nur schwacher Conizität der Räder nicht genügend, damit die Räder in stärkeren Bahnkrümmungen in diejenige Stellung gelangen können, bei welcher das richtige Verhältniss zwischen den Halbmessern der Laufkreise und den Halbmessern der Bahnkreise eintreten kann. In stärkeren Krümmungen muss also den Rädern ein grösserer Spielraum gelassen werden, was nur durch eine Geleiserweiterung geschehen kann.

Nennt man:

$2e_2$ die Spurweite in den geraden Bahnstrecken, d. h. den Horizontalabstand der Vertikalebenen, welche an die inneren Seiten der Bahnschienen tangirend angelegt werden können;

σ den Spielraum eines Rades in den geraden Bahnstrecken;

ξ den Horizontalabstand der Ebene des Laufkreises eines Rades von der Vertikalebene, welche an die innere Seite einer Schiene tangirend angelegt werden kann;

α die Conizität der Räder;

r den Halbmesser des Laufkreises eines Rades, wenn der Wagen auf einer geraden Bahnstrecke in der mittleren Stellung auf der Bahn steht;

σ_1 den Spielraum, der einem Rad in einer Bahnkrümmung, welcher ein mittlerer Halbmesser R entspricht, gelassen werden muss, damit das richtige Verhältniss der Laufkreise eintreten kann, wenn der Wagen um σ_1 nach auswärts verschoben wird.

Dies vorausgesetzt sind erstlich die Laufkreise der Räder, wenn der Wagen in der Bahnkrümmung um σ_1, d. h. um so viel nach aussen verschoben ist, dass die Spurkränze der äusseren Räder die inneren Seiten der Schienen berühren, gleich:

$$r + (2\,\sigma_1 - \sigma) \text{ tang. } \alpha, \text{ und } r - \sigma \text{ tang. } \alpha;$$

und sind ferner die Halbmesser der Bahnkreise gleich:

$$R + (e_2 + \sigma_1 - \sigma + \xi) \qquad R - (e_2 + \sigma_1 - \sigma + \xi)$$

Da sich uun die Laufkreise wie die Bahnkreise verhalten sollen, so hat man:

$$\frac{r + (2\sigma_1 - \sigma)\,\text{tang.}\,\alpha}{r - \sigma\,\text{tang.}\,\alpha} = \frac{R + (e_2 + \sigma_1 - \sigma + \xi)}{R - (e_2 + \sigma_1 - \sigma + \xi)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Allein $\sigma_1 - \sigma + \xi$ ist eine gegen $R + e_2$ wie gegen $R - e_2$ verschwindend kleine Grösse, kann also vernachlässigt werden, und dann findet man:

$$\sigma_1 = \frac{r - \sigma\,\text{tang.}\,\alpha}{\text{tang.}\,\alpha}\,\frac{e_2}{R - e_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Geleiserweiterung $2(\sigma_1 - \sigma)$ ist demnach:

$$2(\sigma_1 - \sigma) = 2\,\frac{r\,e_2 - \sigma\,R\,\text{tang.}\,\alpha}{(R - e_2)\,\text{tang.}\,\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Die deutsche schmale Spurweite ist $2\,e_2 = 1{\cdot}435$ Meter. Der Spielraum σ für gerade Bahnstrecken kann zu 0·01 Meter angenommen werden. Der Radhalbmesser der Bahnwägen ist durchschnittlich $r = 0{\cdot}5$ Meter; für die Conizität der Räder ist es angemessen zu nehmen: $\text{tang.}\,\alpha = \frac{1}{7} = 0{\cdot}143$. Mit diesen Daten gibt die Formel (2):

$$\sigma_1 = \frac{2{\cdot}5}{R - 0{\cdot}767}$$

Hieraus folgt:

für $R =$	100	150	200	250 Meter.
$\sigma_1 =$	0·025	0·017	0·0125	0·01 „

Kraft zur Fortbewegung eines Wagens in einer Bahnkrümmung.

Die Bestimmung der Kraft, welche zur Fortbewegung eines Wagens in einer Bahnkrümmung erforderlich ist, verursacht, wenn man die Sache mit voller Strenge nehmen will, sehr viele kaum zu bewältigende Schwierigkeiten, die mit dem Zweck, um den es sich handelt, in keinem Verhältniss stehen; wir wollen uns daher mit einer Annäherung begnügen. Zu diesem Behufe nehmen wir statt eines wirklichen mit gleichen conischen Rädern versehenen Wagens einen ideellen Wagen an, der mit dünnen cylindrischen Rädern versehen ist, deren Laufkreise sich am vorderen Laufwerk direct, am hinteren Laufwerk verkehrt wie die Bahnkreise verhalten, stellen diesen Wagen auf eine ganz ebene Fläche, auf welcher zwei den Bahnkreisen gleiche concentrische Kreise verzeichnet sind, und suchen die Kraft zu bestimmen, welche im Stande ist, die Widerstände zu überwältigen, die der Fortbewegung dieses ideellen Wagens in den auf der Ebene verzeichneten Kreisen entgegen wirken. Tab. IX, Fig. 36, zeigt den ideellen Wagen und die ideelle Bahn.

Wir denken uns, dass der Wagen aus der Position D E A B in die Position $D_1\,E_1\,A_1\,B_1$ gelange, und nehmen an, dass die Widerstände, welche dabei die Laufwerke verursachen, gerade so gross wären als in dem Falle, wenn man die Laufwerke auf folgende Weise aus den Positionen D E und A B in die Positionen $D_1\,E_1$ und $A_1\,B_1$ brächte.

Wir bringen das hintere Laufwerk aus der Lage D E in die Lage $D_1\,E_1$, indem wir es zuerst auf der Ebene um seine Spitze S herumrollen, bis der Punkt E nach einem gewissen Punkt G kommt, der in der Verlängerung von $D_1\,E_1$ liegt, drehen hierauf das

Laufwerk um eine durch G gehende vertikale Axe um den Winkel $SGD_1 = \varphi$, so dass die Axe des Laufwerkes die Richtung GD_1 erhält, und schieben es endlich nach dieser Richtung um GE_1 nach auswärts. Das Rollen des Laufwerkes um die Spitze des Laufkegels verursacht keinen Widerstand. Beim Drehen des Laufwerks um den Punkt G schleift das äussere Rad auf der Bahn fort ohne zu rollen; es muss also die Reibung überwunden werden, die dem Druck dieses Rades gegen die Bahn entspricht. Beim Hinausschleifen des ganzen Laufwerkes um die Weglänge GE_1 müssen die Reibungen beider Räder auf der Bahn überwunden werden.

Da wir voraussetzen, dass die Räder die richtige Conizität haben, so ist die Höhe T A des Laufkegels des vorderen Laufwerkes gleich dem Halbmesser des äussern Bahnkreises. Um also das vordere Laufwerk aus der Position A B in die Position $A_1 B_1$ zu bringen, haben wir nichts zu thun als es zuerst nach der Richtung A T um A H, d. h. in die Projection von AA_1 auf A T einwärts zu schieben, und es dann um die Spitze des Laufkegels herumzurollen, bis die Axe des Laufkegels in die Lage TA_1 kommt. Von diesen zwei Bewegungen erfordert nur die erstere, nämlich das Hereinschleifen, einen Kraftaufwand.

Die Fortbewegung des Wagens aus der Position DEAB in die Position $D_1 E_1 A_1 B_1$ erfordert also die Ueberwältigung dreier Reibungswiderstände, nämlich: 1) die mit Schleifen des äusseren Hinterrades verbundene Drehung des hinteren Laufwerkes aus der Position S G in die Position GD_1; 2) das Hinausschleifen des hinteren Laufwerkes um GE_1; 3) das Schleifen nach einwärts des vorderen Laufwerkes um A H.

Nennen wir:

- $2\,e_2$ die Spurweite der Bahn;
- $2\,\Delta$ die Entfernung der Axen der Laufwerke des Wagens;
- r die Halbmesser der mittleren Laufkreise der Räder;
- σ den Spielraum eines Rades;
- α die Conizität der Räder, d. h. den Winkel, den eine Seite des Radkegels mit seiner Axe bildet;
- R den mittleren Halbmesser der Bahnkrümmung;
- Q das Gewicht des ganzen Wagenbaues;
- f den Reibungscoeffizienten für das Schleifen der Räder auf der Bahn;
- K die Zugkraft, welche auf den Wagen wirken muss, um die Widerstände, die das Schleifen der Räder auf der Bahn verursacht, zu überwinden;
- ω den Centriwinkel, welcher der Fortbewegung des Wagens in der Bahn um DD_1 oder AA_1 entspricht;
- Θ den Winkel ESG, um welchen das hintere Laufwerk gerollt wird;
- φ den Winkel SGD_1, um welchen das hintere Laufwerk drehend geschleift wird.

Da wir annehmen, dass das hintere Laufwerk aus σ nach einwärts, das vordere Laufwerk aus σ nach auswärts verschoben sei, und dass die Conizität der Räder eine solche sei, dass sich bei dieser verschobenen Stellung des Wagens die Halbmesser der Laufkreise am vorderen Laufwerk direkt, am hinteren Laufwerk verkehrt wie die Bahnkreise verhalten: so sind die Höhen SE und TA der Laufkegel gleich dem äusseren Bahnhalbmesser $R + e_2$; es ist demnach $\Theta = \omega$, folglich: $\varphi = \Theta + \omega = 2\,\omega$. Die Wirkung, welche der mit Schleifen des äusseren Hinterrades verbundenen Drehung des hinteren Laufwerkes aus der Position SG in die Position GD_1 entspricht, ist demnach:

$$\frac{Q}{4} f\,.\,2\,e_2\;2\,\omega = Q\,f\,e_2\,\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Der Weg $E_1 G$, um welchen das hintere Laufwerk nach auswärts geschleift wird, ist nahe gleich $\overline{EE_1} \sin. \widehat{E_1 E G}$, oder nahe gleich:

$$(R - e_2)\,\omega \cdot \left(\frac{\varDelta}{R - e_2} - \frac{\sigma}{\varDelta}\right)$$

Die Wirkung, welche dem Hinausschleifen des hinteren Laufwerkes um $G E_1$ entspricht, ist demnach:

$$\frac{Q}{2} f (R - e_2)\,\omega \left(\frac{\varDelta}{R - e_2} - \frac{\sigma}{\varDelta}\right) = \frac{Q}{2} f\,\omega \left(\varDelta - \frac{\sigma (R - e_2)}{\varDelta}\right) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Weglänge $A H$, um welche das vordere Laufwerk nach einwärts geschleift wird, ist $\overline{AA_1} \sin. \widehat{A A_1 H}$ gleich oder nahe gleich:

$$(R + e_2)\,\omega \cdot \left(\frac{\varDelta}{R + e_2} + \frac{\sigma}{\varDelta}\right)$$

Die dieser Schleifung entsprechende Wirkung ist demnach:

$$\frac{Q}{2} f (R + e_2)\,\omega \left(\frac{\varDelta}{R + e_2} + \frac{\sigma}{\varDelta}\right) = \frac{Q}{2} f\,\omega \left(\varDelta + \frac{\sigma (R + e_2)}{\varDelta}\right) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Die Summe der drei Wirkungen (1), (2), (3) ist demnach:

$$Q f e_2 \omega + \frac{Q}{2} f\,\omega \left[\varDelta - \frac{\sigma (R - e_2)}{\varDelta}\right] + \frac{Q}{2} f\,\omega \left[\varDelta + \frac{\sigma (R + e_2)}{\varDelta}\right] = Q f\,\omega \left[e_2 + \varDelta + \frac{\sigma e_2}{\varDelta}\right]$$

oder auch, weil $\frac{\sigma}{\varDelta}$ eine kaum beachtenswerthe Grösse ist, gleich:

$$Q f\,\omega (e_2 + \varDelta) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Die Wirkung, welche die Zugkraft K entwickelt, wenn sie den Wagen um den Centriwinkel ω fortbewegt, ist aber $K \cdot R\,\omega$; man hat daher die Gleichheit:

$$K R\,\omega = Q f\,\omega (e_2 + \varDelta)$$

demnach:

$$K = Q f \frac{e_2 + \varDelta}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Dies ist also annäherd die Zugkraft, welche am Wagen wirken muss, um das Schleifen der Räder auf der Bahn, wenn sie gekrümmt ist, zu bewältigen. Ein enger Radstand, eine kleine Spurweite, eine schwache Bahnkrümmung und ein glitschriger Zustand der Schienen sind also für die Befahrung von Bahnkrümmungen hinsichtlich des Kraftaufwandes vortheilhaft.

Setzen wir beispielsweise für trockene Witterung $f = \frac{1}{3}$, und ferner $R = 200$, $2 e_2 = 1{\cdot}5$, $2 \varDelta_2 = 3^m$, so wird $K = \frac{Q}{266}$. Dieser Widerstand ist ungefähr gleich der Hälfte von demjenigen, der auf horizontaler gerader Bahn zu überwinden ist, kommt also kaum in Betrachtung gegen die Widerstände, welche die fast auf jeder Bahn vorkommenden Bahnsteigungen verursachen. Nicht der Widerstand, sondern die Gefahr des Ausgleisens bei grösserer Fahrgeschwindigkeit macht also stärkere Bahnkrümmungen unzulässig.

Conizitäten der Räder eines Wagens mit drei Axen.

Es sei Tab. XI, Fig. 41 ein Wagen mit drei Laufwerken. Derselbe sei so auf die Bahn gestellt, dass sowohl das vordere als auch das hintere Laufwerk um den Spielraum σ nach aussen verschoben ist. A und A_1 sind die Axenmittel dieser Laufwerke. O der Mittelpunkt der Bahnkrümmung. $O D_1 C_1 E_1 B_1$ eine auf $A A_1$ senkrechte, mithin $A A_1$ in C_1 halbirende Linie. Nennt man r_1 für das hintere, r_3 für das vordere Laufwerk den Halbmesser des mittleren Laufkreises, α_1 für das hintere, α_3 für das vordere Laufwerk die richtige Conizität, so hat man zunächst zur Bestimmung dieser Conizitäten

$$\frac{r_1 + \sigma \operatorname{tang.} \alpha_1}{r_1 - \sigma \operatorname{tang.} \alpha_1} = \frac{R + e_2}{R - e_2}$$

$$\frac{r_3 + \sigma \operatorname{tang.} \alpha_3}{r_3 - \sigma \operatorname{tang.} \alpha_3} = \frac{R + e_2}{R - e_2}$$

und hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang.} \alpha_1 &= \frac{r_1 e_2}{R \sigma} \\ \operatorname{tang.} \alpha_3 &= \frac{r_1 e_2}{R \sigma} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es ist nun die Frage, welches die richtige Conizität des mittleren Laufwerkes ist, wenn seine Axe von der Axe des hinteren Laufwerkes um δ entfernt ist. Die richtige Conizität des mittleren Laufwerkes muss von der Art sein, dass sich die Halbmesser der den Punkten B und D entsprechenden Laufkreise ebenfalls wie die Bahnkreise verhalten. Diese Conizität fällt je nach Umständen positiv oder negativ aus, kann aber, wie wir später sehen werden, nie gleich Null werden. Bei den in der Figur gewählten Verhältnissen zwischen den Abmessungen der Bahn und des Wagens wird sie negativ. Nennen wir r_2 den Halbmesser der mittleren Laufkreise des inneren Laufwerkes, α_2 die Conizität der Räder dieses Laufwerkes, 2Δ die Entfernung der Axen des vorderen und hinteren Laufwerkes, R den mittleren Bahnhalbmesser, $2 e_2$ die Spurweite, und fällen aus den Punkten $E_1\ B_1\ C_1\ D$ auf $O B_1$ die Perpentikel $B B_1$, $E E_1$, $C C_1$, $D D_1$, so ist:

$$\overline{OB_1} = \sqrt{(R + e_2)^2 - (\Delta - \delta)^2}$$

$$\overline{OE_1} = \sqrt{(R + e_2)^2 - \Delta^2}$$

$$\overline{OC_1} = \sqrt{(R + e_2)^2 - \Delta^2} - (e_2 - \sigma)$$

$$\overline{OD_1} = \sqrt{(R - e_2)^2 - (\Delta - \delta)^2}$$

Es ist demnach:

$$\left.\begin{aligned} \overline{CB} &= \overline{C_1 B_1} = \sqrt{(R + e_2)^2 - (\Delta - \delta)^2} - \sqrt{(R + e_2)^2 - \Delta^2} + (e_2 - \sigma) \\ \overline{CD} &= \overline{C_1 D_1} = \sqrt{(R + e_2)^2 - \Delta^2} - (e_2 - \sigma) - \sqrt{(R - e_2)^2 - (\Delta - \delta)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Nun ist der Halbmesser des Laufkreises, der dem Punkt B entspricht $r_2 + (\overline{BC} - e_2) \operatorname{tang.} \alpha_2$ und der Halbmesser des Laufkreises, der dem Punkt D entspricht gleich $r_2 - (e_2 - \overline{CD}) \operatorname{tang.} \alpha_2$ man hat daher:

$$\frac{r_2 + (\overline{B\,C} - e_2)\ \text{tang.}\ \alpha_2}{r_2 - (e_2 - \overline{C\,D})\ \text{taug.}\ \alpha_2} = \frac{R + e_2}{R - e_2}$$

Hieraus folgt:

$$\text{tang.}\ \alpha_2 = \frac{2\, r_2\, e_2}{(\overline{B\,C} - \overline{C\,D})\, R + e_2\left[2\, e_2 - (\overline{B\,C} + \overline{C\,D})\right]} \quad \text{. (3)}$$

Da $\Delta - \delta$ und Δ gegen $R + e_2$ und $R - e_2$ kleine Grössen sind, so folgt aus den Ausdrücken (2), dass annähernd ist:

$$\overline{B\,C} = -\frac{1}{2}\,\frac{(\Delta - \delta)^2}{R + e_2} + \frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{R + e_2} + e_2 - \sigma$$

$$\overline{C\,D} = -\frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{R + e_2} + \frac{1}{2}\,\frac{(\Delta - \delta)^2}{R - e_2} + e_2 + \sigma$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck (3), so findet man:

$$\text{tang.}\ a_2 = \frac{2\, r_2\, e_2}{\Delta^2\,\frac{R}{R + e_2} - (\Delta - \delta)^2\,\frac{R^2 + e^2}{R^2 - e^2} - 2\,\sigma\, R} \quad \text{. (4)}$$

oder auch, weil $\frac{R}{R + e_2}$ und $\frac{R^2 + e^2}{R^2 - e^2}$ nur um sehr wenig von der Einheit verschieden sind:

$$\text{tang.}\ \alpha_2 = \frac{2\, r_2\, e_2}{\Delta^2 - (\Delta - \delta)^2 - 2\, R\, \sigma} \quad \text{. (5)}$$

Da wir uns zur Herleitung dieser Formel einer Figur bedient haben, in welcher die Conizität der inneren Räder jener der äusseren Räder entgegengesetzt ist, so ist die Conizität der inneren Räder jener der äusseren entgegengesezt, wenn $\text{tang.}\ \alpha_2$ positiv ausfällt, dagegen übereinstimmend, wenn $\text{tang.}\ \alpha_2$ negativ wird. Die Conizität der inneren Räder wird niemals gleich Null, oder diese Räder werden niemals cylindrisch; denn der Zähler des Ausdruckes (4) hat immer einen endlichen positiven Werth, und der Nenner bleibt immer endlich, so lange R nicht unendlich ist. Der Uebergang aus den positiven Werthen von $\text{tang.}\ \alpha_2$ in die negativen geht durch Unendlich, woraus man erkennt, dass die richtige Conizität der Räder nicht unter allen Umständen realisirbar ist. Die richtige Conizität der mittleren Räder kann auch sehr leicht durch Construktion auf folgende Art gefunden werden:

Man verlängere die Axenrichtung $B\,D$, mache $B\,O_1 = R + e_2$, verbinde b und b_1 mit O_1, errichte in D auf $B\,O_1$ eine Senkrechte, bis die Linien $b\,O_1$ und $b_1\,O_1$ geschnitten werden, mache $\overline{Cm} = \overline{CD}$, $m\,a = m\,a_1 = D\,d$, so ist $b\,b_1\,a\,a_1$ der Radkegel des äussern der mittleren Räder. In dem Falle wenn $\overline{C\,B}$ gleich $\overline{C\,D}$ ist, fällt die Linie $a\,a_1$ auf $b\,b_1$, wird demnach die Conizität unendlich gross, oder wird $\text{tang.}\ \alpha_2 = \infty$. In der Zeichnung würde dies geschehen, wenn die Axe $B\,C\,D$ die Lage $G\,F\,H$ hätte. Auf ähnliche Weise findet man auch die Conizität der äusseren Räder durch Construktion.

Der Spielraum beträgt in der Regel nur 0.01 bis 0.015 Meter und darf höchstens 0.02 Meter betragen, weil sonst leicht eine schlängelnde Bewegung der Wägen zwischen den Schienen eintreten könnte. Die Conizität darf nicht mehr als höchstens $\frac{1}{6}$ betragen, weil sonst die Schienen zu stark auseinander gedrängt würden. Damit also die Conizität der Räder eine praktisch realisirbare wird, muss man die in dem Ausdruck (5) erschei-

nenden Grössen so zu wählen suchen, dass der numerische Werth von $\tang. \alpha_2$ nicht grösser als $\frac{1}{6}$ wird. Das Beste ist aber, wenn man in der Mitte der Wägen, oder gegen die Mitte zu gar keine Räder anbringt, was wohl bei Transportwägen so wie bei Personenzug-Lokomotiven, bei Güterzug-Lokomotiven, die eine grössere Anzahl Räder erhalten, müssen, nicht möglich ist.

Zusammenhängung der Wägen.

Die Zusammenhängung der Wägen soll in der Weise geschehen, dass sich die Wägen auf geraden Bahnstrecken nicht leicht aus ihrer normalen Stellung verdrehen können, dass sie aber in Bahnkrümmungen nicht verhindert werden, in die für ihre Bewegung günstigste Stellung zu glangen.

Bringt man im Mittelpunkt des Rahmenbaues eines jeden Wagens einen vertikalen Zapfen an, und verbindet je zwei aufeinander folgende Zapfen der Wagenreihe durch Stangen oder Stangenketten, so hat man eine Zusammenhängung, welche die Wägen, wenn sie durch Krümmungen laufen, nicht verhindert in ihre zweckmässigsten Stellungen zu gelangen; allein in geraden Bahnstrecken gestattet diese Zusammenhängung, dass sich jeder Wagen um seinen Mittelpunkt drehen, dass also eine merkliche schlängelnde Bewegung eintreten kann. Werden die Wägen an den Bufferbalken mit geeigneten Gliederungen zusammengehängt, so wird jeder Wagen, wenn der Zug auf einer geraden Bahnstrecke fährt, durch die in den Zusammenhängungen herrschenden Spannungen nach der Richtung der Bahn gestrekt, die Wägen können also nicht leicht in eine schlängelnde Bewegung gerathen, sie können sich aber, wenn die Zusammenhängung richtig gemacht wird, in Krümmungen in die richtige Stellung begeben. Diese Zusammenhängung, bei welcher die Wägen gleichsam die Glieder einer Kette bilden, ist also der ersteren, bei welcher die Mittelpunkte der Wägen an eine Kette gehängt sind, vorzuziehen.

Um zwei Wägen, die ungleich grosse Radstände haben, vermittelst eines vertikalen Bolzens so aneinander zu hängen, dass sie beide in Bahnkrümmungen ungezwungen die richtige Stellung annehmen können, müssen die Entfernungen dieses Bolzens von den Mittelpunkten der Wägen ein gewisses Verhältniss haben, das sich durch Construktion und durch Rechnung leicht bestimmen lässt.

Es sei Tab. XI, Fig. 42 A der Mittelpunkt des kürzeren, A_1 der Mittelpunkt des längeren Wagens. Errichtet man in A und A_1 Perpentikel auf die Bahnradien A O und A_1 O so scheiden sich diese Linien in einem Punkt C und dieser ist offenbar der richtige Zusammenhängungspunkt.

Nennen wir 2Δ und $2\Delta_1$ die Radstände der Wägen, d. h. die Entfernungen der äussersten Axen der Wägen. $AC = x$, $A_1 C = x_1$, ferner $x + x_1 = \delta$, die Entfernung der Mittelpunkte der Wägen, wenn sie auf einer geraden Bahn stehen, $2e_2$ die Spurweite, R den mittleren Bahnhalbmesser, σ σ_1 die Spielräume der Räder zwischen den Schienen und nehmen an, dass jeder Wagen um den Spielraum seiner Räder nach aussen verschoben ist, so ist zunächst:

$$\overline{OA} = R - \frac{\Delta^2}{2R} + \sigma$$

$$\overline{OA_1} = R - \frac{\Delta_1^2}{2R} + \sigma_1$$

Wir erhalten nun ferner, weil $\overline{OC}$ die gemeinschaftliche Hypothenuse der Dreiecke ACO und A_1CO ist:

$$\sqrt{\left(R - \frac{\Delta^2}{2R} + \sigma\right)^2 + x^2} = \sqrt{\left(R - \frac{\Delta_1^2}{2R} + \sigma_1\right)^2 + x_1^2}$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit $x + x_1 = \delta$ folgt ganz streng:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\delta}{2} - \frac{\left(R - \frac{\Delta^2}{2R} + \sigma\right)^2 - \left(R - \frac{\Delta_1^2}{2R} + \sigma_1\right)^2}{2\delta} \\ x_1 &= \frac{\delta}{2} + \frac{\left(R - \frac{\Delta^2}{2R} + \sigma\right)^2 - \left(R - \frac{\Delta_1^2}{2R} + \sigma_1\right)^2}{2\delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Da jedoch $\frac{\Delta^2}{2R}$ σ $\frac{\Delta_1^2}{2R}$ σ_1 gegen R sehr kleine Grössen sind, so begeht man keinen merklichen Fehler, wenn man setzt:

$$\left(R - \frac{\Delta^2}{2R} + \sigma\right)^2 = R^2\left(1 - \frac{\Delta^2}{R^2} + \frac{2\sigma}{R}\right)$$

$$\left(R - \frac{\Delta_1^2}{2R} + \sigma_1\right)^2 = R^2\left(1 - \frac{\Delta_1^2}{R_2} + \frac{2\sigma_1}{R}\right).$$

und dann wird:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\delta}{2} - \frac{\Delta_1^2 - \Delta^2 + 2R(\sigma - \sigma_1)}{2\delta} \\ x_1 &= \frac{\delta}{2} + \frac{\Delta_1^2 - \Delta^2 + 2R(\sigma - \sigma_1)}{2\delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

oder endlich weil in der Regel die Spielräume von gleicher Grösse sind:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\delta}{2} - \frac{\Delta_1^2 - \Delta^2}{2\delta} \\ x_1 &= \frac{\delta}{2} + \frac{\Delta_1^2 - \Delta^2}{2\delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Diese Annäherungswerthe für x und x_1 sind von der Grösse des Bahnhalbmessers ganz unabhängig. Eine für einen gewissen Bahnhalbmesser absolut richtige Zusammenhängung zweier Wägen ist demnach auch für jede andere Krümmung beinahe richtig. Für $\Delta = \Delta_1$ und $\sigma = \sigma_1$ geben nicht nur die Annäherungsformeln (3), sondern auch die ganz strengen Ausdrücke (1) $x = x_1 = \frac{\delta}{2}$, wie es die Natur der Sache verlangt.

Diese Regel für die Zusammenhängung der Wägen im Allgemeinen gilt insbesondere für die Zusammenhängung des Tenders mit der Lokomotive. Sie ist bisher nicht beachtet

worden, nur die neueren Sömmering-Lokomotive machen in dieser Hinsicht eine Ausnahme, bei diesen ist der Tender mit der Lokomotive richtig zusammengehängt, und darauf beruht einer der Grundgedanken, durch welchen dieser Lokomotivbau entstanden ist.

Grösster zulässiger Druck eines Triebrades gegen die Bahn.

Der grösste Druck, den ein Triebrad gegen die Schienen ausüben darf, richtet sich theils nach den Querschnittsdimensionen der Schiene und der Constructionsart des Unterbaues, auf welchem die Schiene aufliegt, vorzugsweise aber nach dem Widerstand, den das Material der Radringe und der Schienen dem Aufrauhen oder Aufschiefern entgegensetzt, wenn die belasteten Triebräder auf den Schienen schleifen. Kennt man einmal den grössten Druck eines Rades gegen die Schiene, bei welchem noch kein Aufrauhen oder Aufschiefern der Schiene oder der Radkränze eintritt, so kann man dann den Querschnitt der Schiene nach statischen Regeln leicht so bestimmen, dass sie diesem Druck mit genügender Sicherheit zu widerstehen vermag. Es kommt also zunächst darauf an, diesen grössten Druck, bei dem die Schienen und die Räder an ihrer Oberfläche nicht angegriffen werden, wenn ein Schleifen eintritt, zu bestimmen. Dieser grösste Druck richtet sich aber theilweise nach der Grösse des Rades. Die Berührung des Radumfanges und der Schiene ist keine geometrische; an der Berührungsstelle wird der Radumfang abgeplattet und die Schiene eingedrückt; Radumfang und Schiene berühren sich also nicht in einem Punkt, sondern in einer Fläche, und die Intensität des wechselseitigen Druckes ist nach dem Quotienten aus der Grösse des Druckes und der Grösse der Berührungsfläche zu beurtheilen, und nach dieser Intensität ist die angreifende Wirkung, wenn ein Schleifen eintritt, zu bemessen.

Es sei Tab. IX, Fig. 37, AB die Oberfläche der Schiene, D_1 die Position des Rades, wenn es die Schiene nur geometrisch in E_1 berührt, DFEGD das in die Schiene eingedrungene von F bis G deformirte Rad.

Setzen wir $\overline{m_1 H_1} = \overline{E_1 m} = \xi$ $\overline{m_1 n_1} = v_1$ $\overline{m n} = v$, den Durchmesser des Rades gleich D, den absoluten Druck des Rades gegen die Schiene gleich $\mathfrak{P}$, ϱ und σ zwei Coeffizienten, durch welche die Zusammendrückbarkeit der Materiale, aus welchen das Rad und die Schiene bestehen, gemessen werden kann, $\overline{H_1 E_1} = e$ die ursprüngliche Höhe von dem Theil des Radumfanges, welcher durch den Druck deformirt wird.

Dies vorausgesetzt ist:

$$\overline{n_1 p_1}^2 = \xi^2 = \overline{E_1 p_1}\,(D - \overline{E_1 p_1})$$

Allein es ist $\overline{E_1 p_1}$ gegen D verschwindend klein, daher kann man schreiben: $\xi^2 = \overline{E_1 p_1}\,D$, und hieraus folgt: $\overline{E_1 p_1} = \frac{\xi^2}{D}$; demnach: $\overline{m_1 n_1} = e - \frac{\xi^2}{D}$. Die Stelle n_1 des Radumfangs wird um $\overline{m_1 n_1} - \overline{m n} = e - \frac{\xi^2}{D} - v$ zusammengedrückt. Die Intensität der zusammendrückenden Kraft kann der Zusammendrückung proportional gesetzt, kann also durch $\varrho\left(e - \frac{\xi^2}{D} - v\right)$ ausgedrückt werden. Die Schiene wird bei m um $\overline{m n} = v$ zusammengedrückt. Die entsprechende Intensität der zusammendrückenden Kraft kann also gleich σv gesetzt werden. Allein die wechselseitigen Pressungen bei n müssen gleich gross sein. Man hat daher:

$$\sigma v = \varrho\left(e - \frac{\xi^2}{D} - v\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dies ist die Gleichung der Kurve F E G. Der totale Druck längs der Fläche $\overline{FG}$ zwischen dem Rade und der Schiene muss gleich $\mathfrak{P}$ sein; man hat daher:

$$\mathfrak{P} = 2\int_0^K v\,\sigma\,d\xi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

wobei der Kürze wegen $\overline{F_1 H_1} = K$ gesetzt wurde; es ist demnach $K^2 = e\,(D - e)$, oder weil e gegen D verschwindend klein ist:

$$K^2 = e\,D \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Sucht man aus (1) den Werth von v und setzt ihn in die Gleichung (2), so findet man:

$$\mathfrak{P} = 2\,\frac{\sigma\varrho}{\sigma+\varrho}\int_0^K\left(e - \frac{\xi^2}{D}\right)d\xi$$

Mit Berücksichtigung von (3) gibt die Integration dieses Ausdruckes:

$$\mathfrak{P} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\varrho}}\,e^{\frac{3}{2}}\,D^{\frac{1}{2}}$$

und hieraus folgt:

$$e = \left\{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\varrho}\right)\right\}^{\frac{2}{3}}\frac{\mathfrak{P}^{\frac{2}{3}}}{D^{\frac{1}{3}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Nennt man endlich $\mathfrak{J}$ die Intensität der Pressung bei E, so ist dieselbe $\sigma\,\overline{EE_1}$; allein $\overline{EE_1}$ ist derjenige Werth von v, der sich aus (1) ergibt, wenn man in dieser Gleichung ξ gleich Null setzt; es ist demnach $\overline{EE_1} = e \cdot \frac{\varrho}{\sigma+\varrho}$, und man hat daher:

$$\mathfrak{J} = \sigma\,\overline{EE_1} = e\,\frac{\sigma\,\varrho}{\sigma+\varrho} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\varrho}\right)^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{\mathfrak{P}^{\frac{2}{3}}}{D^{\frac{1}{3}}}$$

und hieraus folgt:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{J}^{\frac{3}{2}}\,\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\varrho}}\sqrt{D}$$

und:

$$D = \frac{\mathfrak{P}^2}{\mathfrak{J}^3\left(\frac{4}{3}\right)^2\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\varrho}\right)} \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Da $\mathfrak{J}$ constant sein soll, σ und ϱ ebenfalls bestimmte, dem Schmiedeisen, aus welchem die Schienen und die Radumfänge bestehen, entsprechende Werthe haben, so kann man auch setzen:

$$\left.\begin{aligned} D &= \mathfrak{A}\,\mathfrak{P}^2 \\ \mathfrak{P} &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}}\sqrt{D} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wobei nun $\mathfrak{A}$ eine gewisse, am zweckmässisgten durch die Erfahrung zu bestimmende Constante bedeutet.

Die in neuester Zeit nach dem System von Herrn *Engerth* für die Sömmering-Bahn erbauten Lokomotive haben sehr stark belastete Axen. Die Räder dieser Lokomotive haben einen Durchmesser von 3·5 österreichischen Fuss oder von 1·1 Meter, und jedes der zwei vordersten Räder übt gegen die Bahn einen Druck von 122·7 österreichischen Centnern oder 6871 Kilogramm aus. Wenn wir diese Thatsache zur Bestimmung des Coeffizienten $\mathfrak{A}$ benützen, finden wir: $\mathfrak{A} = \frac{D}{\mathfrak{P}^2} = \frac{1\cdot1}{(6\cdot872)^2} = \frac{1}{43}$, und dann wird:

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{\mathfrak{P}^2}{43} \\ \mathfrak{P} &= 6\cdot6\sqrt{D} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Diese Formeln geben folgende numerische Resultate:

für D = 0·6	0·8	1·0	1·2	1·4	1·6	1·8	2 Meter
wird $\mathfrak{P}$ = 5·1	5·9	6·6	7·2	7·8	8·3	8·8	9·3 Tonnen.

Es scheint, dass diese Belastungen in der That die grössten sind, welche man zulassen darf, und die man nur in ausserordentlichen Fällen eintreten lassen soll. In allen gewöhnlicheren Fällen dürfte es angemessen sein, Räder von 1 Meter Durchmesser nicht stärker als mit 5 Tonnen zu belasten. Wenn wir diese Annahme zu Grunde legen, so wird:

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{\mathfrak{P}^2}{25} \\ \mathfrak{P} &= 5\sqrt{D} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

für D = 0·6	0·8	1·0	1·2	1·4	1·6	1·8	2 Meter
wird $\mathfrak{P}$ = 3·87	4·47	5·00	5·48	5·92	6·33	6·71	7·07 Tonnen.

Bestimmen wir nun auch die Dimensionen, welche der Querschnitt einer Schiene erhalten muss, damit sie eine hinreichende respektive Festigkeit gewährt. Nehmen wir an, dass man sich für eine gewisse Querschnittsform der Schienen entschieden habe, so sind die Verhältnisse aller Abmessungen des Querschnitts vollkommen bestimmt, und jede einzelne Dimension des Querschnittes kann als ein Vielfaches oder als ein aliquoter Theil der Schienenhöhe, die wir mit h bezeichnen wollen, ausgedrückt werden, und dann kommt es nur auf den absoluten Werth von h an, um auch alle übrigen Dimensionen des Querschnittes mit jeder wünschenswerthen Schärfe bestimmen zu können. Aus den bekannten Formeln über die Festigkeit der Materialien folgt aber, dass das Brechungsmoment einer solchen Schiene dem Kubus der Schienenhöhe h proportional ist. Anderseits ist aber dieses Brechungsmoment auch dem Produkt $\mathfrak{P}\,l$ proportional zu setzen, wobei $\mathfrak{P}$ den Druck bezeichnet, welcher gegen die Schiene ausgeübt wird, und l die Entfernung zweier

unmittelbar auf einander folgenden Schienenstühle ausdrückt. Wir können daher schreiben: $h^3 = \sqrt[3]{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{P}\,l$, und daraus folgt:

$$h = \mathfrak{A} \sqrt[3]{\mathfrak{P}\,l} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

wobei $\mathfrak{A}$ eine Constante bezeichnet, die von der Querschnittsform, nicht aber von der Querschnittsgrösse abhängt.

Beträgt die Entfernung der Querschwellen 1 Meter und der Druck eines Rades gegen die Bahn 5 Tonnen, so leistet eine Schiene von I förmigem Querschnitt hinreichenden Widerstand, wenn sie eine Höhe von 0·14 Metern hat und jeder Meter Schienenlänge 42 Kilogramm wiegt. Vermittelst dieser Erfahrungsdaten gibt der Ausdruck (9), wenn man in denselben $h = 0{\cdot}14$, $\mathfrak{P} = 5$, $l = 1$ setzt, $\mathfrak{A} = 0{\cdot}082$. Wir erhalten daher zur Bestimmung der Schienenhöhe den Ausdruck:

$$h = 0{\cdot}082 \sqrt[3]{\mathfrak{P}\,l} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

wobei h und l in Metern, $\mathfrak{P}$ in Tonnen zu 1000 Kilogramm auszudrücken sind.

Stabilität der Wagenbewegung.

Die Wägen sollten sich, um ihrem Zweck ganz vollkommen zu entsprechen, ganz geschmeidig, d. h. in einer solchen Weise längs der Bahn hinbewegen, dass jeder beliebige Punkt des Wagenbaues, so wie jeder Punkt der fortzuschaffenden Körper, eine mit der Axenlinie der Bahn parallele Kurve beschreiben würde, in welchem Falle die Bewegung für die Personen gar nicht spürbar wäre. Allein in solcher Weise erfolgt die Bewegung nicht, sondern der auf den Federn liegende Bau wogt beständig auf und nieder, wankt hin und her, neigt sich vor und zurück. Diese drei Bewegungen wollen wir das Wogen, Wanken und Nicken nennen. Die Gesetze, nach welchen diese Bewegungen erfolgen, werden wir in der Folge mit aller Schärfe kennen lernen, wenn wir die störenden Bewegungen der Lokomotive durch analytische Mittel untersuchen, einstweilen möge eine einfache Besprechung dieses Gegenstandes genügen.

Die Störungen in der Bewegung der Bahnwägen entstehen entweder direkt, oder indirekt durch die Einwirkung der Bahn auf die Räder. Die Schienen sind nie vollkommen glatt; ihre Verbindung unter einander, so wie auch ihr Aufliegen auf dem Unterbau ist nie fehlerfrei. Auch die Räder haben, wenn sie längere Zeit im Gebrauch waren mancherlei Unvollkommenheit an sich, sie sind dann nicht mehr glatt und nehmen insbesondere durch die ungleiche Elastizität, welche der Speichenbau verursacht, eine polygonale Form an. Diese Unvollkommenheiten der Bahn und der Räder machen, dass die Räder, während sie auf der Bahn fortrollen, fort und fort, insbesondere aber an den Schienenstössen in die Höhe geprellt werden und dadurch entsteht das Wanken, Wogen und Nicken und in Folge des Wankens auch noch ein Hin- und Herschlängeln der Wägen zwischen den Schienen. Das Wanken ist nämlich ein Hin- und Herpendeln des auf den Federn liegenden Baues um eine durch seinen Schwerpunkt gehende Längenaxe. So wie nun eine solche pendelnde Bewegung eintritt, fassen die Axengabeln die Axenbüchsen und suchen sie auf den Axen hin- und her zu schieben; da aber die Axenbüchsen nicht verschiebbar sind, so werden die Axen mit den Rädern zwischen den Schienen hin- und hergeschoben, und diese Bewegung in Verbindung mit der fortrollenden Bewegung der Räder bringt das Schlängeln hervor.

Es ist nun die Frage, was man zu thun hat, damit diese störenden Bewegungen in einem möglichst schwachen Grad eintreten? Natürlich, dass eine solide Anlage und

Ausführung des Bahnbaues, so wie eine sorgfältige Instandhaltung der Wägen die erste und wichtigste Bedingung ist. Allein damit ist noch nicht alles gethan, sondern es hängt auch sehr viel von der Construktionsart der Wägen ab, und in dieser Hinsicht mögen folgende Bemerkungen zur Aufklärung der Sache dienen.

Zunächst ist klar, dass die störenden Oscillationen von dem Starrheitsgrad der Federn abhängen. Starre Federn verursachen schnell auf einander folgende Oscillationen von geringer Ausdehnung, bringen also harte Erschütterungen hervor. Weiche Federn verursachen langsam erfolgende Oscillationen von grösserer Ausdehnung. Es ist selbstverständlich, dass nur durch die Erfahrung derjenige Starrheitsgrad der Federn bestimmt werden kann, bei welchem die nachtheiligen Folgen der störenden Bewegungen am kleinsten ausfallen.

Das Wogen ist von der Bauart der Wägen ganz unabhängig und richtet sich auf einer Bahn von gewisser Beschaffenheit nur allein nach dem Starrheitsgrad der Federn und dem Gewicht des auf den Federn liegenden Baues.

Das Wanken hängt wesentlich theils von der Spurweite, theils von der Höhe des Schwerpunktes über den Axen der Räder ab. Eine grosse Spurweite und eine möglichst tiefe Lage des Schwerpunktes schützen gegen das Wanken, und folglich auch gegen die durch das Wanken entstehende schlängelnde Bewegung.

Das Nicken hängt ab von der Anzahl, der Entfernung und Belastung der Axen. Ein grosser Radstand, eine starke Belastung der äusseren Axen und eine schwache Belastung der inneren Axen, wenn welche vorhanden sind, schwächen das Nicken. Am besten ist es aber, gar keine mittleren Axen anzuwenden, sondern die Wägen entweder nur mit zwei weit auseinander gestellten Axen, oder mit zwei weit auseinander gestellten vierräderigen Laufwerken zu versehen. Die Stabilität der Bewegung in geraden Bahnstrecken verlangt also eine Radstellung, die für die Befahrung von Bahnkrümmungen nachtheilig ist, denn für Krümmungen ist eine enge Radstellung und eine schmale Spurweite günstig. Indessen Krümmungen sind doch nur Ausnahmen und die Widerstände, welche Krümmungen verursachen, sind in Vergleich mit denen der Steigungen von keiner grossen Bedeutung; es ist daher angemessen, die Wägen auf Stabilität zu bauen. Am besten entspricht man jedenfalls sowohl den Bedingungen der Stabilität, als auch jenen der Krümmungen durch zwei weit auseinander gestellte, gegen einander verstellbare vierräderige Laufwerke, d. h. durch die amerikanische Construktion der sogenannten Salonwägen. Allein eine Bahn mag noch so gut gebaut sein und die Wägen mögen den Bedingungen der Stabilität noch so gut entsprechen, so gibt es doch Verhältnisse, unter welchen sehr heftige störende Bewegungen eintreten können. Dies geschieht nämlich, wie wir in der Folge nachweisen werden, wenn die Zeit einer Wogung, oder die Zeit einer Wankung, oder endlich wenn die Zeit einer Nickung genau mit der Zeit übereinstimmt, in welcher die Lokomotive eine Schienenlänge durchläuft; denn in jedem dieser drei Fälle summiren sich die störenden Wirkungen, welche durch die Stösse an den Schienenverbindungen hervorgebracht werden, und je nachdem die erste, oder die zweite, oder die dritte der genannten Schwingungszeiten mit der Zeit übereinstimmt, in welcher die Lokomotive über eine Schiene läuft, wird im ersten Falle das Wogen, im zweiten das Wanken, im dritten das Nicken allmählig stärker und stärker. Damit eine solche Ansammlung der störenden Einwirkungen nicht eintreten kann, muss die Länge einer Schiene so gross sein, dass die Zeit, welche die Lokomotive braucht um eine Schiene zu überlaufen, selbst bei ihrer grössten Fahrgeschwindigkeit grösser ist, als die grösste der drei Schwingungszeiten, welche dem Wanken, Wogen und Nicken entsprechen.

Sehr lange Schienen sind also nicht blos desshalb vortheilhaft, weil dadurch die Anzahl der Schienenverbindungen und mithin die Anzahl der störenden Einwirkungen vermindert wird, sondern man schützt sich zugleich durch lange Schienen gegen die

Ansammlung der störenden Bewegungen. Auch wäre es in dieser Hinsicht gut, wenn die Längen der einzelnen Schienen ungleich wären und die Bewegung der Lokomotive nicht mit Gleichförmigkeit erfolgte

Die Spurweite der Bahnen.

Obgleich der Bau der Lokomotive und nicht der Bau der Eisenbahnen im Allgemeinen der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist, so scheint es doch nothwendig zu sein, den Bau der Eisenbahnen so weit zu berühren, als derselbe mit dem Bau der Lokomotiven in näherem Zusammenhang steht.

Die Eisenbahnen und Lokomotiven sind zusammen entstanden. Zu der Zeit als dies geschah, hatte man natürlich weder von dem Eisenbahnwesen, noch von dem Lokomotivbau eine gründlichere Einsicht. Dass man Krümmungen und Steigungen möglichst vermeiden, also die Bahnen so gerade und eben als möglich anlegen solle, konnte gleich von vornherein, ohne viele Erfahrungen erkannt werden. Anders verhielt es sich schon hinsichtlich der Spurweite. Ueber diese waren die Ansichten sehr getheilt, und es entstunden, insbesondere in England, Bahnen von sehr abweichenden Spurweiten. Später stellte man sich kaum mehr die Frage, welche Spurweite in technischer Hinsicht die bessere sei; es hatte sich nun einmal eine zimlich schmale Spurweite sehr allgemein verbreitet, und diese wurde die Regel für alle später erbauten Bahnen, indem man in dem Maase, als sich die Bahnen allgemein verbreiteten, die Nothwendigkeit einer übereinstimmenden Spurweite mehr und mehr erkannte.

Da nun gegenwärtig die Spurweiten der meisten Bahnen übereinstimmen, so scheint es beinahe zwecklos, oder wenigstens nicht zweckmässig zu sein, die alte Frage über die technisch zweckmässigste Spurweite neuerdings in Anregung zu bringen. Allein wenn man bedenkt, dass sich die Anforderungen, welche durch den Verkehr an die Eisenbahnen gestellt werden, immer mehr und mehr steigern, so könnte es am Ende doch noch dahin kommen, dass man die jetzt allgemein übliche Spurweite verlassen würde, wenn durch eine andere Spurweite wesentliche Vortheile erreicht werden könnten, und das ist es, was wir nun untersuchen wollen.

Für die kleineren Detail- und Verbindungsbahnen ist die jetzt übliche Spur allerdings ganz genügend. Die Lasten, welche auf derlei Bahnen fortgeschafft werden, sind nicht bedeutend und die Geschwindigkeiten, die da verlangt werden, sind nur mässig, auch ist die dem Verkehr genügende Zahl der täglichen Züge nicht gross.

Anders verhält es sich bei Hauptbahnen, insbesondere wenn sie auf ungünstigem Terrain zu führen sind, wo starke Steigungen und rapide Krümmungen nicht vermieden werden können.

Auf diesen Hauptbahnen, die grössere Städte zu verbinden und gleichsam dem Weltverkehr zu dienen haben, ist bereits das Bestreben nach einem möglichst raschen Personenverkehr faktisch eingetreten; und die Techniker werden sich mehr und mehr veranlasst sehen, die Mittel ausfindig zu machen, durch welche die Fahrgeschwindigkeit auf's äusserste gesteigert werden kann, so weit es die Sicherheit nur immer zulässt.

Ueberdies sind die auf diesen Hauptbahnen fortzuschaffenden Lasten bedeutend, und nimmt die für den Verkehr nothwendige Zahl der täglichen Züge immer mehr zu. Alle Umstände weisen demnach darauf hin, dass in der Folge auf den Hauptbahnen den Verkehrsverhältnissen nur durch sehr mächtige Lokomotive Genüge geleistet werden kann; die Lokomotive, obgleich sie jetzt schon ungefähr fünfmal so schwer sind, als sie ursprünglich waren, haben also das Ziel ihrer Grösse und Gewalt noch nicht erreicht.

Für die Construktion von so mächtigen Lokomotiven ist aber die jetzt bestehende schmale Spurweite ein grosser Uebelstand. Die Kessel müssen unverhältnissmäsig lang

gemacht werden, was zur Folge hat, dass die Radstellung sehr gross ausfällt, und dass die Feueranfachung sehr erschwert wird. Auch ist eine so schmale Spurweite für die Stabilität der Bewegung, durch welche die Laufgeschwindigkeit bedingt ist, sehr ungünstig.

Es ist sehr zu bedauern, dass die schmale Spur von 1.45 Meter Weite beinahe allgemein geworden ist. Zu einer Aenderung derselben wird man sich kaum mehr entschliessen, denn die Kosten eines solchen Umbaues aller Bahnen, aller Lokomotive und Wägen sind zu gross, und die unvermeidlichen Störungen im Verkehr während eines solchen Umbaues wären äusserst lästig. Das ganze Eisenbahnwesen ist also mit einem Grundübel behaftet, das mit dem wachsenden Verkehr selbst fort und fort fühlbarer werden wird und leider kaum mehr beseitiget werden kann.

Zusammenstellung.

Wenn wir in Kürze die wesentlichsten Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchungen über die Bewegung der Wägen auf geraden und gekrümmten Bahnstrecken zusammenfassen, so erhalten wir für den Bau der Bahn und der Wägen folgende leitende Gesetze:

A. Hinsichtlich der Stabilität der Bewegung auf geraden Bahnstrecken ist vortheilhaft:
1. eine grosse Geleisweite;
2. ein grosser Radstand der Wägen;
3. Wägen mit zwei weit auseinander gestellten Axen, oder Wägen mit zwei weit auseinander gestellten, gegen einander beweglichen vierräderigen Laufwerken;
4. ein geringer Spielraum der Räder zwischen den Schienen;
5. eine schwache Conizität der Räder;
6. eine niedrige Lage des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues;
7. sehr lange Bahnschienen;
8. eine Zusammenhängung der Wägen, bei welcher sie selbst die Glieder einer Kette bilden.

B. Für die Befahrung von Bahnkrümmungen ist vortheilhaft:
1. eine enge Geleisweite;
2. ein enger Radstand und keine Mittelräder;
3. Wägen mit weit auseinander gestellten, gegen einander beweglichen vierräderigen Laufwerken;
4. schwache Bahnkrümmungen;
5. eine angemessene Conizität der Räder und insbesondere der Lokomotivräder;
6. eine angemessene Höherlegung der äusseren Schienen;
7. eine engemessene Geleiserweiterung;
8. eine mässige Fahrgeschwindigkeit.

III.

Die Dampfbildung.

Temperatur, Spannkraft und Dichte der Kesseldämpfe.

Es gibt zweierlei Arten von Wasserdämpfen, die wir Kesseldämpfe und überhitzte Dämpfe nennen wollen. Unter den ersteren verstehen wir diejenigen Dämpfe, wie sie sich in einem Kessel bilden. Ihre charakteristische Eigenschaft ist, dass jede wenn auch noch so kleine Wärmeentziehung eine theilweise Condensation derselben zur Folge hat, woraus hervorgeht, dass diese Kesseldämpfe gerade nur so viel Wärme enthalten, als zu ihrem Bestehen absolut nothwendig ist.

Ueberhitzte Dämpfe nennen wir dagegen solche, die einen gewissen Wärmeverlust erleiden können, ohne dass eine Spur von Condensation eintritt. Diese Dämpfe entstehen, wenn man ein zuerst luftleer gemachtes Gefäss mit Kesseldampf füllt, und es dann auf irgend eine Weise mehr oder weniger erwärmt.

Wir messen: 1) die Temperatur des Dampfes vermittels eines Quecksilber-Thermometers mit hunderttheiliger Scala; 2) die Spannkraft durch den Druck des Dampfes auf einen Quadratmeter; 3) die Dichte durch das Gewicht eines Kubikmeters Dampf.

Temperatur, Spannkraft und Dichte der Kesseldämpfe stehen in einer ganz bestimmten Beziehung zu einander, so dass eine Aenderung einer dieser drei Grössen auch Aenderungen der beiden andern zur Folge hat.

Um diese Beziehungen ausfindig zu machen, sind vielfältige sehr genaue Versuche angestellt worden, deren numerische Resultate in nachstehender Tabelle zusammengestellt sind:

Temperatur, Spannkraft und Dichte der Kesseldämpfe.

Temperatur der Dämpfe. 100theiliges Quecksilber-Thermometer.	Spannkraft der Dämpfe in Atmosphären.	Druck der Dämpfe auf 1 Quadratmeter.	Gewicht eines Kubikmeters Dampf.	Volumen von 1 Kilogramm Dampf.
Grad.	Atmosph.	Kilog.	Kilog.	Kubikmeter.
50	0·116	1205	0·0797	12·547
55	0·149	1544	0·1005	9·951
60	0·191	1965	0·1260	7·936
65	0·240	2482	0·1568	6·377
70	0·301	3112	0·1932	5·176
75	0·373	3963	0·2433	4·110
80	0·463	4783	0·2892	3·458
85	0·568	5865	0·3497	2·859
90	0·691	7136	0·4196	2·383
95	0·835	8617	0·4998	2·001
100	1·00	10330	0·5913	1·691
112·2	1·50	15490	0·8583	1·165
121·4	2·00	20660	1·1177	0·895
128·8	2·50	25820	1·3711	0·720
135·1	3·00	30990	1·6200	0·617
140·6	3·50	36150	1·8647	0·536
145·4	4·00	41320	2·1072	0·474
149·06	4·50	46480	2·3495	0·426
153·08	5·00	51650	2·5860	0·386
156·80	5·50	56810	2·8196	0·355
160·20	6·00	61980	3·0520	0·328
163·48	6·50	67140	3·2810	0·305
166·50	7·00	72310	3·5106	0·285
169·37	7·50	77470	3·7353	0·268
172·10	8·00	82640	3·9784	0·251
177·10	9·00	92970	4·4057	0·227
181·60	10·00	103350	4·8477	0·206
186·03	11·00	113630	5·2807	0·189
190·00	12·00	123960	5·7100	0·175
193·70	13·00	134290	6·1367	0·163
197·19	14·00	144620	6·5595	0·152
200·48	15 00	154950	6·9790	0·143
203·60	16·00	165280	7·3957	0·135
206·57	17·00	175610	7·8087	0·128
209·40	18·00	185940	8·2196	0·122
212·10	19·00	196270	8·6284	0·116
214·70	20·00	206600	9·0336	0·111

Für die Berechnung der mechanischen Wirkungen des Dampfes sind diese numerischen Resultate der Beobachtung noch nicht genügend, sondern man muss zu diesem Zwecke vorzugsweise noch folgende Dinge kennen:

1. die zur Bildung der Kesseldämpfe erforderlichen Wärmemengen;
2. eine möglichst einfache analytische Beziehung zwischen der Dichte und Spannkraft der Dämpfe;
3. das Verhalten des Kesseldampfes, wenn derselbe in einem vom Kessel gesonderten Gefäss einer Ausdehnung oder Zusammendrückung in der Weise ausgesetzt wird, dass dabei weder ein Gewinn noch ein Verlust an Wärme stattfindet;
4. das Verhalten des Kesseldampfes, wenn derselbe überhitzt und dann zusammengedrückt oder ausgedehnt wird. Auch ist es, wenn auch nicht nothwendig, aber doch wünschenswerth, eine analytische Bezeichnung zwischen Spannkraft und Temperatur der Kesseldämpfe zu kennen.

Ueber diese Verhältnisse haben die Versuche ziemlich sichere Aufschlüsse gegeben, die in dem nun Folgenden erklärt werden sollen.

Wärmemenge zur Erzeugung von 1 Kilogramm Dampf.

Die zur Bildung von 1 Kilogramm Dampf von t Grad Temperatur aus einem Kilogramm Wasser von 0 Grad Temperatur erforderliche Wärmemenge ist:

a. nach den Versuchen von *Watt*, *Parkes* und *Pambour* für Kesseldämpfe von jeder Spannkraft und Temperatur gleich 650 Wärmeeinheiten;
b. nach *Clement*'schen Versuchen gleich $550 + t$ Wärmeeinheiten;
c. nach neueren sehr genauen und zahlreichen Versuchen von *Regnault* $606 \cdot 5 + 0 \cdot 305\, t$ Wärmeeinheiten.

Es ist gegenwärtig allgemein anerkannt, dass die letztere dieser drei Regeln Resultate gibt, die der Wahrheit am nächsten kommen, aber gleichwohl werde ich mich in der Folge der ersteren bedienen, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Die Temperaturen der in den Lokomotiven wirksamen Dämpfe liegen zwischen 100 und 160° und innerhalb dieser Grenzen sind die numerischen Werthe, welche die Regeln von *Watt* und *Regnault* liefern, so wenig verschieden, dass die Differenzen bei derlei praktischen Rechnungen gar nicht in Betrachtung kommen.
2. Gewährt die *Watt*'sche Regel, nach welcher Kesseldämpfe von jeder Temperatur und Spannkraft die gleiche Wärmemenge enthalten, den Vortheil, dass manche Rechnungen viel einfacher werden, indem nach derselben die Temperatur des Dampfes, dessen Wärmegehalt bestimmt werden soll, nicht bekannt zu sein braucht.
3. Wenn man die *Watt*'sche Regel gelten lässt, werden die Kesseldämpfe von den überhitzten Dämpfen scharf geschieden. Nach der erstern dieser Regeln tritt bei der geringsten Wärmemenge, die man einem Kesseldampf entzieht, sogleich eine Condensation ein; nach der *Regnault*'schen Regel dagegen würde, wenn man einem Kilogramm Kesseldampf von 110° Temperatur 3 Wärmeeinheiten entzöge, keine Condensation eintreten, sondern es würde 1 Kilogramm Kesseldampf von 100° Temperatur entstehen.

Aus diesen Gründen werden wir in der Folge die *Watt*'sche Regel festhalten. Wir nehmen also an, dass 1 Kilogramm Wasser von 0° Temperatur 650 Wärmeeinheiten, und dass ein Kilogramm Wasser von t_0 Grad Temperatur $650 - t_0$ Wärmeeinheiten erfordern, um in Dampf von irgend einer Spannkraft und Temperatur verwandelt zu werden.

Zusammenhang zwischen Spannkraft und Temperatur der Kesseldämpfe.

Für die Berechnung der mechanischen Wirkungen des Dampfes kann man einen analytischen Ausdruck für den Zusammenhang zwischen Temperatur und Spannkraft der Dämpfe ganz entbehren; es genügen zu diesem Zwecke die durch Versuche aufgefundenen Zahlen, welche die Tabelle Seite 30 enthält. In *Pambour*'s „Traité des machines à vapeur" findet man Seite 48 die Mehrzahl der empirischen Formeln, durch welche die Abhängigkeit zwischen der Spannkraft p und der Temperatur t annähernd ausgedrückt werden kann, zusammengestellt. Ich beschränke mich darauf, die von *Arago* und *Dulong* aufgestellte Formel, die für Dampf von 4 bis 50 Atmosphären mit den Thatsachen nahe übereinstimmende Werthe gibt, hierher zu setzen. Diese Formel ist:

$$\left.\begin{array}{l} p = 10335\,[0{\cdot}28658 + 0{\cdot}0072003\,t]^{5} \\ \text{oder:} \\ t = 21{\cdot}9\,\sqrt[5]{p} - 39{\cdot}8 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Aus dieser Formel ersieht man noch deutlicher als aus der Tabelle (Seite 30), dass die Temperatur des Dampfes von hoher Spannung nur um wenig höher ist als die des Dampfes von mässiger Spannung.

Zusammenhang zwischen Spannkraft und Dichte der Kesseldämpfe.

Wenn man die Spannkräfte p der Kesseldämpfe als Abscissen und die denselben entsprechenden Dichten Δ als Ordinaten aufträgt, so erhält man eine Kurve, die zwar für kleinere Spannkräfte merklich gekrümmt ist, für grössere Spannkräfte über 3 Atmosphären dagegen beinahe eine gegen die Abscissenlinie geneigte gerade Linie bildet. Die Abhängigkeit zwischen p und Δ kann daher für Dämpfe über 3 Atmosphären Spannung mit einer für praktische Rechnungen hinreichenden Genauigkeit durch eine Formel von der Form

$$\Delta = \alpha + \beta\, p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

in welcher α und β constante Grössen sind, ausgedrückt werden. Die den Erfahrungsresultaten entsprechenden Werthe von α β und $\frac{\alpha}{\beta}$ sind:

$$\alpha = 0{\cdot}1427 \qquad \beta = 0.0000473 \qquad \frac{\alpha}{\beta} = 3017 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Da für Dämpfe über 3 Atmosphären Spannung der Werth von α gegen $\beta\,p$ eine kleine Grösse ist, so ist für höher gespannte Dämpfe die Dichte der Spannkraft annähernd proportional, es gilt also annähernd das *Mariott*'sche Gesetz. Die durch die Gleichung (2) ausgedrückte Regel stimmt aber auch für Dampf von 1 bis 3 Atmosphären mit den Thatsachen ziemlich gut überein und ist in ihrer Form beinahe so einfach als das *Mariott*'sche Gesetz, muss also diesem vorgezogen werden.

Das Verhalten des Kesseldampfes bei Volumen-Aenderungen ohne Wärmeverlust.

Wenn man ein zuerst luftleer gemachtes Gefäss, dessen Rauminhalt sich vergrössern oder verkleinern lässt, und dessen Wände von aussen so eingehüllt sind, dass durch dieselben Wärme weder eindringen, noch entweichen kann, mit Kesseldampf füllt, und sodann eine Volumen-Aenderung eintreten lässt, so wird bei diesem Vorgange sowohl die Dichte als auch die Spannkraft des eingeschlossenen Dampfes eine Aenderung erleiden. Allein da der eingeschlossene Dampf weder Wärme gewinnt noch verliert, und gerade so viel Wärme besitzt als zum Bestehen von Kesseldampf nothwendig ist, so unterliegt es wohl keinem Zweifel, dass sich die Spannung und Dichte des Dampfes nach dem durch die Gleichung (2) ausgedrückten Annäherungsgesetz ändern werden. Nennt man also das Volumen, die Dichte und Spannkraft des Dampfes für den anfänglichen Zustand $\mathfrak{B}$ $\varDelta$ p, für den veränderten Zustand $\mathfrak{B}_1$ $\varDelta_1$ p_1, so hat man, da das Gefäss in beiden Zuständen gleich viel Dampf enthält:

$$\mathfrak{B}\,(\alpha + \beta\, p) = \mathfrak{B}_1\,(\alpha + \beta\, p_1)$$

Es ist daher:

$$p_1 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_1}\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) - \frac{\alpha}{\beta} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Diese Formel findet ihre Anwendung bei expandirenden Dampfmaschinen. Die Dampfcylinder sind stets sorgfältig gegen Wärmeverluste geschützt und die Expansion erfolgt in so kurzer Zeit, dass auch aus diesem Grunde merkliche Wärmeverluste nicht eintreten können; man darf also annehmen, dass sich die Spannung des expandirenden Dampfes nach dem durch (4) ausgedrückten Gesetz ändert. Dieses Gesetz ist von dem *Mariott'*schen nur wenig verschieden, denn $\frac{\alpha}{\beta}$ ist im Vergleich mit p fast immer eine kleine Grösse, die beinahe vernachlässigt werden kann; es ist daher nahe: $p_1 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_1}\,p$ oder:

$$p_1 : p = \mathfrak{B} : \mathfrak{B}_1$$

d. h. die Dampfspannungen verhalten sich entsprechend dem *Mariott'*schen Gesetz nahe verkehrt wie die Volumina.

Condensation des Dampfes.

Füllt man ein Gefäss mit Kesseldampf und entzieht demselben hierauf eine gewisse Wärmemenge w, so wird ein Theil des Dampfes zu Wasser und der Rest wird zu Kesseldampf von geringerer Spannkraft und Temperatur.

Geschieht die Wärmeentziehung durch Abkühlung der Gefässwände, so findet man die im Gefäss nach geschehener Condensation herrschende Spannung auf folgende Weise.

Nennt man $\mathfrak{B}$ den Rauminhalt des Gefässes, p die Spannung vor, p_1 die Spannung nach geschehener Condensation, so sind $\mathfrak{B}\,(\alpha + \beta\, p)$ und $\mathfrak{B}\,(\alpha + \beta\, p_1)$ die Dampfmengen in Kilogrammen, welche das Gefäss vor und nach dem Akt der Condensation enthält, ist demnach $\mathfrak{B}\,(\alpha + \beta\, p) - \mathfrak{B}\,(\alpha + \beta\, p_1) = \mathfrak{B}\,\beta\,(p - p_1)$ die Dampfmenge, die zu Wasser von

t_1 Grad Temperatur condensirt wurde. Die dabei frei werdende Wärmemenge ist also $(650 - t_1) \mathfrak{B} \beta (p - p_1)$, man hat daher:

$$W = \mathfrak{B} \beta (p - p_1) (650 - t_1)$$

Wenn die Condensation erfolgt ist, haben Wasser und Dampf einerlei Temperatur, t_1 und p_1 stehen also in der Beziehung zu einander, die für Kesseldampf gilt.

Geschieht die Condensation durch Einspritzen von q Kilogramm Wasser von t_0 Grad Temperatur, so wird dieses bis zu t_1 Grad erwärmt, nimmt also eine Wärmemenge $q (t_1 - t_0)$ auf. Man hat daher:

$$q (t_1 - t_0) = \mathfrak{B} (p - p_1) (650 - t_1)$$

Setzt man das Gewicht des condensirten Dampfes gleich S, also:

$$\beta \mathfrak{B} (p - p_1) = S$$

so findet man aus der vorhergehenden Gleichung für die zur Condensation von S Kilogramm Dampf erforderliche Wassermenge q den Ausdruck:

$$q = S \frac{650 - t_1}{t_1 - t_0} \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

Das Verhalten von überhitztem Dampf.

Füllt man ein zuerst leer gemachtes Gefäss mit Kesseldampf, verschliesst es hierauf und erhöht sodann die Temperatur des eingeschlossenen Dampfes, so erhält man sogenannten überhitzten Dampf. Das Verhalten dieses Dampfes, wenn sein Volumen oder seine Temperatur geändert wird, stimmt mit dem Verhalten eines Gases unter ähnlichen Umständen vollkommen überein. Da wir jedoch in unseren Anwendungen nicht in den Fall kommen, die Wirkungen der überhitzten Dämpfe betrachten zu müssen, so unterlassen wir es, die Beziehungen, welche zwischen der Temperatur, Spannkraft und Dichte dieser Dämpfe bestehen, durch Formeln auszudrücken.

Dampfausströmung aus einem Gefäss.

Ein Gefäss A, welches Dampf von einer Spannkraft P enthält, comunizire durch eine Röhre B mit einem Raum C, in welchem Dampf oder Luft von einer Spannkraft p enthalten ist. Es sei $P > p$, was zur Folge haben wird, dass eine Strömung des Dampfes aus A durch B nach C stattfinden wird, und dass der Dampf durch die Mündung von B mit einer Spannung p in den Raum C mit einer gewissen Geschwindigkeit U einströmen wird, die auf folgende Weise berechnet werden kann:

In einem gewissen Querschnitt Ω der Röhre wird im Beharrungszustand der Bewegung eine gewisse Spannung y vorhanden sein. In einem um dx von dem ersteren abstehenden Querschnitt wird die Spannung $y - dy$ sein. Die zwischen diesen Querschnitten enthaltene Dampfmenge hat ein Gewicht $(\alpha + \beta y) \Omega dx$ und wird mit einer Kraft $y \Omega$ nach auswärts, mit einer Kraft $(y - dy) \Omega$ nach einwärts getrieben, wird demnach durch eine Kraft $(y - dy) \Omega - y \Omega = -\Omega dy$ beschleuniget. Die Gleichung der Bewegung dieser Dampfmenge ist demnach:

$$\frac{dv}{dt} = g \frac{-\Omega dy}{(\alpha + \beta y) \Omega dx} = g \frac{-dy}{(\alpha + \beta y) dx} \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

Das Differenzial dx kann beliebig gross genommen werden, es ist uns also erlaubt, es so gross zu machen als der Weg ist, den die zur Zeit t im Querschnitt Ω befindlichen Dampftheilchen im Zeitelement dt zurücklegen; man darf demnach $dx = v\,dt$ setzen und hiedurch verwandelt sich die Gleichung (6) in folgende:

$$v\,dv = g\,\frac{-dy}{\alpha + \beta y}$$

Durch Integration findet man hieraus:

$$\frac{v^2}{2g} = -\frac{1}{\beta}\ \text{lognat.}\ (\alpha + \beta y) + \text{const.}$$

Am Anfang der Röhre ist $y = P$ und wenn wir annehmen, dass das Gefäss A sehr weit ist $v = o$, wir erhalten daher:

$$o = -\frac{1}{\beta}\ \text{lognat.}\ (\alpha + \beta P) + \text{const.}$$

Am Ende der Röhre ist $y = p$ und $v = U$ demnach:

$$\frac{U^2}{2g} = -\frac{1}{\beta}\ \text{lognat.}\ (\alpha + \beta p) + \text{const.}$$

Die Differenz dieser zwei Gleichungen liefert eine neue Gleichung, aus welcher folgt:

$$U = \sqrt{\frac{2g}{\beta}\ \text{lognat.}\ \frac{\alpha + \beta P}{\alpha + \beta p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Hiedurch ist die Ausströmungsgeschwindigkeit berechnet. Da diese Gleichung den Querschnitt der Röhre und ihre Länge nicht enthält, so darf dieselbe auch dann gebraucht werden, wenn die Röhre äusserst kurz, oder wenn die Ausströmungsöffnung unmittelbar in der Gefässwand angebracht ist.

Die nachfolgende Tabelle gibt für verschiedene Werthe des Quotienten $\frac{\alpha + \beta P}{\alpha + \beta p}$ die entsprechenden Werthe von U.

$\frac{\alpha+\beta P}{\alpha+\beta p}$	U Meter.	$\frac{\alpha+\beta P}{\alpha+\beta p}$	U Meter.
1·1	135	3	460
1·2	187	4	516
1·3	225	5	556
1·4	254	6	587
1·5	279	7	612
1·6	300	8	640
1·7	319	9	650
1·8	336	10	666
1·9	351	11	679
2·0	365	12	691

Nennt man k den Contraktionscoeffizienten, welcher der Form der Ausströmungsöffnung entspricht, Q in Kilogrammen die in einer Sekunde ausströmende Dampfmenge, Ω den Querschnitt der Ausströmungsöffnung in Quadratmetern, so ist:

$$Q = k\,\Omega\,(\alpha + \beta\,p)\,U \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Durchgang der Wärme durch Gefässwände.

Voraussetzungen.

Wir wollen uns die Aufgabe vorlegen, die Wärmemenge zu bestimmen, die durch ebene, cylindrische und sphärische Gefässwände geht, wenn diese Wände mit Medien in Berührung stehen, die eine constante Temperatur haben.

Die Fortpflanzung der Wärme im Innern von starren Körpern wurde zuerst (1812) von *Fourier* *), später (1815) von *Poisson* **) untersucht. Ueber das Wesen der Wärme haben diese Geometer ihre Ansichten nicht ausgesprochen, sondern sie bauen ihre Theorien auf gewisse Voraussetzungen, und gelangen auf abweichenden analytischen Wegen zu übereinstimmenden Endresultaten, die innerhalb gewisser Grenzen durch die Erfahrung bestätiget worden sind.

Ich werde zur Lösung der oben gestellten speziellen Aufgaben den von *Fourier* und *Poisson* eingeschlagenen Wegen nicht folgen, sondern ziehe es vor, von zwei naturgemäss scheinenden Voraussetzungen auszugehen, durch welche man auf sehr einfache Weise ganz zu dem gleichen Resultate gelangt. Ich nehme an:

a. dass die Wärmemenge, welche durch die Oberfläche eines mit einem flüssigen Medium in Berührung stehenden festen Körpers in einer bestimmten Zeit eindringt, wenn die Temperatur des Mediums höher ist als die Temperatur des Köpers, oder aus dem Körper in das Medium entweicht, wenn seine Temperatur niedriger ist als die des Körpers, proportional sei 1) der Grösse der mit dem Medium in Berührug stehenden Oberfläche; 2) der Differenz der Temparaturen des Mediums und des Körpers an seiner Oberfläche; 3) der Zeit, während welcher die Wärmemittheilung stattfindet, vorausgesetzt, dass während derselben Aenderungen in den Temperaturen nicht eintreten; 4) einem gewissen Coeffizienten, dessen Werth von der Körpersubstanz, von der Beschaffenheit der Oberfläche des Körpers und von der Natur des Mediums abhängig ist.

Nennt man

Δ die Temperatur des Mediums;

t die Temperatur der Substanz des Körpers in der Nähe seiner Oberfläche;

F die Fläche, durch welche die Wärme geht;

W_1 die Wärmemenge, die in einer Zeiteinheit durch die Fläche F geht;

γ den Ein- oder Ausstrahlungscoeffizienten, so ist unter den ausgesprochenen Voraussetzungen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{wenn } t > \Delta \text{ ist, } W_1 = \gamma\,F\,(t - \Delta) \\ \text{wenn } \Delta > t \text{ ist, } W_1 = \gamma\,F\,(\Delta - t) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

*) Théorie de la chaleur, par *Fourier*.

**) Mémoire sur la distribution de la chaleur dans les corps solides, par *Poisson*. Journal de l'école polytechnique, cahier XIX.

Für $F = 1$, $t - \varDelta = 1$ wird $W_1 = \gamma$. Der Coeffizient γ drückt also die Wärmemenge aus, die in einer Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit bei einer Temperaturdifferenz von 1^0 eindringt.

b. Die Wärmefortpflanzung im Innern der Körper gründe ich auf folgende Betrachtung:

Es sei Ω ein kleines Flächenstückchen im Innern des Körpers, u die Temperatur in allen Punkten von Ω. Errichtet man in einem beliebigen Punkt A der Fläche Ω einen Perpentikel und schneidet auf demselben eine kleine Länge e ab, so kömmt man nach einem Punkt A_1, in welchem eine von u nur wenig verschiedene Temperatur u_1 stattfindet. Errichtet man in allen Punkten von Ω Perpentikel und sucht in denselben die Punkte auf, die eine Temperatur u_1 haben, so werden diese Punkte in einer kleinen Fläche Ω_1 liegen, die, wenn e und $u_1 - u$ sehr klein sind, als eine zu Ω parallele Fläche angesehen werden kann. Ich nehme nun an, dass wenn $u > u_1$ ist, von der Fläche Ω nach Ω_1 in einer Zeiteinheit eine Wärmemenge W_2 ströme, die der Fläche Ω und der Temperaturdifferenz $u - u_1$ direkt, der Entfernung e, den Flächen Ω und Ω_1 aber verkehrt proportioal ist, und setze desshalb:

$$W_2 = \lambda \frac{u - u_1}{e} \Omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Den Coeffizienten λ nenne ich den Wärmeleitungscoeffizienten. Für $u - u_1 = 1$ $\Omega = 1$ $e = 1$ gilt diese Formel $W_2 = \lambda$. Der Coeffizient λ ist also die Wärmemenge, die in der Zeiteinheit durch einen Stab geht, dessen Querschnitt gleich Eins und dessen Länge gleich Eins ist, wenn die Differenz der an den Enden des Stabes herrschenden Temperaturen Einen Grad beträgt. Ist e unendlich klein und bezeichnet man seinen Werth in diesem Fall mit $d\zeta$, so ist, wenn $u > u_1$ ist, $u - u_1 = -\frac{du}{d\zeta} d\zeta$; daher: $\frac{u - u_1}{e} = \frac{du}{d\zeta}$, und dann wird:

$$W_2 = -\lambda \Omega \frac{du}{d\zeta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Vermittelst dieser durch die Gleichungen (1) und (3) analytisch ausgedrückten Voraussetzungen lassen sich die von *Fourier* und *Poisson* durch ziemlich umständliche Betrachtungen aufgefundenen allgemeinen Differenzialgleichungen, welche die Wärmebewegung im Innern der Körper bestimmen, herleiten. Ich will jedoch diese Herleitung unterlassen, weil es mir nur darum zu thun ist, die oben gestellten speciellen Fragen zu beantworten, was vermittelst der Gleichungen (1) und (3) direkt geschehen kann.

Wärmemenge, die durch eine ebene Gefässwand von gleicher Dicke geht.

Es sei Tab. XVII, Fig. 73 A B C D eine ebene Gefässwand, die von zwei Medien berührt wird, deren Temperaturen unveränderlich $\varDelta_1$ und $\varDelta_0$ sind. Es sei $\varDelta_1 < \varDelta_0$, so dass die Wärme von A B nach C D geht. Wir setzen den Beharrungszustand der Wärmebewegung voraus, nehmen also an, dass sich die Temperatur irgend eines Punktes m mit der Zeit nicht ändert. Es sei t_1 die Temperatur der Wand längs A B, t_0 die Temperatur der Wand längs C D, u die Temperatur in der von A B um ζ abstehenden Ebene E F, e die Wanddicke oder die Entfernung der Ebenen A B und C D, γ_1 der Einstrahlungscoffiezient für den Eintritt der Wärme in A B, γ_0 der Ausstrahlungscoeffizient für den Austritt der Wärme aus C D, λ der Wärmeleitungscoefficient zur Bestimmung der Wärmefortpflanzung im Innern, F die Fläche, durch welche die Wärme einströmt, W die

Wärmemenge, welche im Beharrungszustand der Bewegung in jeder Zeiteinheit durch das Wandstück von der Grösse F geht.

Vermöge des durch (1) ausgedrückten Satzes ist die Wärmemenge, die in einer Zeiteinheit durch AB entströmt $F\gamma_1(\varDelta_1 - t_1)$, ist ferner die Wärmemenge, die in einer Zeiteinheit durch CD ausströmt $F\gamma_0(t_0 - \varDelta_0)$. Vermöge des durch die Gleichung (3) ausgedrückten Gesetzes, ist die durch die Fläche EF in eine Zeiteinheit gehende Wärmemenge $-\lambda F \frac{du}{d\zeta}$. Da im Beharrungszustand diese drei Wärmemengen gleich gross und gleich W sein müssen, so hat man:

$$W = F\gamma_1(\varDelta_1 - t_1) = F\gamma_0(t_0 - \varDelta_0) = -\lambda F \frac{du}{d\zeta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Aus der Gleichheit $F\gamma_1(\varDelta_1 - t_1) = -\lambda F \frac{du}{d\zeta}$ folgt durch Integration:

$$u = -\frac{\gamma_1(\varDelta_1 - t_1)}{\lambda}\zeta + \text{const.}$$

Es ist aber für $\zeta = o$ $u = t_1$, und für $\zeta = e$ $u = t_0$; demnach $t_1 = \text{const.}$ und $t_0 = -\frac{\gamma_1(\varDelta_1 - t_1)}{\lambda} e + \text{const.}$, folglich:

$$t_0 = t_1 - \frac{\gamma_1(\varDelta_1 - t_1)}{\lambda} e \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Auch ist:

$$u = t_1 - \frac{\gamma_1(\varDelta_1 - t_1)}{\lambda} \zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Aus dieser letzten Gleichung ersieht man, dass die Temperatur innerhalb der Wand von AB an bis CD hin gleichförmig abnimmt. Vermöge der Gleichheiten (4) hat man auch:

$$\gamma_1(\varDelta_1 - t_1) = \gamma_0(t_0 - \varDelta_0)$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit (5) findet man:

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= \frac{\frac{\varDelta_1}{\gamma_0} + \frac{\varDelta_0}{\gamma_1} + \frac{e}{\lambda}\varDelta_0}{\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{e}{\lambda}} \\ t_1 &= \frac{\frac{\varDelta_1}{\gamma_0} + \frac{\varDelta_0}{\gamma_1} + \frac{e}{\lambda}\varDelta_1}{\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{e}{\lambda}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Setzt man diesen Werth von t_1 in den Ausdruck $W = F\gamma_1(\varDelta_1 - t_1)$, so findet man:

$$W = F \frac{\varDelta_1 - \varDelta_0}{\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{e}{\lambda}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Hieraus sieht man, dass die in einer Zeiteinheit durch eine ebene Gefässwand gehende Wärmemenge der Fläche und der Temperatur-Differenz der Medien direkt, der

Wanddicke, aber nicht verkehrt proportional ist. Nur in dem Fall, wenn die Aus- und Einstrahlungs-Coeffizienten γ_1 und γ_0 ausserordentlich gross wären, so dass man $\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1}$ gegen $\frac{e}{\lambda}$ vernachlässigen dürfte, würde die Wärmemenge W der Wanddicke verkehrt proportional werden. Der Werth von W wird gross, wenn γ_0 γ_1 und λ grosse Werthe haben, d. h. wenn sowohl die Ein- und Ausstrahlung, als auch die Leitung leicht von Statten geht.

Wärmemenge, die durch eine Wand geht, welche aus mehreren sich berührenden Schichten von ungleichartigen Substanzen besteht.

Es sei Tab. XVII, Fig. 74:

$A_0 B_0 A_3 B_3$ eine aus drei Schichten gebildete Wand;
Δ_1 Δ_0 die Temperaturen der Medien, mit welchen die Wand in Berührung steht;
T_1 t_1 T_2 t_2 T_3 t_3 die Temperaturen an den Begränzungsflächen der Schichten;
γ_0 γ_1 γ_2 γ_3 die Wärmeübergangs-Coeffizienten an den Trennungsflächen $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ der Medien;
λ_1 λ_2 λ_3 die Wärmeleitungs-Coeffizienten für den Durchgang der Wärme durch die Schichten;
e_1 e_2 e_3 die Dicken der Schichten;
W die Wärmemenge, die in einer Zeiteinheit durch eine Fläche von der Ausdehnung F geht.

Dies vorausgesetzt, findet man nach den Grundsätzen, welche zu den Gleichungen (4) und (5) geführt haben, folgende Systeme von Gleichungen:

$$W = F\gamma_0(\Delta_1 - T_1) = F\gamma_1(t_1 - T_2) = F\gamma_2(t_2 - T_3) = F\gamma_3(t_3 - \Delta_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= T_1 - \frac{\gamma_0(\Delta_1 - T_1)e_1}{\lambda_1} \\ t_2 &= T_2 - \frac{\gamma_1(t_1 - T_2)e_2}{\lambda_2} \\ t_3 &= T_3 - \frac{\gamma_2(t_2 - T_3)e_3}{\lambda_3} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Aus den Gleichungen (9) folgt:

$$t_1 = T_2 + \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(\Delta_1 - T_1)$$

$$t_2 = T_3 + \frac{\gamma_0}{\gamma_2}(\Delta_1 - T_1)$$

$$t_3 = \Delta_0 + \frac{\gamma_0}{\gamma_3}(\Delta_1 - T_1)$$

Führt man diese Werthe von t_1 t_2 t_3 in die Gleichungen (10) ein, so findet man:

$$T_2 + \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(\Delta_1 - T_1) = T_1 - \frac{\gamma_0(\Delta_1 - T_1)e_1}{\lambda_1}$$

$$T_3 + \frac{\gamma_0}{\gamma_2}(\varDelta_1 - T_1) = T_2 - \frac{\gamma_0(\varDelta_1 - T_1)\, e_2}{\lambda_2}$$

$$\varDelta_0 + \frac{\gamma_0}{\gamma_3}(\varDelta_1 - T_1) = T_3 - \frac{\gamma_0(\varDelta_1 - T_1)\, e_3}{\lambda_3}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen findet man:

$$\varDelta_0 + \gamma_0\,(\varDelta_1 - T_1)\left[\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3}\right] = T_1 - \gamma_0\,(\varDelta_1 - T_1)\left[\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}\right]$$

und hieraus folgt:

$$T_1 = \frac{\varDelta_0 + \gamma_0\,\varDelta_1\left[\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3}\right] + \gamma_0\,\varDelta_1\left[\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_2}\right]}{1 + \gamma_0\left[\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}\right] + \gamma_0\left[\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3}\right]} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Vermöge der Gleichungen (9) ist aber $W = F\,\gamma_0\,(\varDelta_1 - T_1)$. Führt man in diesen Ausdruck für W den Werth von T_1, den die Gleichung (11) darbietet, ein, so findet man:

$$W = \frac{F\,(\varDelta_1 - \varDelta_0)}{\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Mit diesem Ausdruck kann die Wärmemenge beurtheilt werden, welche durch eine Kesselwand eindringt, wenn dieselbe auf der den Verbrennungsgasen zugewendeten Seite mit einer Oxyd-Schichte und mit einer Russ-Schichte, auf der dem Kesselwasser zugekehrten Seite dagegen mit einer Oxyd-Schichte und mit einer Kesselstein-Schichte belegt ist. Die ganze Wand, welche die Wärme zu durchdringen hat, besteht in diesem Fall aus 5 Schichten (Tab. XVII, Fig. 75); man hat daher vermöge (12):

$$W = \frac{F\,(\varDelta_1 - \varDelta_0)}{\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \ldots + \frac{1}{\gamma_5} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{e_5}{\lambda_5}} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Wir wollen diese Wärmemenge mit derjenigen vergleichen, die durch eine Metallwand von einer Dicke $\varDelta_3$ geht, wenn die Oberflächen derselben, wie es bei einem neuen Kessel der Fall ist, rein metallisch sind. Nennen wir zu diesem Behufe β_0 und β_1 die Coeffizienten für den Uebergang der Wärme aus Luft in Metall und aus Metall in Wasser, und W_1 die zu berechnende Wärmemenge, so ist:

$$W_1 = \frac{F\,(\varDelta_1 - \varDelta_0)}{\frac{1}{\beta_0} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{e_3}{\lambda_3}} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Aus (14) und (13) folgt:

$$\frac{W}{W_1} = \frac{\frac{1}{\beta_0} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{e_3}{\lambda_3}}{\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \ldots + \frac{1}{\gamma_5} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{e_5}{\lambda_5}} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Die Quotienten $\frac{1}{\gamma_0}\ \frac{1}{\gamma_1} \ldots\ldots \frac{1}{\gamma_5}$ drücken die Zeiten aus, in welchen durch eine Flächeneinheit bei einer Einheit der Temperatur-Differenz durch die Trennungsflächen der Schichten eine Wärmeeinheit durchgeht, und $\frac{e_1}{\lambda_1}\ \frac{e_2}{\lambda_2} \ldots\ldots \frac{e_5}{\lambda_5}$ sind die ähnlichen Zeiten für den Durchgang der Wärme durch die einzelnen Schichten. Die Nenner der Brüche (13) und (15) drücken also die Zeit aus, die vergeht, bis eine Wärmeeinheit durch alle die Wand bildenden Schichten geht, und folglich ist

$$\frac{1}{\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1}+\ldots+\frac{1}{\gamma_5}+\frac{e_1}{\lambda_1}+\frac{e_2}{\lambda_2}+\ldots+\frac{e_5}{\lambda_5}} = k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

die Wärmemenge, welche bei einer Temperatur-Differenz $\varDelta_1 - \varDelta_0$ von 1 Grad in einer Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit der Wand geht.

Die numerischen Werthe der Coeffizienten $\gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_5\ \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_5$ sind leider noch nicht durch Versuche oder durch Beobachtungen ausgemittelt worden, sondern man kennt nur annähernd die Werthe von k für mittlere Zustände der Heizapparate.

Für Dampfkessel, die sich in einem für den praktischen Gebrauch geordneten Zustand befinden, habe ich

$$k = \frac{1}{158} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

gefunden. Für Lufterhitzungsapparate, in welchen die eine Seite der Wand mit den Verbrennungsgasen, die andere Seite mit der zu erwärmenden Luft in Berührung steht, habe ich gefunden:

$$k = \frac{1}{253} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Aus der Gleichung (13) erkennt man, dass der Einfluss der Metalldicke e_3 der Kesselwand und des Leitungsvermögens λ_3 des Metalles immer mehr und mehr abnehmen, so wie die Russ-, Oxyd- und Kesselstein-Schichten mehr und mehr an Dicke gewinnen.

Wir können auch die grösste Temperatur des Metalles berechnen. Da das Metall die dritte Schichte ist, so ist die grösste Temperatur des Metalles T_3.

Nun hat man wie früher:

$$T_2 + \frac{\gamma_0}{\gamma_1}(\varDelta_1 - T_1) = T_1 - \frac{\gamma_0(\varDelta_1 - T_1)\, e_1}{\lambda_1}$$

$$T_3 + \frac{\gamma_0}{\gamma_2}(\varDelta_1 - T_1) = T_2 - \frac{\gamma_0(\varDelta_1 - T_1)\, e_2}{\lambda_2}$$

Durch Addition dieser Gleichungen folgt:

$$T_3 = T_1\, \gamma_0 \left(\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{e_1}{\lambda_1}+\frac{e_2}{\lambda_2}\right) - \varDelta_1\, \gamma_0 \left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_0}+\frac{e_1}{\lambda_1}+\frac{e_2}{\lambda_2}\right)$$

Es ist aber, weil die Wandung aus fünf Schichten besteht:

$$T_1 = \frac{\varDelta_0 + \gamma_1\, \varDelta_1 \left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{1}{\gamma_3}+\frac{1}{\gamma_4}+\frac{1}{\gamma_5}+\frac{e_1}{\lambda_1}+\frac{e_2}{\lambda_2}+\frac{e_3}{\lambda_3}+\frac{e_4}{\lambda_4}+\frac{e_5}{\lambda_5}\right)}{\gamma_0\left(\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{1}{\gamma_3}+\frac{1}{\gamma_4}+\frac{1}{\gamma_5}+\frac{e_1}{\lambda_1}+\frac{e_2}{\lambda_2}+\frac{e_3}{\lambda_3}+\frac{e_4}{\lambda_4}+\frac{e_5}{\lambda_5}\right)}$$

Substituirt man diesen Werth von T_1 in den obigen Ausdruck für T_3, so folgt:

$$T_3 = \Delta_1 - (\Delta_1 - \Delta_0)\frac{\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{e_1}{\lambda_1}+\frac{e_2}{\lambda_2}}{\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{1}{\gamma_3}+\frac{1}{\gamma_4}+\frac{1}{\gamma_5}+\frac{e_1}{\lambda_1}+\frac{e_2}{\lambda_2}+\frac{e_3}{\lambda_3}+\frac{e_4}{\lambda_4}+\frac{e_5}{\lambda_5}}$$

oder auch mit Berücksichtigung des Werthes von W:

$$T_3 = \Delta_1 - \frac{W}{F}\left(\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{e_1}{\lambda_1}+\frac{e_2}{\lambda_2}\right)$$

Ist $\frac{1}{\gamma_0}\ \frac{1}{\gamma_1}\ \frac{1}{\gamma_2}\ \frac{e_1}{\lambda_1}\ \frac{e_2}{\lambda_2}$ klein, dagegen $\frac{1}{\gamma_3}\ \frac{1}{\gamma_4}\ \frac{1}{\gamma_5}\ \frac{e_3}{\lambda_3}\ \frac{e_4}{\lambda_4}\ \frac{e_5}{\lambda_5}$ gross, so kann die Wärme bis an die äussere Begränzungsfläche des Metalles leicht eindringen, aber von da an durch das Metall und durch die inneren Belegungen schwer durchgehen, und dann wird T_3 gross, d. h. dies Metall kann an den äusseren Begränzungsflächen eine hohe Temperatur annehmen.

Die für W aufgefundenen Ausdrücke stimmen mit dem von *Ohm* für den elektrischen Strom aufgestellten Gesetze überein. Der Werth von:

$$\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1}+\ldots+\frac{1}{\gamma_5}+\frac{e_1}{\lambda_1}+\frac{e_2}{\lambda_2}+\ldots+\frac{e_5}{\lambda_5}$$

ist nichts anderes als was *Ohm* den Leitungswiderstand genannt hat.

Wärmemenge, die in einer Zeiteinheit durch eine cylindrische Gefässwand geht. (Tab. XVII, Fig. 76.)

Wir nehmen an, die Temperatur sei im Innern constant Δ_1, ausserhalb constant Δ_2 und $\Delta_1 > \Delta_2$, so dass die Wärme von innen nach aussen geht.

Nennen wir ferner:

r_1 den inneren, r_2 den äusseren Halbmessser des Cylinders;
t_1 und t_2 die Temperaturen des Cylinders an der inneren und an der äusseren Fläche;
γ_1 und γ_2 die Ein- und Ausstrahlungs-Coeffizienten;
λ den Leitungscoeffizienten;
l die Länge des Cylinders;
W die in einer Zeiteinheit durch den Cylinder gehende Wärme;
u die Temperatur des Wandmaterials in einer Entfernung ζ von der Axe des Cylinders.

Im Beharrungszustand der Erwärmung sind die durch die Cylinderflächen $2 r_1 \pi l$ $2 \zeta \pi l$, $2 r_2 \pi l$ in jeder Zeiteinheit gehenden Wärmequantitäten $2 r_1 \pi l \gamma_1 (\Delta_1 - t_1)$ $2 r_2 \pi l \gamma_2 (t_2 - \Delta_2)$, $-\lambda 2 \zeta \pi l \frac{du}{d\zeta}$ gleich gross und gleich W. Man hat daher die Gleichheiten:

$$W = 2\pi l \gamma_1 \; r_1(\Delta_1 - t_1) = 2\pi l \gamma_2 \; r_2(t_2 - \Delta_2) = -\lambda 2 \pi l \zeta \frac{du}{d\zeta} \quad \ldots \quad (19)$$

aus welchen die drei unbekannten Grössen t_1 t_2 und W bestimmt werden können.

Das Integrale der Gleichung:

$$W = -\lambda 2 \pi l \frac{\zeta\, du}{d\zeta}$$

ist:

$$u = -\frac{W}{2\pi l \lambda} \text{lognat.}\, \zeta + \text{const.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Nun ist für $\zeta = r_1$ $u = t_1$ und für $\zeta = r_2$ $u = t_2$; daher hat man:

$$t_1 = -\frac{W}{2\pi l \lambda} \text{lognat.}\, r_1 + \text{const.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$t_2 = -\frac{W}{2\pi l \lambda} \text{lognat.}\, r_2 + \text{const.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Die Differenz dieser Ausdrücke gibt:

$$t_1 - t_2 = \frac{W}{2\pi l \lambda} \text{lognat.}\, \frac{r_2}{r_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Aus den Gleichheiten (19) folgt:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \Delta_1 - \frac{W}{2\pi l \gamma_1 r_1} \\ t_2 &= \Delta_2 + \frac{W}{2\pi l \gamma_2 r_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

$$t_1 - t_2 = \Delta_1 - \Delta_2 - \frac{W}{2\pi l}\left(\frac{1}{\gamma_1 r_1} + \frac{1}{\gamma_2 r_2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Setzt man die Werthe von $t_1 - t_2$, welche die Gleichungen (23) und (25) darbieten, einander gleich und sucht hierauf W, so findet man:

$$W = \frac{2\pi l (\Delta_1 - \Delta_2)}{\frac{1}{\gamma_1 r_1} + \frac{1}{\gamma_2 r_2} + \frac{1}{\lambda} \text{lognat.}\, \frac{r_2}{r_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Führt man diesen Werth von W in die Ausdrücke (24) ein, so erhält man auch:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{\frac{\Delta_1}{\gamma_2 r_2} + \frac{\Delta_2}{\gamma_1 r_1} + \frac{\Delta_1}{\lambda} \log.\, \frac{r_2}{r_1}}{\frac{1}{\gamma_1 r_1} + \frac{1}{\gamma_2 r_2} + \frac{1}{\lambda} \log.\, \frac{r_2}{r_1}} \\ t_2 &= \frac{\frac{\Delta_1}{\gamma_2 r_2} + \frac{\Delta_2}{\gamma_1 r_1} + \frac{\Delta_2}{\lambda} \log.\, \frac{r_2}{r_1}}{\frac{1}{\gamma_1 r_1} + \frac{1}{\gamma_2 r_2} + \frac{1}{\lambda} \log.\, \frac{r_2}{r_1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Der Ausdruck (26) zeigt, dass die durch einen Cylinder gehende Wärme der Temperatur-Differenz der Medien proportional ist, und dass die Wanddicke $r_2 - r_1$ einen ziemlich complicirten Einfluss ausübt.

Ist die Wanddicke $r_2 - r_1$, die wir mit e bezeichnen wollen, sehr klein im Verhältniss zum Halbmesser r_1, so ist es erlaubt, annähernd:

$$\log.\, \frac{r_2}{r_1} = \log.\, \frac{r_1 + e}{r_1} = \log.\left(1 + \frac{e}{r_1}\right) = \frac{e}{r_1}$$

und:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1 + e} = \frac{1}{r_1\left(1 + \frac{e}{r_1}\right)} = \frac{1 - \frac{e}{r_1}}{r_1} = \frac{1}{r_1} - \frac{e}{r_1^2}$$

zu setzen, und dann wird:

$$W = \frac{2\pi r_1 l (\varDelta_1 - \varDelta_2)}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda} - \frac{e}{\gamma_2 r_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Ist aber $\frac{\varDelta}{r_1}$ sehr klein, so darf man auch das im Nenner erscheinende Glied $\frac{e}{\gamma_2 r_1}$ vernachlässigen, und dann findet man:

$$W = \frac{2\pi r_1 l (\varDelta_1 - \varDelta_2)}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Dieser Ausdruck stimmt mit jenem überein, den wir für eine ebene Gefässwand gefunden haben.

Diese Resultate gelten nicht nur, wenn $\varDelta_1 > \varDelta_2$, sondern auch dann, wenn $\varDelta_2 < \varDelta_1$, nur fällt dann der Werth von W negativ aus, weil in diesem Falle die Wärme von aussen nach innen in den Cylinder eindringt. Hieraus folgt der für manche praktische Zwecke nicht unwichtige Satz: dass die Wärmemenge, die durch die Wand eines Cylinders von aussen nach innen entströmt, wenn die äussere Temperatur höher ist als die innere, eben so gross ist als diejenige, welche von innen nach aussen entweicht, wenn die innere Temperatur höher ist als die äussere, vorausgesetzt, dass in beiden Fällen die Temperatur-Differenz der Medien gleich gross ist.

Wärmemenge, die durch eine kugelförmige Gefässwand geht.

(Tab. XVII, Fig. 76.)

Betrachten wir nun die Wärmebewegung durch ein sphärisches Gefäss, das innen und aussen mit Flüssigkeiten in Berührung steht, die ihre Temperatur mit der Zeit nicht ändern.

Nennt man:
r_1 r_2 die Halbmesser der inneren und der äusseren Kugelflächen;
$\varDelta_1$ $\varDelta_2$ die Temperaturen der Medien in der Kugel und ausserhalb derselben;
t_1 t_2 die Temperaturen an der inneren und äusseren Fläche der Gefässwand;
γ_1 und γ_2 die Ein- und Ausstrahlungs-Coeffizienten;
λ den Wärmeleitungs-Coeffizienten;
u die Temperatur in einer Entfernung ζ vom Mittelpunkt der Kugel;
W die Wärmemenge, welche in einer Zeiteinheit durch die kugelförmige Wand entweicht.

Die Wärmemengen, welche in einer Zeiteinheit durch die Kugelflächen gehen, deren Halbmesser r_1 ζ r_2 sind, haben in diesem Falle die Werthe $4 r_1^2 \pi \gamma_1 (\varDelta_1 - t_1)$, $4 r_2^2 \pi \gamma_2 (t_2 - \varDelta_2)$, $-4\zeta^2 \pi \lambda \frac{du}{d\zeta}$, und jede derselben ist gleich der Wärmemenge W, die in jeder Sekunde aus der Kugel entweicht. Wir haben daher:

$$W = 4 r_1^2 \pi \gamma_1 (\Delta_1 - t_1) = 4 r_2^2 \pi \gamma_2 (t_2 - \Delta_2) = -4 \zeta^2 \pi \lambda \frac{du}{d\zeta} \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

Das Integrale der Gleichheit

$$W = -4 \zeta^2 \pi \lambda \frac{du}{d\zeta}$$

ist:

$$u = \frac{W}{4 \pi \lambda} \cdot \frac{1}{\zeta} + \text{const.} \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

Nun ist für $\zeta = r_1$, $u = t_1$ und für $\zeta = r_2$, $u = t_2$; daher hat man:

$$t_1 = \frac{W}{4 \pi \lambda} \frac{1}{r_1} + \text{const.}$$

$$t_2 = \frac{W}{4 \pi \lambda} \frac{1}{r_2} + \text{const.}$$

Demnach auch:

$$t_1 - t_2 = \frac{W}{4 \pi \lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

Die Gleichheiten (30) geben:

$$t_1 = \Delta_1 - \frac{W}{4 \pi \gamma_1 r_1^2}$$

$$t_2 = \Delta_2 + \frac{W}{4 \pi \gamma_2 r_2^2}$$

$$t_1 - t_2 = \Delta_1 - \Delta_2 - \frac{W}{4 \pi} \left(\frac{1}{\gamma_1 r_1^2} + \frac{1}{\gamma_2 r_2^2} \right) \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

Die Werthe von $t_1 - t_2$, welche (32) und (33) darbieten, einander gleich gesetzt und dann W gesucht, so findet man:

$$W = \frac{4 \pi (\Delta_1 - \Delta_2)}{\frac{1}{\gamma_1 r_1^2} + \frac{1}{\gamma_2 r_2^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

Die durch eine kugelförmige Gefässwand gehende Wärmemenge ist also, wie man sieht, gerade so wie bei einer ebenen oder cylindrischen Wand der Temperatur-Differenz der Medien proportional. Die Halbmesser r_1 r_2 der Krümmungen haben jedoch bei den kugelförmigen Gefässen einen anderen Einfluss als bei den cylindrischen. Wenn $\Delta_2 > \Delta_1$ ist, geht die Wärmeströmung von aussen nach innen; dann sind aber die Coefficienten γ_1 γ_2 k negativ zu nehmen, der Ausdruck für W ändert sich also nicht. Die durch die kugelförmige Gefässwand gehende Wärmemenge ist also in dem Falle, wenn die Strömung von innen nach aussen geht, eben so gross, als wenn sie von aussen nach innen geht, vorausgesetzt, dass die Temperatur-Differenz der Medien in beiden Fällen gleich gross ist.

Nennt man e die Wanddicke, so ist $r_2 = r_1 + e$, und der Ausdruck (34) für W wird dann:

$$W = \frac{4 r_1^2 \pi (\Delta_1 - \Delta_2)}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{r_1}{r_1 + e}\right)^2 + \frac{e}{\lambda}\left(\frac{r_1}{r_1 + e}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Ist e gegen r_1 sehr klein, so darf man annähernd $\frac{r_1}{r_1 + e}$ gleich der Einheit setzen, und dann erhält man:

$$W = \frac{4 r_1^2 \pi ({}_1\Delta - \Delta^2)}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

ein Ausdruck, der mit dem für die ebene Wand gefundenen übereinstimmt.

Wenn die beiden Seiten einer Metallwand mit Gasen, die verschiedene Temperaturen haben, in Berührung stehen, ist der Leitungs-Coeffizient λ im Verhältniss zu dem Aus- und Einstrahlungs-Coeffizienten γ_1 und γ_2 sehr gross, und dann fällt das Glied $\frac{e}{\lambda}$ gegen $\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}$ sehr klein aus, so dass es ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden kann. In diesem Fall wird aber für eine ebene Wand annähernd:

$$W_1 = \frac{F (\Delta_1 - \Delta_2)}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

d. h. die Wärmemenge ist, wenn der Leitungs-Coeffizient im Verhältniss zu den Ein- und Ausstrahlungs-Coeffizienten gross ist, unabhängig von der Metalldicke und von der Natur des Metalls, aus welchem die Wand besteht. Dies hat auch in der That *Peclet* durch Versuche gefunden.

Vergleichung der Wärmemengen, die durch eine Flächeneinheit einer ebenen, einer cylindrischen und einer sphärischen Wand gehen.

Nennen wir:

w_1 die Wärmemenge, die in der Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit einer ebenen Wand geht;

w_2 die Wärmemenge, die durch eine Flächeneinheit der äusseren Fläche einer cylindrischen Wand geht;

w_3 die Wärmemenge, die durch eine Flächeneinheit der innern Fläche einer cylindrischen Wand geht;

w_4 die Wärmemenge, die durch eine Flächeneinheit der äusseren Fläche einer sphärischen Gefässwand geht;

w_5 die Wärmemenge, die durch eine Flächeneinheit der innern Fläche einer sphärischen Gefässwand geht.

Vorausgesetzt, dass in allen diesen Fällen die Temperaturdifferenz der Medien und die Coeffizienten $\lambda_1\ \gamma_1\ \gamma_2$ die gleichen Werthe haben, erhält man aus den früher aufgefundenen Ausdrücken für $w_1\ w_2\ w_3\ w_4\ w_5$ folgende Formeln:

$$w_1 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

$$W_2 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1}\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{r_2}{\lambda}\,\text{lognat.}\frac{r_2}{r_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (39)$$

$$W_3 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1}{\lambda}\,\text{lognat.}\frac{r_2}{r_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (40)$$

$$W_4 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{r_2^2}{\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots (41)$$

$$W_5 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{r_1^2}{\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (42)$$

Nenn mant sowohl für ebene, als auch für cylindrische und sphärische Gefässe e die Wandicke und setzt voraus, dass dieselbe gegen die Halbmesser r_1 und r_2 klein sind, so darf man sich erlauben zu setzen:

$$\log.\frac{r_2}{r_1} = \text{lognat.}\frac{r_1 + e}{r_1} = \text{lognat.}\left(1 + \frac{e}{r_1}\right) = \frac{e}{r_1}$$

$$\frac{r_2}{r_1} = 1 + \frac{e}{r_1}$$

und dann wird:

$$W_2 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{\gamma_1}\frac{e}{r_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (43)$$

$$W_3 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda} - \frac{1}{\gamma_2}\frac{e}{r_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (44)$$

$$W_4 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda} + \frac{2}{\gamma_1}\frac{e}{r_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (45)$$

$$W_5 = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{e}{\lambda} - \frac{2}{\gamma_2}\frac{e}{r_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (46)$$

Vergleicht man diese Werthe von $W_2\,W_3\,W_4\,W_5$ mit dem Werth von W_1 (38), so sieht man leicht, dass:

$$W_5 > W_3 > W_1 > W_2 > W_4$$

Die grösste Wärmemenge geht demnach durch eine Flächeneinheit der inneren Fläche eines sphärischen Gefässes, die kleinste durch eine Flächeneinheit der äusseren Fläche eines sphärischen Gefässes. Die durch eine Flächeneinheit einer ebenen Wand gehende Wärme liegt zwischen derjenigen Wärmemenge, die durch eine Flächeneinheit der inneren und äusseren Fläche einer cylindrischen Gefässwand geht.

Ist der Wärmeleitungscoeffizient λ in Vergleich zu dem Aus- und Einstrahlungscoeffizienten $\gamma_1\,\gamma_2$ sehr gross, so kann man in allen für die Wärmemengen aufgefundenen Formeln das von den Leitungscoeffizienten abhängige Glied gegen die Glieder, welche den Einfluss der Strahlung ausdrücken, vernachläsigen. Dadurch werden aber die in der

Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit gehenden Wärmemengen von dem Leitungscoeffizienten, mithin von der Natur des Materials, aus welchem die Wand besteht, so wie auch von der Wanddicke beinahe unabhängig. Es ist also in dem Falle, wenn die Leitung im Verhältniss zur Strahlung sehr gross ist, die durch eine Wand gehende Wärmemenge sowohl von der Natur des Materials, als auch von der Wanddicke beinahe unabhängig.

Ist hingegen die Leitungsfähigkeit des Materials eine schwache, und sind dagegen die Ein- und Ausstrahlungen sehr stark, so kann man umgekehrt die von γ_1 und γ_2 abhängigen Glieder gegen das von λ abhängige vernachlässigen und dann findet man aus (38), (43), (44), (45), (46), dass annähernd

$$W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = W_5 = \lambda \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{e}$$

ist. In diesem Fall hat also die Form der Wand beinahe keinen Einfluss und ist für alle Gefässe die Wärmemenge, dem Leitungscoeffizienten und der Temperaturdifferenz der Medien direkt, der Wanddicke dagegen verkehrt proportional.

Zu diesen Folgerungen ist auch *Peclet* auf rein experimentalem Wege gekommen.

Wärmemenge, die in einer Sekunde durch die Wände einer Röhre geht, die von Wasser umgeben und von heisser Luft durchströmt wird.

Wir wollen uns die Aufgabe vorlegen, die Wärmemenge, welche in einer Sekunde durch die Wände eines Rohres geht, das aussen von Wasser umgeben und innen von heisser Luft durchströmt wird, unter folgenden Voraussetzungen zu bestimmen:

1. die Temperatur des Wassers, welches das Rohr umgibt, sei für jeden Punkt der Oberfläche des Rohres und für die ganze Dauer der Durchströmung constant;
2. der Querschnitt des Rohres sei so klein, dass man annehmen darf, es herrsche in allen Punkten eines bestimmten Querschnittes desselben die gleiche Temperatur;
3. die Temperatur der einströmenden Luft sei während der ganzen Strömung gleich gross, so dass man annehmen darf, dass die Temperatur in einem bestimmten Querschnitt des Rohres von der Zeit unabhängig sei;
4. die Wärmecapazität der Luft habe für alle Temperaturen ein und denselben Werth, oder sie sei unabhängig von der Temperatur;
5. die Wärmemenge, welche in einer Sekunde durch eine Blechfläche geht, die einerseits mit Wasser und anderseits mit Luft von bestimmter Temperatur in Berührung steht, sei der Ausdehnung der Fläche und der Differenz der diesseits und jenseits herrschenden Temperaturen proportional;

Nennen wir Tab. XVII, Fig. 77:

w die Temperatur des das Rohr umgebenden Wassers;
u_1 die Temperatur, mit welcher die Luft in das Rohr eintritt;
u_2 die Temperatur der aus dem Rohr strömenden Luft;
l die Luftmenge in Kilogrammen, welche in jeder Sekunde das Rohr durchströmt;
u die Temperatur, welche während der ganzen Dauer der Durchströmung in einem Querschnitt herrscht, der vom Einströmungsende um x entfernt ist;
f die innere Fläche des Rohres;
c den inneren Umfang des Rohres;

s die Wärmecapazität der Luft, d. h. die Wärmemenge, welche erforderlich ist um die Temperatur von 1 Kilogramm Luft um 1° des hunderttheiligen Thermometers zu erhöhen. Die Wärmecapazität des Wassers gleich der Einheit gesetzt;

k die Wärmemenge, welche in einer Sekunde durch einen Quadratmeter der Wandfläche geht, wenn die Temperaturdifferenz der Flüssigkeiten zu beiden Seiten der Wand 1° beträgt;

$\alpha = 0{\cdot}00375$ der Ausdehnungscoeffizient der Gase für 1° Temperaturänderung;

$e = 2{\cdot}718$ die Basis der natürlichen Logarithmen;

$\mathfrak{W}$ die Wärmemenge, welche in einer Sekunde durch die Röhrenwand geht.

Durch den Querschnitt bei $m\,n$ geht in jeder Sekunde eine Luftmenge l mit einer Temperatur u. Durch den Querschnitt bei $m_1\,n_1$ geht in jeder Sekunde ebenfalls eine Luftmenge l, aber mit einer Temperatur $u - \frac{du}{dx}\,dx$. Die durch das Röhrenstückchen von der Länge dx in jeder Sekunde gehende Luftmenge l verliert demnach eine Wärmemenge $-l\,s\,\frac{du}{dx}\,dx$, oder (weil u nur allein von x und nicht von der Zeit abhängt) $-l\,s\,du$. Durch die Oberfläche $c\,dx$ geht aber in jeder Sekunde eine Wärmemenge $K\,(u - w)\,c\,dx$, man hat daher die Gleichheit:

$$k\,c\,(u - w)\,dx = -l\,s\,du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

oder:

$$\frac{du}{u - w} = -\frac{k\,c}{l\,s}\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist im Allgemeinen:

$$\text{lognat.}\,(u - w) = -\frac{k\,c}{l\,s}\,x + \text{const.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Für $x = o$ ist $u = u_1$, für $c\,x = f$ ist $u = u_2$.
Es ist demnach:

$$\text{lognat.}\,(u_1 - w) = o + \text{const.}$$

$$\text{lognat.}\,(u_2 - w) = -\frac{k\,f}{l\,s} + \text{const.}$$

Die Differenz dieser Gleichungen gibt:

$$\text{lognat.}\,\frac{u_1 - w}{u_2 - w} = \frac{k\,f}{l\,s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

und hieraus folgt:

$$u_2 = w + (u_1 - w)\,e^{-\frac{f\,k}{l\,s}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Die durch die Röhrenwand in einer Sekunde gehende Wärmemenge ist $s\,l\,(u_1 - u_2)$, daher hat man wegen (5):

$$\mathfrak{W} = s\,l\,(u_1 - w)\left(1 - e^{-\frac{f\,k}{l\,s}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

In diesem Ausdruck erscheint weder die Länge noch der Querschnitt und auch nicht der innere Umfang der Röhre, sondern nur allein die innere Fläche. Zwei Röhren sind demnach für den Wärmedurchgang ganz gleichwerthig, wenn sie nur gleich grosse innere Flächen haben. Dies gilt jedoch nur mit der Beschränkung, welche in der zweiten Voraussetzung ausgesprochen wurde, nämlich nur für verhältnissmässig enge Röhren von nicht mehr als ungefähr 0·10 Meter Weite.

Wärmemenge, die durch die Heizfläche in den Kessel eindringt.

Um die Wärmemenge zu bestimmen, welche durch die Wände eines Lokomotivkessels eindringt, legen wir der Untersuchung eine Kesseleinrichtung zu Grunde, welche zwar von der üblichen abweicht, aber hinsichtlich der Wärmeabgabe keinen erheblichen Unterschied machen kann. Wir wollen nämlich annehmen, dass die engen Heizröhren nicht von einer Seitenwand, sondern dass sie von der Decke ausgehen, aber in ihrer ganzen Ausdehnung mit dem im Kessel befindlichen Wasser in Berührung stehen. Dann können wir die Feuerbüchse als eine weite von den Verbrennungsgasen nach vertikaler Richtung durchströmte Röhre betrachten.

Die von der Oberfläche des Brennstoffes an aufsteigenden glühend heisen Gase kommen nur theilweise mit den Wänden der Feuerbüchse in Berührung. Die an den Wänden aufsteigenden Gase wirken nicht nur durch Strahlung, sondern auch direkt durch Leitung auf die Wände, werden also mehr Wärme abgeben und sich mehr abkühlen, als die längs der vertikalen Axe der Feuerbüchse emporsteigende Masse, welche bei dem geringen Wärmeleitungsvermögen der Gase beinahe nur durch Strahlung auf die Wände der Feuerbüchse einwirkt, sich daher weniger abkühlen wird. Dieser Vorgang wird jedoch durch den Umstand modifizirt, dass die Aufsteigung der Gastheilchen nicht genau nach vertikaler Richtung erfolgt, sondern dass durch die mannigfaltigen Unregelmässigkeiten, die in dem ganzen Verbrennungsprozess vorkommen, die aufsteigenden Gase unter einander gemengt werden, was zur Folge haben muss, dass die Temperaturunterschiede in einem horizontalen Querschnitt in der Wirklichkeit kleiner ausfallen werden, als sie in dem Fall einer vollkommen genauen Vertikalaufsteigung der Gastheilchen sein würden. Wir werden daher keinen erheblichen Fehler begehen, wenn wir die Temperatur in einem bestimmten Horizontalquerschnitt als constant annehmen, also für die Feuerbüchse die gleiche Voraussetzung machen, welche streng genommen nur für eine sehr enge Röhre zulässig ist.

Wenn wir unter dieser Voraussetzung, die durch die Wände der Feuerbüchse gehende Wärme berechnen, so müssen wir ein zu günstiges Resultat finden; denn wir nehmen gleichsam an, dass alle Gastheilchen mit den Wänden in Berührung kommen, was für die Wärmeabgabe viel günstiger ist, als wenn nur ein Theil der Gase mit den Wänden in Berührung kommt, oder längere Zeit in Berührung bleibt.

Die Temperatur, mit welcher die einzelnen Gastheilchen die Einmündungen der engen Heizröhren des Kessels erreichen, ist nicht für alle Röhren gleich gross. In den mittleren Röhren tritt das Gas mit höherer Temperatur ein, als in den peripherischen Röhren und es wird überhaupt die Temperatur von der Mündung der mittleren Röhre an gegen die peripherischen Röhren hin nach einem gewissen Gesetz abnehmen. Schon aus diesem Grund werden die centralen Röhren mehr Wärme an das Wasser abgeben, als die peripherischen Röhren. Dazu kommt noch, dass in den centralen Röhren eine etwas grössere Gasmenge eintritt, was ebenfalls ihre Wirkung steigert. Diese Differenzen der Temperaturen und der Gasmengen, welche in einzelnen Röhren eintreten, können jedoch, weil

in der Feuerbüchse eine ziemlich vollständige Mengung der Gase stattfindet, nicht sehr gross sein, wie auch der Umstand beweiset, dass doch alle Röhren ziemlich gleich lang dauern, was nicht der Fall sein könnte, wenn die Temperaturdifferenzen an den Mündungen der einzelnen Röhren bedeutend wären.

Wir werden daher keinen erheblichen Fehler begehen, wenn wir für alle Heizröhren ganz identische Wärmeverhältnisse annehmen, uns also erlauben, die Seite 49 aufgefundenen Resultate für jede einzelne Röhre gelten zu lassen.

Für die Berechnung der Wärmemenge, welche durch die Heizfläche des Kessels eindringt wählen wir nebst den Bezeichnungen, die wir im Vorhergehenden angenommen haben, noch folgende:

B Brennstoffmenge in Kilogrammen, die per 1'' verbrannt wird;

$\mathfrak{H}$ Wärmemenge, die durch Verbrennen von 1 Kilogramm Brennstoff entwickelt wird. Wenn die Verbrennung äusserst vollkommen erfolgt, ist $\mathfrak{H}$ die Heizkraft des Brennstoffs.

$\mathfrak{L}$ Luftmenge in Killogrammen, welche in jeder Sekunde durch den Rost in den Feuerungsraum eintritt.

u_0 Temperatur dieser Luft vor ihrem Eintritt.

U Temperatur, welche in dem horizontalen Querschnitt unmittelbar über dem glühenden Brennstoff herrscht.

F_1 Heizfläche der Feuerbüchse.

F_2 Heizfläche sämmtlicher Heizröhren.

$F = F_1 + F_2$ totale Heizfläche des Kessels.

W_1 Wärmemenge, welche durch die Wände der Feuerbüchse eindringt.

W_2 Wärmemenge, welche durch sämmtliche Heizröhren eindringt.

$W = W_1 + W_2$ totale in den Kessel eindringende Wärme.

Dies vorausgesetzt, können wir zur Beantwortung unserer Frage schreiten.

Die Wärmemenge, welche durch den Brennstoff in jeder Sekunde entwickelt wird, ist $B\,\mathfrak{H}$, diese Wärme wird zunächst von der Luftmenge $\mathfrak{L}$ aufgenommen, wodurch sie eine Temperaturerhöhung $U - u_0$ erleidet, wir können daher annähernd setzen:

$$B\,\mathfrak{H} = L\,s\,(U - u_0) \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

woraus sich ergibt:

$$U = u_0 + \frac{B\,\mathfrak{H}}{L\,s} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Da wir die für enge Röhren gefundenen Resultate auch für die Feuerbüchse gelten lassen, so haben wir vermöge der Gleichungen (5) und (6)

$$u_1 = w + (U - w)\,e^{-\frac{F_1 k}{L s}} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$W_1 = s\,L\,(U - w)\left(1 - e^{-\frac{F_1 k}{L s}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Eben so erhalten wir auch für die Wärmemenge W_2, welche durch sämmtliche Röhren in den Kessel eindringt, vermöge der Gleichung (6)

$$W_2 = s\,L\,(u_1 - w)\left(1 - e^{-\frac{F_2 k}{L s}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Substituirt man in diesen Ausdruck den Werth von u_1, welchen die Gleichung (9) darbietet, so findet man

$$W_2 = s\,L\,(U - w)\,e^{-\frac{F_1 k}{L s}}\left(1 - e^{-\frac{F_2 k}{L s}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Durch Summation von (10) und (12) folgt wegen $F_1 + F_2 = F$

$$W = s\,L\,(U - w)\left(1 - e^{-\frac{F k}{L s}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Setzt man in (10) (12) (13) den Werth von U, welchen die Gleichung (8) darbietet, so findet man:

$$\frac{W_1}{B\mathfrak{H}} = \left[1 - (w - u_0)\frac{s\,L}{B\mathfrak{H}}\right]\left(1 - e^{-\frac{F_1 k}{L s}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$\frac{W_2}{B\mathfrak{H}} = \left[1 - (w - u_0)\frac{s\,L}{B\mathfrak{H}}\right]e^{-\frac{F_1 k}{L s}}\left(1 - e^{-\frac{F_2 k}{L s}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$\frac{W}{B\mathfrak{H}} = \left[1 - (w - u_0)\frac{s\,L}{B\mathfrak{H}}\right]\left(1 - e^{-\frac{F k}{L s}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Auch findet man:

$$\frac{W_2}{W_1} = e^{-\frac{F_1 k}{L s}}\,\frac{1 - e^{-\frac{F_2 k}{L s}}}{1 - e^{-\frac{F_1 k}{L s}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Man kann auch noch das Verhältniss der Wärmemengen suchen, die durch einen Quadratmeter Feuerbüchsenwand und durch einen Quadratmeter Heizröhrenfläche gewonnen werden. Dieses Verhältniss ist:

$$\frac{\frac{W_1}{F_1}}{\frac{W_2}{F_2}} = \frac{F_2}{F_1}\cdot\frac{1 - e^{-\frac{F_1 k}{L s}}}{1 - e^{-\frac{F_2 k}{L s}}}\cdot e^{+\frac{F_1 k}{L s}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Von diesen Resultaten ist (16) das wichtigste. Aus diesem geht hervor, dass die totale Wärmemenge, die in den Kessel eindringt, weder von der absoluten Grösse der Heizfläche der Feuerbüchse, noch von der absoluten Grösse der Heizfläche der Röhren abhängt, sondern dass sich dieselbe nach der absoluten Grösse der totalen Heizfläche des Kessels richtet. Zwei Kessel, die gleich grosse totale Heizflächen besitzen, sind demnach für die Dampfproduktion gleichwerthig, sie mögen nun gleich grosse, oder ungleich grosse Feuerbüchsen haben. Die Herren Ingenieure, welche für die Vergrösserung der Feuerbüchsen schwärmen, werden sich wohl über kurz oder lang zu einer Meinungsänderung veranlasst sehen.

Dass es hinsichtlich der Wärmebenutzung auf die Grösse der Feuerbüchse nicht ankommt, ist auch ohne alle Rechnung leicht einzusehen. Ist die Feuerbüchse klein, so

wird sie wenig Wärme aufnehmen, aber eben desshalb werden die Gase mit einer hohen Temperatur in die Röhren eintreten, daher an dieselben viel Wärme abgeben. Ist die Feuerbüchse gross, so wird an dieselbe viel Wärme abgegeben, die Gase werden stark abgekühlt in die Röhren eintreten, und daselbst nur wenig erwärmend wirken können.

Da die Schwierigkeit einer soliden Construktion der Feuerbüchse mit ihrer Grösse wächst, so muss man als Regel aussprechen, dass die beste Feuerbüchse die kleinste ist, mit welcher es möglich wird, einen für die vollständige Verbrennung des Brennstoffes hinreichend grossen Rost und die nöthige Anzahl Röhren anzubringen.

Pambour hat bekanntlich zuerst durch Versuche gefunden, dass ein Quadratmeter der Heizfläche der Feuerbüchse 3 mal so viel Dampf entwickelt, als ein Quadratmeter der Röhrenfläche. Aus dieser Thatsache haben viele Ingenieure geglaubt schliessen zu dürfen, dass es vortheilhaft sein müsste, den Feuerbüchsen eine grosse und den Röhren eine kleine Fläche zu geben. Consequenterweise hätte man nach dieser Art zu schliessen, folgern können, dass es am besten sein müsste, die Röhren ganz wegzulassen und alle Wärme durch eine grosse Feuerbüchse zu gewinnen. Auch die sogenannte Reduktion der Heizfläche der Röhren beruht auf einer unrichtigen Auffassung und hat weder einen wissenschaftlichen Sinn, noch eine praktische Bedeutung.

Wenn ich aber sage, dass es für die Wärmebenutzung blos auf die totale Heizfläche ankomme, so ist das nicht so zu verstehen, als ob die Länge, Weite und Anzahl der Röhren in jeder Hinsicht gleichgültig wäre. Wenn von der Zweckmässigkeit einer Kesselanordnung die Rede ist, kommt auch der Widerstand in Betrachtung, den die Röhren dem Durchgang der Luft entgegensetzten und in dieser Hinsicht soll der Flächenraum der Querschnitte der Röhren möglichst gross sein. Von diesen Verhältnissen wird in der Folge, wenn von der Anfachung des Feuers durch die Wirkung des Blasrohres gehandelt wird, weiteres folgen.

Wir wollen nun sehen, welche numerische Resultate uns die aufgestellten Formeln liefern. Für diese numerischen Berechnungen müssen wir uns zunächst über mehrere in den Formeln erscheinende Grössen erklären.

Die spezifische Wärme s der Verbrennungsgase kann jener der atmosphärischen Luft gleich gesetzt werden, denn die Verbrennungsgase bestehen doch grösstentheils aus Bestandtheilen der atmosphärischen Luft. Zum absolut vollkommenen Verbrennen von 1 Kilogramm Coaks sind wenigstens 12 Kilogramme atmosphährische Luft nothwendig, die das Verbrennen unterhaltende Luftmenge beträgt aber bei Dampfkesselheizungen in der Regel das $1\,^1/_3$fache, von dieser kleinsten Menge also gewöhnlich 16 Kilogramme. $^{16}/_{17}$ Gewichtstheile der Verbrennungsgase rühren also von atmosphärischer Luft her. Wir dürfen also setzen:

$$s = 0{\cdot}2669\,,\quad L = 16\,B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Die Spannung des Dampfes beträgt in den Lokomotivkesseln in der Regel 5 Atmosphären, wir dürfen also für die Temperatur w des Wassers im Kessel 150° rechnen, setzen also:

$$w = 150^{\circ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Die in den Feuerherd einströmende Luft ist bei den meisten Lokomotiven nicht vorgewärmt, hat also nur die niedrige Temperatur der Atmosphäre. Wir wollen annehmen:

$$u_0 = +\,10^{\circ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Die Verbrennung geht in dem Lokomotivkessel sehr vollkommen vor sich, die Lokomotive rauchen fast gar nicht. Wir wollen Coaksfeuerung annehmen und dürfen desshalb setzen:

$$\mathfrak{H} = 7000 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Für den Coeffizienten k, welcher die Wärmemenge ausdrükt, die in 1 Sekunde durch 1 Quadratmeter Kesselwand geht, wenn die Temperaturdifferenz zu beiden Seiten der Wand 1° beträgt, habe ich den Werth $\frac{1}{158}$ gefunden. Wir setzen also:

$$k = \frac{1}{158} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Für die Heizflächen $F_1 F_2 F$ wollen wir die bei neueren Personenlokomotiven vorkommenden mittleren Werthe annehmen. Wir setzen desshalb:

$$F_1 = 6 \text{ Quadratmeter}, \quad F_2 = 72, \quad F = 78 \text{ Quadratmeter} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Wenn wir annehmen, dass der nach den Cylindern strömende Dampf kein Wasser mitreisst, wirkt die in den Kessel eindringende Wärmemenge auf Dampfbildung, und da der Kessel aus dem Tender mit Wasser von 100° Temperatur gespeist wird, so ist zur Umwandlung von 1 Kilogramm Wasser von 100° Temperatur in Dampf von irgend einer Spannkraft eine Wärmemenge von 650 — 100 = 550 Wärmeeinheiten nothwendig. Die Dampfmenge in Kilogrammen, welche der Kessel für 1 Kilogramm Brennstoff liefert, ist demnach:

$$\frac{7000}{550} \cdot \frac{W}{B\mathfrak{H}} = 12{\cdot}7 \frac{W}{B\mathfrak{H}}$$

Vermittelst dieser Annahme liefern die Formeln (14) bis (18) folgende Resultate:

Wärme-verhältnisse.	Brennstoff in Kilog. (Coaks), der in 1'' auf dem Rost verbrennt.				
	0·04	0·06	0·09	0·13	0·18
$W_1 : B\mathfrak{H}$	0·1829	0·1264	0·0862	0·0607	0·0442
$W_2 : B\mathfrak{H}$	0·6811	0·6567	0·5768	0·4785	0·3802
$W : B\mathfrak{H}$	0·8640	0·7821	0·6630	0·5392	0·4344
$W_2 : W_1$	3·7	5·19	6·68	7·88	8·60
$\frac{W_1}{F_1} : \frac{W_2}{F_2}$	3·22	2·31	1·79	1·52	1·38
Dampfproduktion des Kessels mit 1 Kilog. Coaks	10·9	9·93	8·4	6·8	5·4

Aus den Zahlen dieser Tabelle ersieht man, in welchem Maase die Leistungen des Kessels bei starker Heizung desselben ungünstiger ausfallen, als bei schwacher. Wenn in 1 Sekunde nur 0.04, oder stündlich nur 144 Kilogramme Coaks verbrannt werden, gibt die Rechnung, dass 86% von der durch die Verbrennung entwickelten Wärme in den Kessel eindringt, wo hingegen nur 43% dieser Wärme gewonnen werden, wenn in der Sekunde 0·18, oder in der Stunde 648 Kilogramme verbrannt werden. Personenlokomotive verbrauchen gewöhnlich bei leichteren Zügen von 12 bis 16 beladenen Wägen 0·09 Kilogramme Coaks in 1 Sekunde. Für eine solche Feuerung gibt die Tabelle für

die Leistungen des Kessels 66% oder 8 Kilogramm Dampf für 1 Kilogramm Coaks. Diese Leistungen nach Prozenten ist mit den Erfahrungen übereinstimmend. Die Dampfproduktion von 8 Kilogramm Dampf für 1 Kilogramm Coaks ist etwas zu gross, was nicht von den Formeln, sondern von dem Umstand herrührt, dass eine äusserst vollkommene Verbrennung und ferner noch angenommen wurde, dass der Dampf kein Wasser mit sich fortreisse. Nimmt man an, dass 1 Kilogramm Dampf w_1 Kilogramm Wasser mit sich fortreisst, so ist die Dampfmenge, welche durch 1 Kilogramm Coaks gewonnen wird:

$$\frac{\mathfrak{H}\left(\frac{W}{B\mathfrak{H}}\right)}{550+140\,w_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Nach den Versuchen von *Lechatellier* beträgt die Wassermenge, welche 1 Kilogramm Dampf mitreist, wenigstens 0·2 Kilogramme, es ist also w wenigstens gleich 0·2. In den meisten Fällen ist aber w_1 gleich 0·3 bis 0·4 Kilogrammen. Nehmen wir:

$$\mathfrak{H} = 7000 \qquad \frac{W}{B\mathfrak{H}} = 0{\cdot}66 \qquad W_1 = 0{\cdot}4$$

so wird die Dampfmenge, welche mit 1 Kilogramm Coaks produzirt wird 7·6 Kilogramme.

Die fünfte der horizontalen Zahlenreihe zeigt, in welchem Maase ein Quadratmeter der Heizfläche der Feuerbüchse mehr leistet, als ein Quadratmeter der Heizfläche der Röhren. Dieses Verhältniss ist keineswegs constant; es ist bei schwachen Heizungen grösser als bei starken, was auch ganz in der Natur der Sache begründet ist, denn wenn schwach geheizt wird, ist wohl in der Feuerbüchse eine hohe Temperatur, gegen das Ende der Röhren hin aber nur eine schwache; 1 Quadratmeter der Feuerbüchse wird also in diesem Falle viel mehr leisten als 1 Quadratmeter der Röhren. Wird dagegen stark geheizt, so herrscht auch in den Röhren in ihrer ganzen Ausdehnung eine hohe Temperatur, der Unterschied der Leistungen von 1 Quadratmeter Feuerbüchse und von 1 Quadratmeter Röhrenfläche muss also um so kleiner ausfallen, je mehr geheizt wird.

Will man also die Heizfläche der Röhren auf die Heizfläche „reduziren", so muss man nicht einen constanten, sondern man muss einen variablen Reduktionscoeffizienten in Rechnung bringen. Das beste ist aber, wenn man diese „Reduktion" ganz unterlässt, weil dadurch doch keine Einsicht gewonnen wird.

Wärmemenge, die durch die einzelnen Theile des Röhrensystems gewonnen wird.

Interessant ist es, die Wärmemenge zu bestimmen, die durch die einzelnen Theile des Röhrensystems in den Kessel eindringt. Setzt man in der Gleichung (15) nämlich in:

$$\frac{W_2}{B\mathfrak{H}} = \left[1-(w-u_0)\frac{sL}{B\mathfrak{H}}\right] e^{-\frac{F_1 k}{L s}}\left(1-e^{-\frac{F_2 k}{L s}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

$w = 150^{\circ}$ $u_0 = 10^{\circ}$ $L = 16\,B$ $\mathfrak{H} = 7000$ $s = 0{\cdot}2669$ $F_1 = 6$ Quadratmeter $B = 0{\cdot}09$

und der Reihe nach

$F_2 = 18$ 36 54 72 Quadratmeter,

so findet man für das Verhältniss der Wärmemenge, die durch

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{2}{4} \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{4}{4}$$

der Röhrenfläche eindringt, zur Wärmemenge $B\mathfrak{H}$, welche den Brennstoff entwickelt, folgende Werthe:

0·2118 0·3695 0·4869 0·5742

Die Differenzen dieser Zahlen geben in Prozenten an, wie viel Wärme durch das 1., 2., 3., 4. Viertel der Röhrenfläche gewonnen wird. Diese Differenzen sind:

0·2118 0·1577 0·1174 0·0873

Es werden also bei dieser angenommenen Heizung mit 0.09 Kilogrammen Coaks per Sekunde, durch das 1. Viertel 21%, durch das 2. 16%, durch das 3. Viertel 12% und durch das letzte Viertel 8% gewonnen. Für diese Heizung haben also die Röhren eine hinreichende Oberfläche, indem durch das letzte Viertel nur noch 8% gewonnen werden, so dass also eine weitere Vergrösserung der Heizfläche der Röhren in diesem Falle nicht mehr eine beachtenswerthe Wirkung hervorbringen könnte.

Würde man dieselbe Rechnung für eine starke Heizung von etwa 0.18 Kilogrammen Coaks per Sekunde durchführen, so fände man für die Wärmemenge, die durch die einzelnen Viertheile des Kessels gewonnen werden könnten, nur wenig von einander verschiedene Werthe, und die durch das letzte Viertel gewinnbare Wärme würde so beträchtlich ausfallen, dass für eine so starke Heizung die angenommene Totalfläche der Röhren als zu klein erscheinen müsste.

Temperatur der in die Rauchkammer entweichenden Gase.

Zur Bestimmung der Temperatur u_2, mit welcher die Verbrennungsgase die Röhren verlassen und in die Rauchkammer treten, hat man die Formel:

$$u_2 = w + \left[\frac{B\mathfrak{H}}{Ls} - (w - u_0)\right] e^{-\frac{Fk}{Ls}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Setzt man in dieselbe:

$$w = 150 \qquad u_0 = 10^0 \qquad L = 16\,B \qquad \mathfrak{H} = 7000 \qquad s = 0{\cdot}2669 \qquad k = \frac{1}{158}$$

so findet man für:

$B =$	0·04	0·06	0·09	0·13	0·18
$u_2 =$	234	368	568	767	939

woraus man ebenfalls ersehen kann, in welchem Grade eine starke Heizung unvortheilhaft ist, oder wie ungünstig eine im Verhältniss zur Brennstoffmenge, die verbrannt wird, kleine Heizfläche ist. Da wir im Kessel eine Spannung von 5 Atmosphären und desshalb eine Temperatur von 150° angenommen haben, so kann die Temperatur, mit welcher die Gase die Röhren verlassen, nie kleiner als 150° sein. Bei niedrigen Dampfspannungen fallen die Temperaturen u_2 kleiner, mithin günstiger aus, es ist also die unvermeidlich hohe Temperatur des Wassers im Kessel für die Benützung der Wärme nachtheilig.

Die anfachende Wirkung des Blasrohres.

Das Blasrohr ist ein nicht unwichtiger Theil der Lokomotive. Die Feuerung einer Lokomotive erfordert eine sehr lebhafte Anfachung. Eine Lokomotive von gewöhnlicher Grösse entwickelt einen Effeckt von mehr als hundert Pferdekräften, der Rost ist aber doch nicht grösser als der einer stehenden Maschine von zehn Pferdekräften. Die Dicke der Brennstoffschichte beträgt bei stehenden Maschinen 0·12 bis 0·16 Meter, in den Lokomotivkesseln hingegen 0·6 bis 0·7 Meter. Es muss also bei einem Lokomotivkessel durch eine zehnmal kleinere Rostfläche und durch eine viermal dickere Brennstoffschichte eben so viel Luft eindringen, als durch den Rost einer hundertpferdigen Landmaschine.

Diese heftige Anfachung wird bekanntlich bei Lokomotiven durch das Blasrohr bewirkt. Indem der Dampf, nachdem er auf die Maschine gewirkt hat, am Ende jedes Schubes stossweise und mit grosser Vehemenz durch die Mündung des Blasrohres ausströmt, reisst er die in dem Rauchrohr und in der Rauchkammer befindlichen Verbrennungsgase mit sich fort, dadurch entsteht zunächst eine Gasverdünnung in der Rauchkammer, was zur Folge hat, dass die in den Röhren des Kessels befindlichen Gase durch die in der Feuerbüchse herrschende Pressung in die Rauchkammer getrieben werden, während gleichzeitig die in der Feuerbüchse enthaltenen Gase in die Röhren eintreten, dadurch entsteht aber in der Feuerbüchse eine Abnahme der Pressung und dies hat zur Folge, dass die äussere Luft durch den Druck der Atmosphäre in die Feuerbüchse getrieben wird.

Wenn in jeder Sekunde durchschnittlich eine gewisse Quantität atmosphärische Luft durch die Lokomotivkessel strömen soll, muss die Differenz zwischen dem äusseren atmosphärischen Druck und dem in der Rauchkammer herrschenden Druck so gross sein, dass dadurch überwunden werden kann: 1. der Widerstand, den das auf dem Rost liegende Brennmaterial dem Durchgang der Luft entgegensetzt; 2. die Reibung der Luft an der Heizfläche des Kessels; 3. die Widerstände, welche durch Verengungen und Ausweitungen des inneren Röhrensystems entstehen.

Vernachlässigt man die Dichtigkeitsänderungen, welche die Luft während ihrer Bewegung aus der Feuerbüchse in der Rauchkammer erleidet, so findet man nach den bekannten Methoden, durch welche die Bewegung der Gase in Röhrenleitungen bestimmt werden kann, für die Differenz der Pressungen in der Feuerbüchse und in der Rauchkammer per 1 Quadratmeter folgenden Ausdruck:

$$\frac{L^2}{2\,g\,\gamma^2}\left[\frac{1}{\omega_2^2}-\frac{1}{\omega_1^2}+\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega_2}\right)^2+\frac{2\,g\,\mu\,F}{\omega^3}\right] \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

in welchem bedeutet:

L die Luftmenge in Kilogrammen, welche per 1″ durch den Kessel strömt;

γ das Gewicht von 1 Kubikmeter der durch die Röhren strömenden Gase. Um γ zu berechnen, muss man eine mittlere Temperatur in Rechnung bringen;

ω_1 den Querschnitt der Feuerbüchse;

ω_2 den Querschnitt der Rauchkammer;

ω die Summe der Querschnitte aller Heizröhren des Kessels;

m den Contraktionscoefficienten für den Eintritt der Gase in die Heizröhren;

F die totale Heizfläche (Reibungsfläche) des Kessels;

$g = 9{\cdot}808$ die Beschleunigung durch die Schwere;

$\mu = 0{\cdot}0003302$ den Luftreibungscoeffizienten.

Da es sich hier nur um ungefähre Annäherungen an die Wahrheit handeln kann, dürfen wir uns erlauben, die Glieder $\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2}$ zu vernachlässigen und dann wird der Ausdruck (1):

$$\frac{L^2}{2 g \gamma^2 \omega^2} \left[1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + \frac{2 g \mu F}{\omega}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die unregelmässigen Kanäle zwischen den Brennstoffstücken kann man als ein Röhrensystem ansehen, in welchem die Luft theils durch Reibung, theils durch wiederholt vorkommende plötzliche Geschwindigkeitsänderungen in ihrer Bewegung gehemmt wird. Die Reibungsfläche dieses Kanalsystems darf wohl dem Querschnitt und der Dicke der Brennstoffmasse proportional gesetzt werden. Die Geschwindigkeitsverluste in den Querschnittsverengungen und Erweiterungen werden um so öfter eintreten, je dicker die Brennstoffschichte ist. Die Summe der Horizontalquerschnitte aller Kanäle muss der Rostfläche proportional genommen werden. Man wird also für die Differenz zwischen dem atmosphärischen Druck und der Pressung in der Rauchkammer einen Annäherungsausdruck finden, wenn man in (2) setzt:

für ω eine der Rostfläche proportionale Grösse;

für $1 + \left(\frac{1}{m} - e\right)^2$ eine der Dicke der Brennstoffschichte proportionale Grösse;

für F eine dem Brennstoffvolumen proportionale Grösse.

Auf diese Weise findet man für die oben genannte Differenz folgenden Ausdruck:

$$c \lambda \left(\frac{L}{R}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

wobei λ die Dicke der Brennstoffschichte, R die Fläche des Rostes, c eine von der Natur des Brennstoffes und von der Grösse der Brennstoffstücke abhängige Grösse bezeichnet.

Durch Addition der Ausdrücke (2) und (3) findet man für den Unterschied zwischen dem äusseren atmosphärischen Druck und dem Druck in der Rauchkammer folgenden Ausdruck:

$$L^2 \left\{ \frac{c \lambda}{R^2} + \frac{1}{2 g \gamma^2} \left(\frac{1}{\omega}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + \frac{2 g \mu F}{\omega}\right] \right\} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Nun ist die Frage zu beantworten, in welcher Weise dieser Pressungsunterschied mit der Wirkung des Blasrohres zusammenhängt? Dies zu entscheiden wird wohl nicht leicht möglich sein. Wahrscheinlich ist dieser Pressungsunterschied der Geschwindigkeitshöhe proportional, die der Geschwindigkeit entspricht, mit welcher der Dampf durch die Mündung des Blasrohres austritt. Nennt man:

S die Dampfmenge in Kilogrammen, welche im Mittel in jeder Sekunde durch das Blasrohr entweicht;

Ω den Querschnitt der Mündung des Blasrohres;

$\mathfrak{A}$ den Druck der Atmosphäre auf einen Quadratmeter;

$\alpha + \beta \mathfrak{A}$ das Gewicht eines Kubikmeters Dampf von einer Atmosphäre Spannung, so ist die mittlere Ausströmungs-Geschwindigkeit:

$$\frac{S}{\Omega (\alpha + \beta \mathfrak{A})}$$

und dieser entspricht eine Geschwindigkeitshöhe

$$\frac{1}{2g}\frac{S^2}{\Omega^2(\alpha+\beta\mathfrak{A})^2}$$

Es ist aber $\frac{1}{2g(\alpha+\beta\mathfrak{A})}$ eine constante Zahl, die wir mit c bezeichnen wollen. Da es sich nur um eine Proportionalität handelt, so können wir nun setzen:

$$c\frac{S^2}{\Omega^2} = L^2\left\{\frac{c\lambda}{R^2}+\frac{1}{2g\gamma^2}\left(\frac{1}{\omega}\right)^2\left[1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\frac{2g\mu F}{\omega}\right]\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$L = \frac{S}{\Omega}\sqrt{\left\{\frac{c}{\frac{c\lambda}{R^2}+\frac{1}{2g\gamma^2}\left(\frac{1}{\omega}\right)^2\left[1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2+\frac{2g\mu F}{\omega}\right]}\right\}} \quad \ldots \quad (6)$$

Dieser Ausdruck bestimmt also unter der mit der Natur der Sache wahrscheinlich harmonirenden Voraussetzung: dass die Differenz zwischen dem atmosphärischen Druck und dem in der Rauchkammer herrschenden Druck der Geschwindigkeitshöhe, die der Ausströmung des Dampfes aus dem Blasrohr entspricht, proportional ist, die Luftmenge in Kilogrammen, die in einer Sekunde in die Kesselfeuerung einströmt.

Diese Luftmenge ist der Verdampfung S direkt, und dem Querschnitt der Blasrohrmündung verkehrt proportional. Damit die Pressungen in den Cylindern vor den Kolben möglichst klein ausfallen, soll die zur Erzeugung einer gewissen Dampfmenge erforderliche Luftmenge mit einer möglichst weiten Blasrohrmündung herbeigeführt werden. Es ist also für die Verwendung des Brennstoffes vortheilhaft, wenn der Nenner der Grösse unter dem Wurzelzeichen des Ausdrucks (6) klein ausfällt, d. h. es ist vortheilhaft: 1) eine grosse Rostfläche; 2) eine geringe Dicke der Brennstoffschichte; doch darf diese nicht unter eine gewisse Gränze herabsinken, weil sonst zu viel Luft in den Feuerraum eintreten könnte; 3) eine grosse Summe der Querschnitte aller Heizröhren; 4) die Contraktion beim Eintritt der Luft in die Heizröhren möglichst zu vermindern. In dieser Hinsicht sind die Ringe zur Befestigung der Röhren nicht gut, sondern es ist besser, wenn die Ränder der Röhren umgebogen werden.

Die Dampfausströmung und der mittlere Druck vor dem Kolben.

Die Bestimmung der Dampfausströmung ist mit grossen Schwierigkeiten verbunden, indem der Dampf nicht direkt in die freie Luft entweicht, sondern erst das Blasrohr durchströmt, um zuletzt durch die Mündung desselben zu entweichen. Die folgende Annäherungsrechnung beruht auf Voraussetzungen, die sich von der Wahrheit ziemlich weit entfernen dürften, aber die Resultate scheinen dennoch der Natur der Sache angemessener zu sein, als man vermuthen sollte.

Ich nehme an:

1. Die Spannung des Dampfes vor dem Kolben im Cylinder sei während der Kolbenbewegung constant. Diese Voraussetzung ist für den Beginn der Kolbenbewegung gewiss ganz unrichtig, sie gilt jedoch, wie auch Versuche gezeigt haben, wenn einmal der Kolben das erste Viertel seines Schubes zurückgelegt hat.

8.

2. In der ganzen Ausdehnung des Blasrohres bis in die Nähe seiner Mündung sei die Dampfspannung unveränderlich; diese Voraussetzung ist, wenn die Kolben langsam spielen, sehr unrichtig, gehen aber die Kolben sehr schnell, so folgen die einzelnen Ausströmungen so schnell auf einander, dass sie das Ohr kaum noch zu unterscheiden vermag, und für diesen Zustand kann man wohl annehmen, dass im Blasrohr nahe eine constante Spannung herrscht.

Nennt man:

S die Dampfmenge in Kilogrammen, welche in jeder Sekunde durch das Blasrohr ausströmt, so ist $\frac{1}{2}$ S die Dampfmenge, die im Mittel genommen in jeder Sekunde aus einem Cylinder entweicht;

$\mathfrak{A}_1$ die Spannung des Dampfes im Cylinder vor dem Kolben; $\mathfrak{A}_1$ bedeutet also den mittleren der Bewegung des Kolbens entgegenwirkenden Druck;

y die constante Spannung des Dampfes im Blasrohr;

$\mathfrak{A}$ den Druck der Atmosphäre auf 1 Quadratmeter;

$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta\mathfrak{A}_1\\ \alpha+\beta y\\ \alpha+\beta\mathfrak{A}\end{array}\right\}$ die Dichten der Dämpfe, deren Spannungen $\mathfrak{A}_1$, y und $\mathfrak{A}$ sind;

i die Wassermenge, welche durch jedes Kilogramm Dampf mit fortgerissen wird;

O Ω_1 Ω die Querschnitte des Dampfcylinders, eines Dampfkanales und der Mündung des Blasrohres.

Wenn man annimmt, dass der Dampf an den Ecken und Biegungen der Kanäle, die er zu durchströmen hat, um aus dem Cylinder in das Blasrohr zu gelangen, seine Geschwindigkeit, die er im Querschnitt Ω_1 besitzt, verliert, so sind

$$\sqrt{\frac{2g}{\beta(1+i)}\,\text{lognat.}\,\frac{\alpha+\beta\mathfrak{A}_1}{\alpha+\beta y}} \qquad \sqrt{\frac{2g}{\beta(1+i)}\,\text{lognat.}\,\frac{\alpha+\beta y}{\alpha+\beta\mathfrak{A}}}$$

die Geschwindigkeiten des Gemenges aus Dampf und Wasser in den Querschnitten Ω_1 und Ω. Man hat daher:

$$\frac{1}{2}S = \frac{2}{\pi}\Omega_1(\alpha+\beta y)\sqrt{\frac{2g}{\beta(1+i)}\,\text{lognat.}\,\frac{\alpha+\beta\mathfrak{A}_1}{\alpha+\beta y}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)^*$$

$$S = \Omega(\alpha+\beta\mathfrak{A})\sqrt{\frac{2g}{\beta(1+i)}\,\text{lognat.}\,\frac{\alpha+\beta y}{\alpha+\beta\mathfrak{A}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Allein da $\mathfrak{A}_1$ und y nicht viel von $\mathfrak{A}$ verschieden sein können, so darf man sich erlauben:

$$\text{lognat.}\,\frac{\alpha+\beta\mathfrak{A}_1}{\alpha+\beta y} = \text{lognat.}\left(1+\frac{\beta(\mathfrak{A}_1-y)}{\alpha+\beta y}\right) = \frac{\beta(\mathfrak{A}_1-y)}{\alpha+\beta y}$$

$$\text{lognat.}\,\frac{\alpha+\beta y}{\alpha+\beta\mathfrak{A}} = \text{lognat.}\left(1+\frac{\beta(y-\mathfrak{A})}{\alpha+\beta\mathfrak{A}}\right) = \frac{\beta(y-\mathfrak{A})}{\alpha+\beta\mathfrak{A}}$$

*) Es ist hier der mittlere Werth $\frac{\pi}{2\omega}$ der Ausströmungs-Oeffnung in Rechnung gebracht. Dieser mittlere Werth ist nämlich:

$$\frac{2}{\pi}\,\omega\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\Omega_1\,\text{sin.}\,\omega t\,dt = \frac{2}{\pi}\Omega_1$$

zu setzen. Dann werden die Ausdrücke (1) und (2):

$$\frac{1}{2} s = \frac{2}{\pi} \Omega_1 (\alpha + \beta y) \sqrt{\frac{2g}{1+i} \frac{\mathfrak{A}_1 - y}{\alpha + \beta y}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$s = \Omega (\alpha + \beta \mathfrak{A}) \sqrt{\frac{2g}{1+i} \frac{y - \mathfrak{A}}{\alpha + \beta \mathfrak{A}}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

oder wenn man diese Ausdrücke quadrirt:

$$\frac{1}{4} s^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \Omega_1^2 \frac{2g}{1+i} (\mathfrak{A}_1 - y)(\alpha + \beta y) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

$$s^2 = \Omega^2 \frac{2g}{1+i} (y - \mathfrak{A})(\alpha + \beta \mathfrak{A}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Sucht man aus (6) den Werth von y und setzt ihn in (5), so findet man:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} + \frac{s^2 (1+i)}{2g(\alpha + \beta \mathfrak{A})} \left\{ \frac{1}{\Omega^2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{4 \Omega_1^2} \frac{1}{1 + \frac{s^2 (1+i)}{2g \Omega^2} \frac{\beta}{(\alpha + \beta \mathfrak{A})^2}} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

und da, wegen der Kleinheit von β, $\frac{s^2 (1+i)}{2g\Omega^2} \frac{\beta}{(\alpha + \beta \mathfrak{A})^2}$ gegen die Einheit sehr klein ist, also vernachlässigt werden kann, so erhält man:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} + \frac{s^2 (1+i)}{2g(\alpha + \beta \mathfrak{A})} \left\{ \frac{1}{\Omega^2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{4 \Omega_1^2} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Berücksichtigt man auch die Contraktion in dem Querschnitt $\frac{2}{\pi} \Omega_1$ und bezeichnet den Contractions-Coeffizienten mit m_1, so wird:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} + \frac{s^2 (1+i)}{2g(\alpha + \beta \mathfrak{A})} \left[\left(\frac{1}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4 \Omega_1 m_1}\right)^2 \right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Vermittelst dieser Formel ist die folgende Tabelle berechnet:

Dampf-produktion per 1 Sekunde in Kilg.	Druck im Cylinder vor dem Kolben auf 1 Quadratcentimeter, wenn der Durchmesser der Mündung des Blasrohres ist:					
	5 Centim.	6 Centim.	7 Centim.	8 Centim.	9 Centim.	10 Centim.
0·6	2·063	1·564	1·348	1·244	1·189	1·157
0·8	2·864	1·976	1·594	1·409	1·310	1·254
1·0	—	2·507	1·909	1·620	1·466	1·378
1·2	—	—	2·296	1·879	1·657	1·530
1·4	—	—	2·752	2·184	1·882	1·709
1·6	—	—	—	2·536	2·142	1·919
1·8	—	—	—	—	2·437	2·151
2·0	—	—	—	—	—	2·414

Bei der Berechnung dieser Tabelle wurden für i, Ω_1, $\alpha + \beta \mathfrak{A}$, $2g$, k_1 folgende constante Werthe angenommen:

$$i = 0{\cdot}2 \quad \Omega_1 = 0{\cdot}01 \quad \alpha + \beta \mathfrak{A} = 0{\cdot}59 \quad 2g = 19{\cdot}62 \quad m_1 = 0{\cdot}6$$

Theoretische Bestimmung der wesentlichsten Abmessungen eines Lokomotivkessels.

Wenn ich im Nachstehenden zur Bestimmung der wesentlichsten Abmessungen eines Lokomotivkessels ein etwas complizirtes Formelwerk aufstelle, so geschieht es nicht in der Meinung, dass man darnach die Dimensionen von neu zu erbauenden Kesseln berechnen solle, sondern nur um zu zeigen, wie sich die Abmessungen nach den Anforderungen ändern. Wir werden aber doch auch für die Praxis einige einfache Regeln gewinnen.

Zur Lösung unserer Aufgabe müssen wir mehrere Resultate der vorhergehenden Untersuchungen zusammenfassen. Diese Resultate sind:

Die Formel (16), Seite 52, nämlich:

$$\frac{W}{B\mathfrak{H}} = \left[1 - (w - u_0)\frac{sL}{B\mathfrak{H}}\right]\left(1 - e^{-\frac{Fk}{Ls}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Formel (5), Seite 59, nämlich:

$$c\left(\frac{S}{\Omega L}\right)^2 = \frac{c\lambda}{R^2} + \frac{1}{2g\gamma^2}\left(\frac{1}{\omega}\right)^2\left[1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + \frac{2g\mu F}{\omega}\right] \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Die Formel (9), Seite 61, nämlich:

$$\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A} = \frac{S^2(1+i)}{2g(\alpha + \beta\mathfrak{A})}\left[\left(\frac{1}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4\Omega_1 m_1}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Nebst diesen Formeln brauchen wir noch folgende:

$$\left(\frac{W}{B\mathfrak{H}}\right) B\mathfrak{H} = [650 - t_0 + (w - t_0)\, i]\, S \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

$$L = \left(\frac{L}{B}\right) B \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

Die Formel (4) drückt aus, dass die in einer Sekunde in den Kessel eindringende Wärmemenge verwendet wird, um in jeder Sekunde S Kilogramme Dampf zu bilden und ferner um i S Kilogramme Wasser, das vom Dampf mit fortgerissen wird, von der Temperatur t_0 des Tenderwassers auf die Temperatur w des Kesselwassers zu bringen.

Aus diesen Gleichungen (1) bis (5) kann man zunächst ersehen, das zwei geometrisch ähnlich construirte, verhältnissmässig gleich stark geheizte Kessel sowohl für die Bildung, als auch für die Benutzung des Dampfes gleich vortheilhaft sind. Die Wahrheit dieses Ausspruches ist am leichtesten durch spezielle Annahmen zu erkennen. Nehmen wir z. B. an, alle linearen Dimensionen eines Kessels II seien $\sqrt{2}$ mal so gross, als die analogen Dimensionen eines Kessels I, dann sind die Werthe von Ω Ω_1 F R ω für den Kessel II zwei mal so gros als für den Kessel I. Eine verhältnissmässig gleich starke Heizung dieser Kessel findet statt, wenn die Höhe λ der Brennstoffschichte in beiden Kesseln gleich gross ist und wenn in II per 1 Sekunde zweimal so viel Brennstoff verbrannt wird als in I. Die für beide Kessel übereinstimmenden Grössen sind:

$$\mathfrak{H} \quad t_0 \quad w \quad i \quad m_1 \quad s \quad c \quad \lambda \quad \gamma \quad \mu \quad g \quad C \quad m$$

Aus der Gleichung (2) folgt zunächst, dass $\frac{S}{L}$ für beide Kessel den gleichen Werth hat; denn der Werth des Ausdruckes rechter Hand des Gleichheitszeichens wird für den Kessel II vier mal so gross als für I, der Ausdruck linker Hand muss also für II vier mal so gross werden als für I, dies ist aber nur möglich, wenn $\left(\frac{S}{L}\right)$ für beide Kessel den gleichen Werth hat.

Aus (1) und (4) folgt:

$$\frac{650 - t_0 + (w - t_0)\, i}{\mathfrak{H} B} \; \frac{S}{L} = \frac{\left[1 - (w - u_0)\frac{s L}{B \mathfrak{H}}\right]}{L} \left(1 - e^{-\frac{F k}{L s}}\right) \quad \dots\dots \quad (6)$$

Da $\frac{S}{L}$, wie wir eben gezeigt haben, für beide Kessel den gleichen Werth hat, so wird wegen B der Ausdruck linker Hand des Gleichheitszeichens von (6) für II halb so gross, als für I; es muss also auch der Ausdruck rechter Hand des Gleichheitszeichens für II halb so gross werden als für I. Dies ist aber nur möglich, wenn für II L noch einmal so gross ist als für I. Es ist somit nachgewiesen, dass die Werthe von $\frac{S}{L}$ $\frac{B}{L}$ $\frac{F}{L}$ für beide Kessel gleich grosse Werthe haben.

Hiernach folgt aber aus (1), dass das Güteverhältniss $\frac{W}{B\mathfrak{H}}$ für den einen Kessel so gross ist, wie für den andern, dass also die Dampferzeugung in beiden gleich vortheilhaft erfolgt.

Aus (3) folgt ferner, dass der Werth von $\mathfrak{A}_1$, d. h. die Spannung in den Cylindern vor den Kolben, in beiden Anordnungen gleich gross ausfällt, denn der Voraussetzung gemäss ist am Kessel II Ω und Ω_1 noch einmal so gross als am Kessel I. Der Ausdruck

rechter Hand des Gleichheitszeichens von (3) hat demnach für beide Kessel den gleichen Werth, es muss dies also auch hinsichtlich $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}$ der Fall sein.

Somit ist nun der Anfangs ausgesprochene Satz erwiesen. Man kann denselben noch allgemeiner aussprechen, indem man sagt: Alle Kessel, wie auch ihre Anordnungen beschaffen sein mögen, sind für die Bildung und Verwendung des Dampfes gleich vortheilhaft: 1) wenn die Flächenverhältnisse $\frac{R}{F}$ $\frac{\omega}{F}$ $\frac{\Omega}{F}$ $\frac{\Omega_1}{F}$ übereinstimmen; 2) wenn die Dicke λ der Brennstoffschichte den gleichen Werth hat; 3) wenn sie alle gleich stark geheizt werden, d. h. wenn für alle Kessel $\frac{B}{F}$ einerlei Werth hat.

Dies ist aber die Regel, die man seit langer Zeit gleichsam instinktiv in der Praxis befolgt hat, und die darauf hinausläuft, dass man um gute Kesselconstruktionen zu erhalten, nichts zu thun hat, als bereits bestehende Construktionen, die sich bewährt haben, in einem grösseren oder kleineren Maasstab nachzubilden. Man braucht also für die gewöhnliche Praxis zur Bestimmung der Abmessungen eines Kessels kein complizirtes Formelwerk, sondern es genügen aus der Erfahrung entnommene Verhältnisse für $\frac{R}{F}$ $\frac{\omega}{F}$ $\frac{\Omega}{F}$ $\frac{\Omega_1}{F}$.

Allein es gibt Fälle, in denen man durch Nachahmung von Bestehendem nicht gut zum Ziele kommt, und dies gilt insbesondere auch von den Lokomotivkesseln. Man kann die Kessel für starke und schwache Lokomotive nicht geometrisch ähnlich machen, denn die Kessel für starke Lokomotive würden nach dieser Regel eine unverhältnissmässige Länge erhalten, man muss starke Kessel verhältnissmäsig kürzer und weiter anordnen; auch ist es überhaupt zweckmässig, die Breite der Feuerbüchse und die horizontalen Durchmesser des Röhrenkessels so gross anzunehmen, als es die Spurweite der Bahn, die Radstellung und die Lage der Rahmen nur immer erlauben und nach diesen Annahmen die übrigen Dimensionen des Kessels zu bestimmen. Zu diesem Behufe können wir uns der Formeln (1) bis (5) bedienen. Es folgt aus denselben, wenn man das Güteverhältniss $\frac{W}{B\mathfrak{H}} = \mathfrak{p}$ setzt:

$$B = \frac{S}{\mathfrak{p}\,\mathfrak{H}} \left[(650 - t_0) + (w - t_0)\, i\right] \quad \dots \quad (7)$$

$$L = \left(\frac{L}{B}\right) B \quad \dots \quad (8)$$

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{1}{S} \sqrt{\left\{\frac{2\,g\,(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A})\,(\alpha + \beta\,\mathfrak{A})}{1 + i} - \left(\frac{\pi S}{4\,\Omega_1\,m_1}\right)^2\right\}} \quad \dots \quad (9)$$

$$F = L\,\frac{s}{k}\,\text{lognat.}\left\{\frac{1 - (w - u_0)\,\frac{s\,L}{B\,\mathfrak{H}}}{1 - \mathfrak{p} - (w - u_0)\,\frac{s\,L}{B\,\mathfrak{H}}}\right\} \quad \dots \quad (10)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{L}\sqrt{\left\{\frac{C}{c\lambda}\left(\frac{S}{\Omega}\right)^2 - \frac{1}{2\,g\,c\,\gamma^2\,\lambda}\left(\frac{L}{\omega}\right)^2\left[1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + 2\,g\,\mu\,\frac{F}{\omega}\right]\right\}} \quad \dots \quad (11)$$

Für einen zu construirenden Kessel ist zunächst als gegeben zu betrachten:

$\mathfrak{H}$ t_0 w i m_1 s m C c λ γ g μ

Soll der Kessel im Stande sein, eine bestimmte Quantität Dampf mit verhältnissmässig wenig Brennstoff zu erzeugen, und zwar bei einem schwachen schädlichen Vorderdruck $\mathfrak{A}_1$, so muss man folgende Annahmen machen:

1. Die Dampfmenge S, die in jeder Sekunde gebildet werden soll;
2. das Güteverhältniss $\mathfrak{p} = \frac{W}{B\,\mathfrak{H}}$, d. h. das Verhältniss zwischen der Wärmemenge, die in den Kessel eindringt und der Wärmemenge, die im Brennstoff enthalten ist;
3. die Pressung $\mathfrak{A}_1$, die in den Cylindern vor den Kolben eintreten darf;
4. Das Verhältniss $\frac{L}{B}$ zwischen der Luftmenge, die in den Feuerherd einströmt und der Brennstoffmenge, die verbrannt werden soll;
5. das Verhältniss $\frac{S}{\Omega_1}$ zwischen der Dampfmenge, die in jeder Sekunde gebildet werden soll und dem Querschnitt eines Dampfkanales an den Cylindern.

Nebst diesen Grössen ist es auch zweckmässig, noch die Spurweite, die Radstellung, die Rahmenlage und den Querschnitt des Röhrenkessels anzunehmen, und sich über den Durchmesser der engen Heizröhren zu entscheiden. Hiedurch wird aber ω, d. h. die Summe der Querschnitte aller Heizröhren bestimmt.

Vermittelst dieser Daten erhält man nun:

durch (7) die Brennstoffmenge, die in einer Sekunde auf dem Rost verbrannt werden muss;

durch (8) die Luftmenge, welche per 1″ in die Feuerung strömen muss;

durch (9) den Querschnitt der Blasrohrmündung;

durch (10) die totale Heizfläche des Kessels, endlich

durch (11) die Grösse der Rostfläche.

Aus dieser Gleichung (11) ersieht man, dass die Construktionsverhältnisse eines Kessels durch einen grossen Querschnitt desselben vortheilhaft werden. Macht man nämlich diesen Querschnitt gross, so erhalten die Heizröhren eine geringe Länge, und fällt der Werth von ω gross aus; der Rost kann also dann wie aus (11) erhellt, eine kleinere Ausdehnung erhalten.

Für die Construktion von mächtigen Lasten- oder Berglokomotiven ist eine enge Spurweite ein sehr misslicher Umstand. Bei einer grossen Spurweite kann man dem Röhrenkessel eine grosse horizontale Weite geben, und man erhält dann, selbst wenn man ihn cylindrisch rundet, eine geringe Länge. Ist die Spurweite eng, so muss man zu ovalen, oder überhaupt zu nicht einfach cylindrisch gerundeten Formen seine Zuflucht nehmen, was für die Solidität nicht gut ist und die Ausführung in mancher Hinsicht erschwert.

Die Formeln (7) bis (11) geben folgende numerische Werthe.

Setzt man:

$$t_0 = 60^\circ \quad w = 150^\circ \quad i = 0{\cdot}3 \quad \mathfrak{H} = 7000 \quad \frac{L}{B} = 16 \quad s = 0{\cdot}2669 \quad k = \frac{1}{158}$$

so geben die Formeln (7), (8), (10):

für $\mathfrak{p}$ =	0·50	0·55	0·60	0·65	0·70
$\frac{B}{S}$ =	0·176	0·160	0 147	0·135	0·126
$\frac{S}{B}$ =	5·68	6·25	6·80	7·40	7·93
$\frac{L}{S}$ =	2·82	2·58	2·35	2·16	2·02
$\frac{F}{S}$ =	94	99	106	111	123

Nimmt man an, dass die mittlere Spannung des Dampfes in den Cylindern vor den Kolben $1+\frac{1}{4}$ Atmosphäre betragen dürfe, so ist $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A} = \frac{1}{4}\ 10330 = 2582$ Kilogramm. Setzt man ferner:

$$\frac{S}{\Omega_1} = 80 \quad m_1 = 0{\cdot}6 \quad \pi = 3{\cdot}14 \quad \alpha + \beta\,\mathfrak{A} = 0{\cdot}59 \quad i = 0{\cdot}3 \quad g = 9{\cdot}81$$

so gibt die Formel (9) für den Querschnitt des Blasrohres:

$$\Omega = \frac{S}{110} \text{ Quadratmeter}$$

Was die Formel (11) betrifft, so fehlen mir direkte Messungen über die in der Feuerbüchse und in der Rauchkammer unter gewissen Umständen herrschenden Spannungen, ich vermuthe jedoch, dass man der Wahrheit nahe kommen wird, wenn man setzt:

$$c = 5 \quad C = 0{\cdot}002$$

Vermittelst dieser Werthe und wenn man ferner nimmt $\lambda = 0{\cdot}6$ $g = 9{\cdot}81$ $\gamma = 0{\cdot}5$ (Gewicht von 1 Kubikmeter Luft bei 500° Temperatur) $\mu = 0{\cdot}0003302$ $m = 0{\cdot}6$ gibt die Formel (11):

$$\frac{L}{R} = \sqrt{\left[0{\cdot}00066\left(\frac{S}{\Omega}\right)^2 - \left(\frac{L}{\omega}\right)^2\left(0{\cdot}0491 + 0{\cdot}00022\,\frac{F}{\omega}\right)\right]} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Wenn das Güteverhältniss des Kessels 60% beträgt, haben wir gefunden:

$$L = \frac{2{\cdot}35}{106} F = \frac{F}{45} \qquad S = \frac{F}{106}$$

Für diese Verhältnisse und wenn man ferner $\frac{S}{\Omega} = 110$ nimmt, folgt aus obiger Formel:

$$\frac{F}{R} = \sqrt{\left[16171 - \left(\frac{F}{\omega}\right)^2\left(0\ 0491 + 0{\cdot}00022\,\frac{F}{\omega}\right)\right]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Die numerischen Werthe dieses Ausdruckes sind:

für $\frac{F}{\omega}$ =	150	200	250	300
$\frac{F}{R}$ =	120	111	98	76

Heizung der Lokomotivkessel.

Die Art und Weise, wie die Lokomotivkessel geheizt werden sollen, um eine möglichst ökonomische Verwendung des Brennstoffes zu erzielen, ist durch die Erfahrung noch nicht entschieden. Gewöhnlich wird die Feuerbüchse vor der Abfahrt des Zuges in der Art mit Coaks gefüllt, dass die Oberfläche der Brennstoffmasse eine muldenförmige Fläche bildet, die von den unteren Röhren des Röhrenkessels an gegen den unteren Rand

der Heizthüre concav bogenförmig ansteigt. Die mittlere Dicke dieser Brennstoffmasse (das Volumen derselben dividirt durch den Querschnitt des Feuerkastens) beträgt dann durchschnittlich 0·7 Meter. Diese Brennstoffmenge wird aber während der Fahrt nicht beibehalten, sondern man fährt, ohne nachzufeuern so lange fort, bis die mittlere Dicke der Brennstoffschichte 0·3 bis 0·4 Meter beträgt, und sucht sodann diesen Füllungszustand während der weiteren Fortsetzung der Fahrt zu erhalten. Besondere Versuche zur Ermittlung der vortheilhaftesten oder angemessensten Feuerungsart sind meines Wissens bis jetzt nur auf den österreichischen Staatsbahnen angestellt worden, und werden auch jetzt noch immer fortgesetzt. Die österreichischen Ingenieure glauben durch ihre Versuche zu dem Ergebniss gekommen zu sein, dass für eine vortheilhafte Verwendung des Brennstoffes die Dicke der Coaksschichte nicht mehr als 0·1 Meter, also nur den siebenten Theil von der durchschnittlich üblichen, oder gerade nur so viel betragen soll, als in den mit Steinkohlen gefeuerten Fabrikdampfkesseln. Dieses Ergebniss muss auf unrichtigen Beobachtungen, oder es muss auf einem Fehlschluss beruhen. Es weiss doch Jedermann, dass die Lokomotive beinahe nicht, oder nur schwach, dass dagegen die Fabrikkamine in der Regel sehr stark rauchen; es lehrt also schon der Augenschein, dass in den Lokomotivkesseln die Verbrennung wenigstens eben so vollkommen erfolgt, als in den Fabrikkesseln, obgleich in den Ersteren die Dicke der Brennstoffschichte oftmals siebenmal so gross ist, als in den Letzteren. Schon diese Thatsachen lassen vermuthen, dass es auf die Dicke der Brennstoffschichte allein nicht ankommen kann; bedenkt man aber ferner, dass in den Cupolöfen bei einer Brennstoffschichte von 2 Meter und in den Hochöfen bei einer Brennstoffschichte von 10 Meter Dicke eine äusserst vollkommene Verbrennung ohne Rauchentwicklung stattfindet, so muss man die Ueberzeugung gewinnen, dass gleich vollkommene Verbrennungen bei sehr verschiedenen Dicken der Brennstoffschichte stattfinden können, man wird aber auch bemerken, dass die Lebhaftigkeit der Anfachung zur Dicke der Brennstoffschichte in einem umgekehrten Verhältniss steht. Die Dicke der Coaks- oder Kohlenschichte beträgt: 1) in den mit sehr schwacher Anfachung arbeitenden *Cornwall*'schen Dampfkesseln nur 0·08 Meter; 2) in den gewöhnlichen durch ein Kamin schwach angefachten Feuerungen der Fabrikkessel 0·10 bis 0·12 Meter; 3) in den stark durch die Dampfausströmung angefachten Lokomotivkesseln 0·4 bis 0·7 Meter; 4) in den durch Ventilatoren angefachten Cupolöfen circa 2 Meter; endlich 5) in den durch mächtige Cylindergebläse angefachten Hochöfen 10 bis 15 Meter.

Aus diesen Thatsachen ersieht man, dass eine vollkommene Verbrennung nicht durch die Dicke der Brennstoffschichte, sondern durch das Verhältniss der Dicke der Schichte zur Lebhaftigkeit der Anfachung bedingt ist. Dieses Verhältniss drückt aber auch die Zeit aus, in der die Luft durch die Brennstoffschichte geht, oder es drückt die Zeit aus, während welcher die Luft mit dem gluthenden Brennstoff in Berührung bleibt; d. h. es folgt aus diesen Thatsachen der Wirklichkeit, dass eine vollkommene Verbrennung dann stattfindet, wenn die das Verbrennen unterhaltende Luft eine gewisse Zeit mit dem im verbrennenden Zustand befindlichen Brennstoff in Berührung bleibt.

Nennen wir nun:

R die Rostfläche;

mR die Summe der Querschnitte aller Luftspalten zwischen den Roststäben;

F die totale Heizfläche eines Kessels;

$\mathfrak{B}$ das Volumen der auf dem Rost liegenden Brennstoffmenge (Coaks oder Steinkohlen);

$\Delta = \frac{\mathfrak{B}}{R}$ die mittlere Dicke der auf dem Rost liegenden Brennstoffmenge;

B die Brennstoffmenge in Kilogrammen, welche in jeder Sekunde verbrennt;

v die Anfachungsgeschwindigkeit, welche wir nach der Geschwindigkeit messen wollen, mit welcher die Luft die Rostspalten durchströmt;

so sind wir zunächst nach den oben angegebenen Thatsachen der Wirklichkeit berechtigt zu setzen:

$$\varDelta = \alpha v \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wobei nun α die durch Erfahrung für jede besondere Brennstoffart zu bestimmende Zeit bezeichnet, während welcher die das Verbrennen unterhaltende Luft mit dem im verbrennenden Zustand befindlichen Brennstoff in Berührung bleiben soll.

Es ist ferner:

$$\mathfrak{B} = \varDelta R \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Bei gleich vollkommener Verbrennung muss die durch die Rostspalten in einer Sekunde einströmende Luftmenge $v m R$ der Brennstoffmenge B, die in jeder Sekunde verbrennen soll, proportional sein. Wir müssen daher setzen:

$$v m R = \beta B \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

wobei β ein nur allein von der Natur des Brennstoffs abhängiger Coeffizient ist.

Aus diesen Gleichungen findet man leicht:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{\alpha \beta}{m} B \\ \varDelta &= \frac{\alpha \beta}{m} \frac{B}{R} \\ v &= \frac{\beta}{m} \frac{B}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Die Coeffizienten $\alpha\ \beta\ m$ bestimmen wir für Coaks- oder Steinkohlen-Feuerungen auf folgende Art:

Für Fabrikkessel, die mit Steinkohlen gefeuert werden, ist m gleich $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$. Für Lokomotivkessel, die mit Coaks gefeuert werden, ist dagegen in der Regel m gleich $\frac{1}{2}$

Die kleinste Luftmenge, welche zum vollständigen Verbrennen von 1 Kilogramm Steinkohlen oder Coaks erforderlich ist, beträgt durchschnittlich 11 Kilogramm. Die wirkliche die Verbrennung unterhaltende Luftmenge darf um die Hälfte grösser, also zu $\frac{3}{2} \cdot 11$ oder noch zu 16 Kilogramm, oder zu $\frac{16}{1 \cdot 3} = 12$ Kubikmeter angenommen werden. Es ist daher für Steinkohlen- oder Coaksfeuerungen $\beta = 12$ zu setzen. Auf 1 Quadratmeter Rostfläche eines Fabrikkessels verbrennen in der Regel bei gut unterhaltener Feuerung stündlich 48 Kilogramm Steinkohlen, und dabei beträgt die Dicke der Kohlenschichte 0·1 Meter. Für eine solche Feuerung ist daher zu setzen:

$$\varDelta = 0 \cdot 1 \qquad \frac{B}{R} = \frac{48}{3600} = \frac{1}{76} \qquad m = 0 \cdot 25$$

und dann findet man aus der zweiten der Gleichungen (4):

$$\alpha \beta = m \varDelta \frac{R}{B} = 0 \cdot 25 \times 0 \cdot 1 \times 76 = 1 \cdot 9$$

Es ist aber $\beta = 12$, daher finden wir $\alpha = 0{\cdot}16$.

Vermittelst dieser Werthe von α und β geben die Gleichungen (4):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= 1{\cdot}9 \frac{B}{m} \\ \varDelta &= 1{\cdot}9 \frac{B}{m R} \\ v &= 12 \frac{B}{m R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Diese Gleichungen sagen aus: die erste, dass die auf dem Rost liegende Brennstoffmenge der in jeder Sekunde zu verbrennenden Menge proportional sein soll; die zweite und dritte, dass die Dicke der Brennstoffschichte und die Anfachungs-Geschwindigkeit der in 1 Sekunde zu verbrennenden Brennstoffmenge direkt und der Rostfläche verkehrt proportional sein soll.

Bestimmen wir den Coeffizienten α, indem wir von einer Lokomotivkesselheizung ausgehen, so finden wir für α den gleichen Werth. In einem Lokomotivkessel von 80 Quadratmetern Heizfläche verbrennen, wenn die mittlere Dicke der Brennstoffschichte 0·7 Meter beträgt und mit einer engen Blasrohrmündung heftig angefacht wird, auf 1 Quadratmeter Rostfläche in jeder Sekunde durchschnittlich 0·185 Kilogramm Coaks. Setzen wir in den Ausdruck:

$$\alpha \beta = m \varDelta \frac{R}{B}$$

$$m = 0{\cdot}5 \qquad \varDelta = 0{\cdot}7 \qquad \frac{B}{R} = 0{\cdot}185$$

so finden wir wie früher $\alpha \beta = 1{\cdot}9$.

Bezeichnen wir durch $\mathfrak{p}$ das Güteverhältniss einer Kesselheizung, so ist nach Gleichung (16), Seite 52:

$$\mathfrak{p} = a\left(1 - e^{-\frac{F k}{L s}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wobei zur Abkürzung $1 - (w - u_0)\frac{s L}{B \mathfrak{H}} = a$ gesetzt wurde.

Aus diesem Ausdruck (6) findet man:

$$B = -\frac{\frac{B}{L}\,\frac{k}{s}}{\text{lognat.}\left(1 - \frac{\mathfrak{p}}{a}\right)} F \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Führt man diesen Werth von B in die Gleichungen (5) ein, so erhält man:

$$\mathfrak{B} = -\frac{1{\cdot}9}{m} \frac{\frac{B}{L}\,\frac{k}{s}}{\text{lognat.}\left(1 - \frac{\mathfrak{p}}{a}\right)} F \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\left.\begin{array}{l} \varDelta = -\frac{1 \cdot 9}{m} \frac{\frac{B}{L}\frac{k}{s}}{\text{lognat.}\left(1-\frac{\mathfrak{p}}{a}\right)} \frac{F}{R} \\ \\ v = -\frac{12}{m} \frac{\frac{B}{L}\frac{k}{s}}{\text{lognat.}\left(1-\frac{\mathfrak{p}}{a}\right)} \frac{F}{R} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Für eine gut unterhaltene Feuerung darf man setzen:

$$a = 0 \cdot 9 \qquad k = \frac{1}{158} \qquad s = 0 \cdot 2669 \qquad \frac{B}{L} = \frac{1}{16}$$

und dann findet man:

für $\mathfrak{p}$	= 0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8
$\frac{B}{F_1}$	= 0·0038	0·0026	0·0020	0·0014	0·0011	0·0007
$\frac{m\mathfrak{B}}{F}$	= 0·0069	0·0047	0·0038	0·0027	0·0021	0·0013
$\frac{m\varDelta R}{F}$	= 0·0069	0·0047	0·0038	0·0027	0·0021	0·0013
$\frac{m v R}{F}$	= 0·0456	0·0312	0·0240	0·0168	0·0132	0·0084

Für Lokomotivkessel ist durchschnittlich $\frac{F}{R} = 90$, $m = 0 \cdot 5$, und dann wird:

für $\mathfrak{p}$	= 0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	
$\varDelta$	= 1·24	0·84	0·76	0·49	0·37	0·23	Meter.
v	= 8·2	5·6	4·3	3·0	2·4	1·5	„

Für Fabrikkessel ist durchschnittlich $\frac{F}{R} = 15$ $m = 0 \cdot 25$, und dann wird:

für $\mathfrak{p}$	= 0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	
$\varDelta$	= 0·41	0·28	0·23	0·16	0·12	0·08	Meter.
v	= 2·7	1·8	1·4	1·0	0·8	0·5	„

IV.

Der mittlere Fortlauf der Lokomotive.

Bedingungen,

welche erfüllt sein müssen, damit die Triebräder im Moment der Abfahrt so wie auch während der Fahrt nicht glitschen.

Es sei W der totale Widerstand, welcher der Fortbewegung des ganzen Wagenzuges entgegenwirkt. W ist also auch die Zugkraft, mit welcher man vorn an dem Rahmen der Lokomotive anziehen müsste, um den Wagenzug in Bewegung zu bringen.

P die Kraft, mit welcher ein Kolben der Lokomotive getrieben wird, d. h. die Differenz der Pressungen, welche gegen beide Flächen des Kolbens ausgeübt werden. Diese Kraft P ist bei einer nicht expandirenden Lokomotive während des ganzen Kolbenschubes beinahe constant, bei einer expandirenden Lokomotive während der Dauer der Expansion variabel. Wir wollen eine nicht expandirende Lokomotive voraussetzen, dürfen also P als eine constante Kraft betrachten.

F der Reibungswiderstand sämmtlicher Triebräder, d. h. die Reibung, welche der Summe der Pressungen entspricht, mit welcher die Räder der Kurbelaxen und sämmtliche mit diesen Rädern verkuppelten Räder gegen die Bahn gepresst werden.

Nehmen wir an, dass im Moment der Abfahrt die Kurbeln zufällig so gestellt sind, dass beide Kolben vorwärts laufen, wenn die Fahrt nach vorwärts beginnt, und dass die Kurbeln mit den Axen der Cylinder die Winkel α und $90 + \alpha$ bilden.

Der Halbmesser einer Kurbel sei r, der Halbmesser eines Triebrades, so wie auch eines jeden mit einem Triebrad gekuppelten Rades R.

Im Moment der Abfahrt wird jeder der beiden Kolben mit einer Kraft P nach rechts getrieben, und dies hat zur Folge, dass auf jeden der beiden Kurbelzapfen nach horizontaler Richtung eine Pressung P nach vorwärts ausgeübt wird. Dies ist streng richtig, wie lang oder wie kurz die Schubstangen sein mögen. Allein durch die im Innern eines Cylinders herrschenden Spannungen wird nicht nur der Kolben, sondern auch der Cylinder eben so stark, aber nach entgegengesetzter Richtung gepresst, jeder Cylinder wird also mit einer Kraft P nach links getrieben, wenn sein Kolben mit einer Kraft P nach rechts gedrückt wird; und da die Cylinder mit dem Rahmenbau fest verbunden sind, so wird dieser letztere mit einer Kraft $2P$ nach links getrieben, wenn beide Kolben mit einer Kraft $2P$ nach rechts getrieben werden. Nun ist aber der Widerstand W als eine der Bewegung der Lokomotive entgegenwirkende Kraft anzusehen, der Rahmenbau wird also im Ganzen mit einer Kraft $W + 2P$ nach links getrieben, und wenn dennoch eine Bewegung nach rechts eintreten soll, so kann dies nur dadurch geschehen, dass die Kurbelaxe gegen die Axenhalter einen Druck ausübt, der wenigstens gleich $W + 2P$ ist.

Nehmen wir vorläufig an, die Reibung sämmtlicher Triebräder gegen die Bahn sei so stark, dass ein Glitschen dieser Räder nicht eintritt. Dann unterliegt es keiner Schwierigkeit, die Kraft zu bestimmen, mit welcher die Kurbelaxe durch die auf die Kurbelzapfen wirkenden Kräfte gegen die Axenhalter vorwärts treibt. Heissen wir diese Kraft für einen Augenblick X, so muss das statische Moment derselben in Bezug auf eine durch den Berührungspunkt der Räder mit der Bahn gehende Queraxe eben so gross sein als die Summe der Momente der Pressungen auf die Kurbelzapfen in Bezug auf die gleiche Axe. Das Moment von X ist RX. Die von B aus auf die Richtungen der Kurbelzapfenpressungen gefällten Perpendikel haben annähernd die Längen $R + r \sin. \alpha$, $R + r \sin. (90 + \alpha)$, oder $R + r \sin. \alpha$ und $R + r \cos. \alpha$. Die Summe jener Momente ist daher:

$$P (R + r \sin. \alpha) + P (R + r \cos. \alpha) = 2 P R + P r (\sin. \alpha + \cos. \alpha)$$

Man hat daher:

$$R X = 2 P R + P r (\sin. \alpha + \cos. \alpha)$$

und:

$$X = 2 R + P \frac{r}{R} (\sin. \alpha + \cos. \alpha)$$

Wenn die Räder auf der Bahn nicht glitschen, so wird die Bewegung beginnen, wenn P wenigstens so gross ist, dass $X = W + 2 P$ wird, d. h. wenn

$$2 P + P \frac{r}{R} (\sin. \alpha + \cos. \alpha) = W + 2 P$$

ist. Hieraus folgt für den kleinsten Werth von P:

$$P = W \frac{\frac{R}{r}}{\sin. \alpha + \cos. \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dieser Ausdruck wird innerhalb α gleich 0 und α gleich 90^0 am allergrössten, wenn $\alpha = 0^0$ oder wenn $\alpha = 90^0$ ist, und in beiden dieser Fälle wird der Werth von P:

$$W . \frac{R}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

So stark muss also ein Kolben getrieben werden, damit der Widerstand W auch dann überwunden werden kann, wenn der Zufall es wollte, dass im Moment der Abfahrt einer der beiden Kolben am Ende, der andere dagegen in der Mitte seines Schubes stünde, also überhaupt nur eine Maschine treibend wirkte.

Nun wollen wir weiter sehen, was nothwendig ist, damit die Triebräder auf der Bahn nicht glitschen.

Die auf die Kurbelzapfen wirkenden Kräfte bestreben sich, die Kurbelaxe mit einem Moment gleich $P (r \sin. \alpha + r \cos. \alpha)$ zu drehen. Um dies zu verhindern, muss am Umfang des Triebrades eine Kraft $P \frac{r}{R} (\sin. \alpha + \cos. \alpha)$ nach entgegengesetzter Richtung wirken, d. h. die Reibung F aller gekuppelten Räder auf der Bahn muss daher wenigstens $P \frac{r}{R} (\sin. \alpha + \cos. \alpha)$ sein, oder der kleinste Werth von F, durch welchen ein Glitschen der Räder verhindert wird, ist:

$$F = P \frac{r}{R} (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Dieser Werth von F wird am grössten, wenn $\alpha = 45^0$, d. h. wenn $\sin.\alpha + \cos.\alpha = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = 1{\cdot}414$ und beträgt dann:

$$1{\cdot}414 \; P \frac{r}{R} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Am leichtesten tritt also im Moment, wenn der Wagenzug abfahren soll, ein Glitschen der Räder auf der Bahn ein, wenn die Kurbeln im ersten und zweiten, oder im dritten und vierten Quadranten so stehen, dass sie gegen eine Vertikallinie Winkel von 45° bilden; und wenn in dieser ungünstigsten Stellung ein Glitschen nicht eintreten soll, muss die Reibung aller gekuppelten Räder gegen die Bahn wenigstens $1{\cdot}414 \; P \frac{r}{R}$ betragen.

Setzt man hier für P den oben (2) gefundenen Werth $W \frac{R}{r}$, der vorhanden sein muss, damit die Lokomotive die für die Abfahrt nöthige Zugkraft selbst dann besitzt, wenn im Moment der Abfahrt einer der Kolben am Anfang, der andere in der Mitte des Schubes stünde, so findet man für den Betrag der Reibung, welche gegen das Glitschen sichert, folgenden Werth:

$$1{\cdot}414 \,.\, W \,.\, \frac{R}{r} \cdot \frac{r}{R} = 1{\cdot}414 \; W \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Wenn also die Abfahrt auch unter den ungünstigsten Verhältnissen ohne Glitschen der Räder erfolgen soll, muss die Reibung aller gekuppelten Räder auf der Bahn 1·414 mal so viel betragen als der Widerstand, und es genügt nicht, wenn sie nur, wie man gewöhnlich glaubt, genau so viel beträgt als der Widerstand selbst.

Ist der Wagenzug in den Beharrungszustand seiner Bewegung getreten, in welchem alle Umdrehungen eines Triebrades in gleichen Zeiten geschehen, so tritt in den Cylindern eine Dampfspannung ein, bei welcher die durch die Pressungen auf die Kolben während einer Umdrehung eines Rades entwickelte Arbeitsgrösse durch die Ueberwältigung des Widerstandes W consumirt wird. Nennen wir für einen Augenblick P_1 diese Kraft, mit welcher ein Kolben im Beharrungszustand getrieben wird, so entwickeln beide Kolben während einer Umdrehung eines Triebrades zusammen eine Wirkungsgrösse $2 \times 4 r \times P_1 = 8 r P_1$. Bei einer Umdrehung eines Triebrades legt aber der Wagenzug einen Weg $2 R \pi$ zurück, wird also der Widerstand W durch eine Weglänge $2 R \pi$ überwunden, es beträgt mithin die durch den Widerstand consumirte Wirkung $2 R \pi W$. Es ist demnach im Beharrungszustand der Bewegung:

$$8 r P_1 = 2 R \pi W$$

folglich:

$$P_1 = \frac{\pi}{4} \frac{R}{r} W$$

Setzt man diesen Werth von P_1 statt P in den Ausdruck (4), so erhält man die Reibung, welche im Beharrungszustand der Bewegung die sämmtlichen Triebräder hervorbringen müssen, damit sie während des Laufes nicht glitschen. Diese Reibung ist demnach:

$$1{\cdot}414 \,.\, \frac{\pi}{4} \frac{R}{r} W \,.\, \frac{r}{R} = 1{\cdot}11 \; W \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Vergleicht man diesen Werth mit (5), so sieht man, dass die Fortsetzung der Fahrt mit einer geringeren Reibung der Räder auf der Bahn erfolgen könnte als die Abfahrt.

Der Beharrungszustand der Bewegung einer Lokomotive.

Wenn eine gleichförmig geheizte Lokomotive mit einer angehängten Wagenreihe auf einer geradlinigen Bahnstrecke durch längere Zeit fortgelaufen ist, nähert sich ihre Bewegung immer mehr und mehr einem Beharrungszustand, in welchem alle Umdrehungen der Triebräder in gleichen Zeiten geschehen, und der ferner von der Art ist, dass die Zustände der Lokomotive am Anfange und am Ende jeder Umdrehung der Triebräder in jeder Hinsicht ganz identisch sind. Es müssen also am Anfange und am Ende jeder Umdrehung der Triebräder gleiche Werthe haben: 1) die Geschwindigkeiten der Lokomotive; 2) die lebendigen Kräfte der Massen der Lokomotive; 3) die Dampfspannungen im Kessel; 4) die im Kessel enthaltene Wasser- und Dampfmenge; 5) die Temperaturen in allen Theilen der Lokomotive.

Diese Identität der Zustände am Anfange und am Ende jeder Umdrehung der Triebräder ist nur unter folgenden Bedingungen möglich:

1. Die Gleichheit der Geschwindigkeiten und der lebendigen Kräfte am Anfange und Ende jeder Umdrehung der Triebräder ist nur möglich, wenn die Summe der Wirkungen, welche die Pressungen des Dampfes gegen die Kolben während jeder Umdrehung der Triebräder entwickeln, eben so gross ist als die Summe der Wirkungen, welche sämmtliche der Bewegung der Lokomotive entgegen wirkenden Widerstände während jeder Umdrehung der Triebräder consumiren.
2. Die Gleichheit der Wasser- und Dampfvolumen im Kessel am Anfange und am Ende jeder Umdrehung ist nur möglich, wenn die Pumpen bei jeder Umdrehung eben so viel Wasser in den Kessel liefern, als aus demselben in Dampf oder flüssiger Form entweicht.
3. Die Gleichheit der Dampfspannungen kann nur stattfinden, wenn aus dem Kessel während jeder Umdrehung eben so viel Dampf entfernt wird, als in der Zeit einer Umdrehung durch die in den Kessel eindringende Wärme gebildet wird.
4. Die Gleichheit der Temperaturverhältnisse ist nur möglich, wenn während jeder Umdrehung der Triebräder die durch den Brennstoff entwickelte Wärmemenge eben so gross ist als die aus der Lokomotive entweichende.

Werden diese vier Gleichheiten mit mathematischer Schärfe analytisch ausgedrückt, so erhält man vier Gleichungen, aus welchen alle auf den Beharrungszustand sich beziehenden Fragen beantwortet werden können.

Um diese vier Gleichheiten analytisch auszudrücken, wählen wir folgende Bezeichnungen:

O der Querschnitt eines Dampfcylinders;

l die Länge des Kolbenschubes;

v die mittlere Geschwindigkeit der Dampfkolben;

V die mittlere Fortlaufgeschwindigkeit der Lokomotive;

D der Durchmesser eines Triebrades;

l_1 die Länge des Weges, den ein Kolben bei einem Schub zurücklegt, bis die Dampfzuströmung aufgehoben wird;

m der Coeffizient für den schädlichen Raum, d. h. die Zahl, mit welcher man das Volumen $O\,l$, das der Kolben bei einem Schub beschreibt, multipliziren muss, um zu erhalten die Summe von dem Volumen eines Dampfkanales und dem Volumen zwischen Cylinderdeckel und Kolben, wenn dieser am Ende eines Schubes ist;

y der Druck des Dampfes im Cylinder hinter dem Kolben auf einen Quadratmeter, nachdem derselbe vom Beginne des Schubes an einen Weg x zurückgelegt hat;

ϱ der Druck auf einen Quadratmeter, welcher im Cylinder vor dem Kolben herrscht, nachdem derselbe vom Beginne des Schubes an einen Weg x zurückgelegt hat;

p_1 der Druck des Dampfes im Cylinder hinter dem Kolben auf einen Quadratmeter in dem Moment, wenn die Dampfzuströmung durch den Steurungsschieber aufgehoben wird;

p_m r_m die mittleren Werthe von y und ϱ, d. h. diejenigen constanten Werthe, welche während eines Schubes eben so grosse Wirkungen produziren und consumiren würden wie die veränderlichen Werthe von y und ϱ. Es ist also:

$$p_m\, l = \int_0^l y\, d\, x \qquad r_m\, l = \int_0^l \varrho\, d\, x$$

t die Zeit eines Kolbenschubes; es ist also $v = \frac{l}{t}$

S die Dampfmenge in Kilogrammen, welche in jeder Sekunde gebildet wird;

s die Dampfmenge in Kilogrammen, die in jeder Sekunde verloren geht durch unvollkommene Verschlüsse und Dichtungen;

q die Wassermenge, die in jeder Sekunde durch den aus der Maschine entweichenden Dampf mit fortgerissen wird;

u_0 die Temperatur des Wassers, mit welchem der Kessel gespeist wird;

u die Temperatur des Dampfes im Kessel;

q_0 die Wassermenge in Kilogrammen, die in jeder Sekunde in den Kessel getrieben wird;

W der totale Widerstand des Trains und der Lokomotive in Kilogrammen, oder die Kraft, welche an der Lokomotive ziehend im Stande wäre, alle Hindernisse zu überwinden, die durch die Differenz der gegen die Kolben wirkenden Pressungen überwunden werden;

$\mathfrak{W}$ die Wärmemenge, welche in jeder Sekunde in den Kessel eindringt;

$\mathfrak{w}$ die Wärmemenge, welche in jeder Sekunde aus den Oberflächen aller Theile der Lokomotive in die Luft entweicht.

Dies vorausgesetzt, können wir nun die Bedingungen des Beharrungszustandes analytisch ausdrücken.

Es ist:

$\int_0^l O\, y\, d\, x$ die Wirkung des Dampfes gegen einen Kolben während eines Schubes;

$\int_0^l O\, \varrho\, d\, x$ die schädliche Gegenwirkung des vor dem Kolben herrschenden Druckes während eines Schubes;

$W\, D\, \pi$ die Wirkung, welche der Ueberwindung des Widerstandes W durch eine Weglänge $D\, \pi$ während einer Umdrehung entspricht.

Die Gleichheit der während einer Umdrehung produzirten und consumirten Wirkungen wird ausgedrückt durch:

$$4 \int_0^l O\, y\, d\, x - 4 \int_0^l O\, \varrho\, d\, x = W\, D\, \pi$$

Dividirt man diese Gleichung durch l und berücksichtigt man, dass:

$$\frac{\int_0^l y\,dx}{l} = p_m \qquad \frac{\int_0^l \varrho\,dx}{l}$$

so findet man:

$$O\,(p_m - r_m) = W\,\frac{D\pi}{4\,l} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Bei einem Kolbenschub wird der Raum $O\,l_1 + m\,O\,l$ eines Cylinders mit Dampf erfüllt. Dieser Dampf hat in dem Augenblick, wenn die Füllung beendigt ist, eine Spannung p_1, ein Kubikmeter dieses Dampfes hat also ein Gewicht $\alpha + \beta\,p_1$. Bei jedem einfachen Kolbenschub consumirt also ein Cylinder dem Gewicht nach eine Dampfmenge $O\,(l_1 + ml)\,(\alpha + \beta\,p_1)$, und da bei einer Umdrehung vier Cylinder-Füllungen vorkommen, so ist der Dampfverbrauch bei einer Umdrehung der Triebräder $4\,O\,(l_1 + ml)\,(\alpha + \beta\,p_1)$. Es ist aber die Zeit einer Umdrehung $\frac{2\,l}{v}$, demnach der mittlere Dampfverbrauch in 1 Sekunde:

$$\frac{4\,O\,(l_1 + ml)\,(\alpha + \beta\,p_1)}{\frac{2\,l}{v}} = 2\,O\,v\left(\frac{l_1}{l} + m\right)(\alpha + \beta\,p_1)$$

Da aber ausserdem in jeder Sekunde auch noch eine Dampfmenge s durch unvollkommene Dichtungen verloren geht, so hat man:

$$S = 2\,O\,v\left(\frac{l_1}{e} + m\right)(\alpha + \beta\,p_1) + s \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

In jeder Sekunde muss diese Dampfmenge S aus Wasser von u_0 Grad Temperatur gebildet werden. Dazu ist eine Wärmemenge $(650 - u_0)\,S$ nothwendig. In jeder Sekunde entweichen aber auch q Kilogramm Wasser mit u Grad Temperatur, wodurch ein Wärmeverlust von $q\,(u - u_0)$ Wärmeeinheiten entspringt. Da noch überdiess $\mathfrak{w}$ Wärmeeinheiten durch Abkühlung an der Oberfläche verloren gehen, so hat man schliesslich die Gleichung:

$$\mathfrak{W} = (650 - u_0)\,S + q\,(u - u_0) + \mathfrak{w} \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

Nebst diesen Gleichungen besteht noch wegen des geometrischen Zusammenhanges der Maschinenbestandtheile die Beziehung:

$$\frac{V}{v} = \frac{D\pi}{2\,l} \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Diese vier Gleichungen sind keine Annäherungen, sondern absolute Wahrheiten, vorausgesetzt, dass für die einzelnen Zeichen die vollkommen wahren Werthe gesetzt werden. Allein die ganz wahre Bestimmung einiger dieser Grössen, und namentlich der Werthe von p_m und r_m, s q $\mathfrak{w}$ ist mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden; man muss sich daher mit Annäherungswerthen begnügen.

Lokomotive mit Maschinen, die nicht expandiren.

Wir wollen zunächst die aufgefundenen Bedingungsgleichungen des Beharrungszustandes auf Lokomotive mit nicht expandirenden Maschinen anwenden, erlauben uns aber

einige Voraussetzungen zu machen, durch welche die Rechnung wesentlich vereinfacht wird, ohne der Genauigkeit der Resultate merklich zu schaden. Wir nehmen an:

1. Die Dampfeinströmung daure bis an's Ende des Kolbenschubes, wir setzen also $l_1 = l$. Dies ist bekanntlich bei Schiebern der Fall, die nur sehr schwache äussere und innere Ueberdeckung haben.
2. Die Spannung des Dampfes im Cylinder hinter dem Kolben habe während der ganzen Dauer des Schubes einen unveränderlichen Werth p. Dann ist $p_m = p_1 = p$. Diese Voraussetzung nähert sich der Wahrheit um so mehr, je kleiner die Geschwindigkeit der Kolben ist, und je geringer die Hindernisse sind, welche der Ueberströmung des Dampfes aus dem Kessel in den Cylinder entgegenwirken, je grösser also die Querschnitte der Regulator- und der Dampfeinströmungs-Oeffnungen sind.
3. Die Spannung vor dem Kolben habe einen constanten Werth r, der von dem atmosphärischen Druck nicht beträchtlich abweicht. Diese Annahme nähert sich der Wahrheit um so mehr, je kleiner die Geschwindigkeit des Kolbens ist und je grösser die Oeffnungen sind, durch welche der Dampf ausströmt. Unter dieser Voraussetzung ist $r_m = r$.
4. Wir erlauben uns auch noch den Dampfverlust s, den Wärmeverlust $\mathfrak{w}$ und die vom Dampf mit fortgerissene Wassermenge q zu vernachlässigen, setzen also:

$$s = o \quad \mathfrak{w} = o \quad q = o$$

Unter diesen Voraussetzungen werden die Bedingungsgleichungen (1) bis (4) des Beharrungszustandes:

$$\left.\begin{aligned} p &= r + \frac{W}{O}\,\frac{D\pi}{4l} \\ S &= 2\,O\,v\,(1+m)\,(\alpha+\beta\,p) \\ \mathfrak{W} &= (650 - u_0)\,S \\ \frac{V}{v} &= \frac{D\pi}{2l} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

Da diese Gleichungen keine absoluten Wahrheiten, sondern nur Annäherungen ausdrücken, so werden auch die Folgerungen, die sich aus demselben ziehen lassen, nur als Annäherungen an die Wahrheit zu betrachten sein. Um jedoch das Wort „Annäherung" nicht so oftmals wiederholen zu müssen, wollen wir die aus (5) sich ergebenden Folgerungen so aussprechen, wie wenn die Gleichungen (5) vollkommen wahr wären.

In diesen vier Gleichungen kommen nebst den constanten Grössen α β π r die nach Umständen veränderlichen Grössen p W D e S O v V $\mathfrak{W}$ u_0 vor, deren Anzahl 10 ist. Es können also $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1. \times 2 \times 3 \times 4} = 210$ verschiedene Fragen gestellt und beantwortet werden. Einige dieser Fragen sind von besonderem praktischen Interresse, wir wollen uns daher mit deren Beantwortung beschäftigen.

Geschwindigkeit, mit welcher eine Lokomotive einen Wagenzug bei einer bekannten Dampfproduktion fortzuziehen vermag.

Es sei gegeben W D l O S u_0 und zu suchen V v p $\mathfrak{W}$. Das will sagen: an eine wirklich existirende Lokomotive sei eine Wagenreihe angehängt, die mit Einschluss des

Widerstandes, denn die Lokomotive verursacht einen totalen Widerstand W der Bewegung entgegensetzt. Im Kessel werde in jeder Sekunde eine Dampfmenge von S Kilogramm gebildet und die Temperatur des Tenderwassers sei u_0. Es soll nun berechnet werden: 1) die Spannung p des Dampfes in den Cylindern; 2) die Geschwindigkeit v der Kolben; 3) die Geschwindigkeit V der Fahrt; 4) die Wärmemenge, welche per 1'' in den Kessel eindringt.

Die erste der Gleichungen (5) gibt direkt für die Dampfspannung p den Werth:

$$p = r + \frac{W}{O} \frac{D\pi}{4l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt:

$$v = \frac{S}{2\,O\,(1+m)(\alpha + \beta\,p)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Die vierte Gleichung gibt:

$$V = v \cdot \frac{D\pi}{2l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Die dritte Gleichung gibt endlich:

$$\mathfrak{W} = (650 - u_0)\,S \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Aus der Gleichung (6) ersieht man, dass die Spannung des Dampfes in den Cylindern unabhängig ist von der Geschwindigkeit der Fahrt und von der in jeder Sekunde gebildeten Dampfmenge, also auch unabhängig ist von der mehr oder weniger lebhaften Kesselheizung, und dass diese Spannung abhängt: 1) von der vor dem Kolben herrschenden Spannung; 2) von dem Verhältnis $\frac{D}{l}$ zwischen dem Durchmesser der Triebräder und der Länge des Kolbenschubes; 3) von dem Querschnitt O der Dampfcylinder und 4) von dem zu bewältigenden Widerstand W. Für eine bestimmte Lokomotive haben $\frac{D}{l}$ und O ganz bestimmte Werthe und kann man auch r als eine constante Grösse ansehen. Die Dampfspannung p ist also für jede bestimmte Lokomotive nur allein mit dem Widerstand W veränderlich. Ein Lokomotivführer mag also seine Maschine wie immer behandeln, er mag viel oder wenig einfeuern, den Regulator mehr oder weniger öffnen, es wird doch, wenn der Beharrungszustand eingetreten ist, in den Cylindern immer die gleiche Dampfspannung eintreten, so lange der Widerstand der gleiche bleibt. Diese Dampfspannung fällt gross aus, wenn der Widerstand gross, die Cylinder klein und die Triebräder gross sind.

Da nun p von S nicht abhängt, so zeigt die Gleichung (7), dass die Geschwindigkeit v der Kolbenbewegung der in einer Sekunde produzirten Dampfmenge proportional ist. Bei ungeändertem Widerstand bringt also eine zwei-, drei-, viermal grössere Dampfproduktion eine zwei-, drei-, viermal grössere Geschwindigkeit hervor.

Die Voraussetzung, dass die Werthe von W und r constant und von S und V unabhängig sind, findet in den meisten Fällen nicht statt. In einem Beharrungszustand, in welchem eine grössere Dampferzeugung stattfindet, muss erstlich eine grössere Geschwindigkeit eintreten, muss also schon wegen des Luftwiderstandes der Totalwiderstand W wachsen. In einem Beharrungszustand, in welchem eine grössere Dampferzeugung stattfindet, muss ferner eine grössere Dampfmenge durch das Blasrohr ausströmen, muss

also nothwendig der vor dem Kolben herrschende Widerstand r grösser sein. Mit dem Wachsen von S nimmt also W und r zu, und folglich auch vermöge Gleichung (6) der Werth von p. So wie aber p und folglich auch $(\alpha+\beta p)$ wächst, so kann vermöge Gleichung (7) die Geschwindigkeit v nicht mehr in dem Maase wachsen als S wächst, sondern in einem geringeren Grade.

Das so eben mit Worten Gesagte kann auch auf dem Wege der Rechnung nachgewiesen werden, wenn man für W und r ihre wahren analytisch ausgedrückten Werthe einführt.

Vortheilhafteste Verhältnisse hinsichtlich des Brennstoffaufwandes.

Wir wollen uns die Frage zur Beantwortung vorlegen, unter welchen Bedingungen das Verhältniss zwischen der Effektleistung einer Lokomotive und dem Brennstoffaufwand am günstigsten ausfällt.

Es ist $W\,V$ die nützliche Wirkung, welche eine Lokomotive in einer Sekunde entwickelt, $\frac{W\,V}{\mathfrak{W}}$ die nützliche Wirkung, welche die Lokomotive mit jeder in den Kessel eindringenden Wärmeeinheit hervorbringt. Dieses Verhältniss bestimmt also das Güteverhältniss der Maschinenleistung, und soll einen möglichst grossen Werth haben. Aus den Gleichungen (5) findet man leicht:

$$\frac{W\,V}{\mathfrak{W}} = \frac{1}{(650-u_0)}\,\frac{p-r}{\alpha+\beta p}\,\frac{1}{1+m}$$

Für grössere Dampfspannungen über 3 Atmosphären, wie sie bei Lokomotiven vorkommen, ist α gegen βp eine kleine Grösse, man begeht daher keinen merklichen Fehler, wenn man in diesem Ausdruck α gegen βp vernachlässiget; dann erhält man aber:

$$\frac{W\,V}{\mathfrak{W}} = \frac{1}{\beta(650-u_0)}\left(1-\frac{r}{p}\right)\frac{1}{1+m} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Das Güteverhältniss der Maschinenleistung richtet sich also, wie aus diesem Ausdruck erhellt, einzig und allein nach dem Verhältniss der mittleren Pressungen, die im Beharrungszusand der Bewegung hinter dem Kolben und vor demselben eintreten. Oder eine im Verhältniss zu dem schädlichen Vorderdruck r grosse Dampfspannung p ist die Bedingung einer günstigen Kraftentwicklung.

Um also eine vortheilhafte Leistung einer Lokomotive zu erzielen, ist im Wesentlichen nur nothwendig, solche Verhältnisse eintreten zu lassen, dass im Beharrungszustand der Beweguug in den Dampfcylindern eine hohe Dampfspannung stattfindet.

Es ist aber vermöge Gleichung (6):

$$p = r + \frac{W}{O}\,\frac{D\pi}{4\,l}$$

woraus man sieht, dass die Dampfspannung gross ausfällt, wenn der Widerstand W und die Triebräder gross, das Volumen $O\,l$ des Dampfcylinders dagegen klein ist. Um also kleine Lasten vortheilhaft fortschaffen zu können, muss man Lokomotive mit grossen Triebrädern und kleinen Cylindern anwenden. Um aber grosse Lasten vortheilhaft, jedoch nicht mit einer zu übermässigen Dampfspannung fortzuschaffen, muss man Lokomotive

mit kleinen Triebrädern und grossen Cylindern benutzen. Personenzuglokomotive erfordern also grosse Triebräder und kleine Cylinder, Lastenzuglokomotive dagegen kleine Triebräder und grosse Cylinder.

Bestimmung der wesentlichsten Dimensionen einer neu zu erbauenden Lokomotive.

An eine neu zu erbauende Lokomotive stellt man zunächst die Bedingung, dass dieselbe einen gewissen Widerstand W mit einer gewissen Geschwindigkeit V zu überwinden im Stande sein soll. Damit aber die Lokomotive hinsichtlich des Brennstoffaufwandes vortheilhaft wirken kann, muss im Beharrungszustand der Bewegung in den Cylindern eine Dampfspannung p von einer gewissen Höhe eintreten, die jedoch diejenigen Grenzen nicht überschreiten darf, an welchen der Zustand des Kessels gefährlich werden könnte. Für die vortheilhafteste Leistung einer Lokomotive ist die Kolbengeschwindigkeit nicht ganz gleichgültig. In dem aufgefundenen Güteverhältniss (10) erscheint sie zwar nicht direkt, ist aber doch darin versteckt enthalten, denn eine grosse Kolbengeschwindigkeit vergrössert nicht nur den schädlichen Vorderdruck, sondern kann auch bewirken, dass zuletzt, wenn die Dampfzuströmung aufgehoben wird, eine Dampfspannung p_1 eintritt, die beträchtlich höher ist als die mittlere Pressung p_m, wodurch das Güteverhältniss ungünstig wird. Aber nicht nur für die Brennstoffökonomie, sondern auch für den soliden Fortbestand des geordneten Zusammenhanges der Maschinenbestandtheile ist eine mässige Geschwindigkeit vortheilhaft. Aus diesen Andeutungen geht hervor, dass für eine neu zu erbauende Lokomotive die Grössen p r V v W u_0 angenommen, die Grössen $O, \frac{D}{l}$, S und $\mathfrak{W}$ dagegen aus den Gleichungen (5) gesucht werden müssen.

Die letzte dieser Gleichungen (5) gibt zunächst:

$$\frac{D}{l} = \frac{2}{\pi} \frac{V}{v} \qquad (11)$$

Setzt man diesen Werth in die erste der Gleichungen (5) und sucht sodann O, so findet man:

$$O = \frac{1}{2} \frac{W}{p - r} \frac{V}{v} \qquad (12)$$

Aus der zweiten und dritten der Gleichungen (5) folgt nun weiter:

$$\left.\begin{aligned} S &= 2\,O\,v\,(1 + m)\,(\alpha + \beta p) \\ \mathfrak{W} &= (650 - u_0)\,S \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Durch (11) wird ein gewisses Verhältniss zwischen dem Durchmesser eines Triebrades und der Länge des Kolbenschubes bestimmt, die absoluten Werthe dieser Grössen bleiben jedoch willkürlich. Berücksichtiget man, dass die Communicationswechsel jedes mal mit gewissen Störungen verbunden sind, so erscheint ein langer Kolbenschub als vortheilhaft, aber gewisse Grenzen kann man nicht überschreiten, weil sonst wegen (11) der Durchmesser die Triebräder zu gross genommen werden müssten. Die Gleichung (12) bestimmt den Querschnitt eines Dampfcylinders. Dieser ist, wie man sieht, dem Widerstand W und der Fahrgeschwindigkeit V direkt, der Pressungsdifferenz $p - r$ und der

Kolbengeschwindigkeit v dagegen verkehrt proportional. Eine Lokomotive erfordert durchaus compendiöse Maschinen, also auch kleine Dampfcylinder; man muss daher eine hohe Dampfspannung und eine grosse Kolbengeschwindigkeit eintreten lassen; obgleich diese letztere für die Kraftleistungen ungünstig ist.

Wie die Grössen p r V v zu nehmen sind, um im Ganzen vortheilhafte und für die Ausführung zweckmässige Dimensionen in allen Theilen der Lokomotive zu erhalten, soll in der Folge angegeben werden; vorläufig handelt es sich nur um Grundsätze.

Lokomotive mit expandirenden Maschinen.

Die früher aufgestellten Gleichungen (1) bis (4) gelten auch für expandirende Maschinen, es kömmt nur darauf an, dass man die richtigen Werthe von p_m r_m und p_1 einführt. Wir berechnen zunächst p_m unter folgenden Voraussetzungen: 1) die Spannung des Dampfes im Cylinder habe vom Beginne des Kolbenschubes an bis zur Absperrung hin einen unveränderlichen Werth p. Dann ist p_1 ebenfalls gleich p; 2) die Expansion, welche beginnt nachdem der Kolben einen Weg l_1 zurückgelegt hat, dauere bis an das Ende des Kolbenschubes fort; 3) die Expansion erfolge sowohl ohne Wärme, als auch ohne Dampfverlust.

Nennen wir y die Spannung des Dampfes im Cylinder hinter dem Kolben, nachdem derselbe einen Weg x zurückgelegt hat, der grösser als l ist, so hat man:

$$p_m = \frac{O\,p\,l + \int_{l_1}^{l} O\,y\,dx}{O\,l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

In dem Moment, in welchem die Absperrung eintritt, ist in dem Volumen $O\,l_1$, das bis dahin der Kolben zurückgelegt hat und in dem schädlichen Raum $m\,O\,l$ eine Dampfmenge $(O\,l_1 + m\,O\,l)\,(\alpha + \beta\,p) = O\,l\left(\frac{l_1}{l} + m\right)(\alpha + \beta\,p)$ eingeschlossen. Nachdem der Kolben den Weg x zurückgelegt hat, befindet sich diese Dampfmenge in einem Volumen $O\,x + m\,O\,l$ und die Spannung ist y; man hat daher die Gleichheit:

$$O\,l\left(\frac{l_1}{l} + m\right)(\alpha + \beta\,p) = O\,(x + m\,l)\,(\alpha + \beta\,y)$$

Hieraus folgt:

$$y = \frac{l_1 + m\,l}{x + m\,l}\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) - \frac{\alpha}{\beta}$$

und nun findet man:

$$\int_{l_1}^{l} O\,y\,dx = O\,(l_1 + m\,l)\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right)\int_{l_1}^{l}\frac{dx}{x + ml} - O\,\frac{\alpha}{\beta}\,(l - l_1)$$

$$= O\,(l_1 + m\,l)\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right)\text{lognat.}\,\frac{l + m\,l}{l_1 + m\,l} - O\,\frac{\alpha}{\beta}\,(l - l_1)$$

Der Werth von p_m wird demnach:

$$p_m = \left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right)\left[\frac{l_1}{l} + \left(\frac{l_1}{l} + m\right)\text{lognat.}\,\frac{l + ml}{l_1 + ml}\right] - \frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Oder wenn wir der Kürze wegen:

$$\frac{l_1}{l} + \left(\frac{l_1}{l} + m\right) \text{lognat.} \frac{1 + ml}{l_1 + ml} = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

setzen, so erhält man:

$$p_m = \left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) k - \frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Die vor dem Kolben herrschende Spannung ist bei einer expandirenden Maschine weniger veränderlich, als bei einer nicht expandirenden Maschine und ist nicht viel grösser als der atmosphärische Druck. Wir erlauben uns daher für r_m einen bestimmten, von dem atmosphärischen Druck nicht beträchtlich verschiedenen Werth, den wir mit r bezeichnen wollen, in Rechnung zu bringen. Setzt man in die Gleichungen (1) bis (4), Seite 76 für p_m den obigen Werth (4), ferner $r_m = r$ $p_1 = p$, und vernachlässigt die Verluste s und $\mathfrak{w}$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&O\left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) k - \left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)\right] = W \frac{D\pi}{4l} \\
&S = 2 O v \left(\frac{l_1}{l} + m\right) (\alpha + \beta p) \\
&\frac{V}{v} = \frac{D\pi}{2l} \\
&\mathfrak{W} = (650 - u_0) S \\
&k = \frac{l_1}{l} + \left(\frac{l_1}{l} + m\right) \text{lognat.} \frac{1 + ml}{l_1 + ml}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

welche ähnlich wie die Gleichungen (5), Seite 77 zur Beantwortung verschiedener Fragen gebraucht werden können.

Geschwindigkeit, mit welcher eine expandirende Lokomotive einen Train fortzieht.

Als erste Anwendung dieser Gleichungen wollen wir die Frage beantworten, mit welcher Geschwindigkeit eine expandirende Maschine einen Wagenzug, der einen bestimmten Widerstand W verursacht, fortzieht, wenn in jeder Sekunde eine gewisse Dampfmenge S produzirt wird. In diesem Falle ist gegeben W D l O $\frac{l_1}{l}$ m S α β r; zu suchen dagegen p v V $\mathfrak{W}$.

Aus der ersten der Gleichungen (5) folgt:

$$p = \frac{1}{k}\left[\frac{W}{O}\frac{D\pi}{4l} + \left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)\right] - \frac{\alpha}{\beta}$$

oder wenn man für k seinen Werth setzt:

$$p = \frac{\frac{W}{O}\frac{D\pi}{4l} + \left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)}{\frac{l_1}{l} + \left(\frac{l_1}{l} + m\right) \text{lognat.} \frac{1 + ml}{l_1 + ml}} - \frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Hat man p berechnet, so gibt die zweite der Gleichungen (5):

$$v = \frac{S}{2\,O\left(\frac{l_1}{l} + m\right)(\alpha + \beta p)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und nun ist noch ferner:

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{D\pi}{2l} v \\ \mathfrak{W} &= (650 - u_0)\, S \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Vortheilhafteste Leistungen einer expandirenden Lokomotive.

Es ist $W V$ die nützliche Wirkung der Lokomotive, $\frac{W V}{\mathfrak{W}}$ die Wirkung, die sie mit jeder in den Kessel eindringenden Wärmeeinheit entwickelt. Dieses Verhältniss muss für die vortheilhaftesten Umstände ein Maximum werden.

Aus den Gleichungen (5) findet man leicht:

$$\frac{W V}{\mathfrak{W}} = \frac{1}{650 - u_0} \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) k - \left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)}{\left(\frac{l_1}{l} + m\right)(\alpha + \beta p)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Es ist nun die Frage, wie p und wie $\frac{l_1}{l}$ genommen werden soll, damit dieses Güteverhältniss den grössten Werth erhält. Dieser Ausdruck kann auch geschrieben werden wie folgt:

$$\frac{W V}{\mathfrak{W}} = \frac{1}{(650 - u_0)\,\beta} \frac{k - \frac{\alpha + \beta r}{\alpha + \beta p}}{\left(\frac{l_1}{l} + m\right)}$$

und hieraus ersieht man zunächst, dass eine im Verhältniss zum schädlichen Vorderdruck r möglichst hohe Dampfmenge vortheilhaft ist.

Setzt man zur Berechnung des vortheilhaftesten Werthes von $\frac{l_1}{l}$ der Kürze wegen $\frac{W V}{\mathfrak{W}} = y \quad \frac{l_1}{l} = x$, so wird:

$$k = x + (x + m)\,\text{lognat.} \frac{1 + m}{x + m}$$

$$y = \frac{1}{(650 - u_0)\,\beta} \frac{x + (x + m)\,\text{lognat.} \frac{1 + m}{x + m} - \frac{\alpha + \beta r}{\alpha + \beta p}}{x + m}$$

Differenzirt man diesen Ausdruck, so findet man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(650 - u_0)\beta} \frac{x - \frac{\alpha + \beta r}{\alpha + \beta p}}{(x + m)^2}$$

Für den vortheilhaftesten Werth von x muss $\frac{dy}{dx}$ gleich Null werden. Dies ist der Fall für:

$$x = \frac{l_1}{l} = \frac{\alpha + \beta r}{\alpha + \beta p} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

Bezeichnet man die am Ende des Kolbenschubes in dem Cylinder vorhandene Spannung mit z, so hat man zur Bestimmung derselben die Gleichung:

$$(O\, l_1 + m\, O\, l)(\alpha + \beta p) = (O\, l + m\, O\, l)(\alpha + \beta z)$$

Hieraus folgt:

$$z = \left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) \frac{\frac{l_1}{l} + m}{1 + m} - \frac{\alpha}{\beta}$$

Setzt man hier für $\frac{l_1}{l}$ den obigen, der vortheilhaftesten Expansion entsprechenden Werth (10), so erhält man die Dampfspannung, welche in dem Cylinder am Ende des Kolbenschubes eintritt, wenn die vortheilhafteste Expansion stattfindet. Dieser Werth von z ist:

$$z = r + \frac{m}{1 + m}(p - r)$$

ist also wegen des schädlichen Raumes etwas grösser als der schädliche Vorderdruck. Die vortheilhafteste Expansion ist also diejenige, bei welcher am Ende eines Kolbenschubes die Pressungen zu beiden Seiten eines Kolbens beinahe gleich gross sind, bei welcher also ein Kolben, wenn er an das Ende eines Schubes gelangt, gar nicht mehr treibend wirken kann.

Bestimmung der wesentlichsten Dimensionen expandirender Maschinen für neu zu erbauende Lokomotive.

Für neu zu erbauende Lokomotive mit expandirenden Maschinen müssen die Grössen

$$W \quad V \quad v \quad p \quad \frac{l_1}{l} \quad m \quad \alpha \quad \beta$$

angenommen, dagegen die Grössen

$$O \quad \frac{D}{e} \quad S \quad \mathfrak{B}$$

bestimmt werden, was vermittelst der Gleichungen (5) geschehen kann.

Durch Elimination von $\frac{D\pi}{2l}$ folgt aus der ersten und dritten dieser Gleichungen

$$o = \frac{W V}{2 v \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) k - \left(\frac{\alpha}{\beta} + r\right)\right]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Hat man diesen Werth von o berechnet, so gibt die zweite dieser Gleichungen:

$$S = 2 O v \left(\frac{l_1}{l} + m\right) (\alpha + \beta p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Ferner die dritte:

$$\frac{D}{e} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{V}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Endlich die vierte:

$$\mathfrak{W} = (650 - u_0)\, S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Die Güteverhältnisse einer Lokomotive mit expandirenden und einer Lokomotive mit nicht expandirenden Maschinen.

Dividirt man das für expandirende Maschinen gefundene Güteverhältniss (9) durch das für nicht expandirende Maschinen gefundene Güteverhältniss (10), Seite 79, so erhält man einen Quotienten γ, welcher ausdrückt, wie vielmal die Wirkung einer Wärmeeinheit bei einer expandirenden Maschine grösser ist als bei einer nicht expandirenden. Wenn man annimmt, dass die Spannung des Dampfes hinter dem Kolben in den expandirenden Maschinen bis zum Beginn der Expansion eben so gross ist als in den nicht expandirenden Maschinen während des ganzen Kolbenschubes, findet man für den bezeichneten Quotienten γ folgenden Ausdruck:

$$\gamma = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right) k - \left(\frac{\alpha}{\beta} + p\right)}{p - r} \cdot \frac{1 + m}{\frac{l_1}{l} + m}$$

Setzen wir $p = 60000$ $\frac{\alpha}{\beta} = 3018$ $m = 0{\cdot}05$ $r = 12500$, so wird mit Berücksichtigung des Werthes von k (5):

$$\text{für } \frac{l_1}{l} = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{4}$$

$$\gamma = 1{\cdot}58 \quad 1{\cdot}33 \quad 1{\cdot}23$$

Das Expansionsprinzip verspricht, wie man aus diesen Zahlen ersieht, keine glänzenden Resultate. Berücksichtigt man, dass eine Expansionssteurung einen grösseren Widerstand verursacht und einen complizirteren, daher schwieriger zu hehandelnden Mechanismus erfordert, dass ferner bei etwas starker Expansion ungleichförmige Bewegungen entstehen und eine zu schwache Feueranfachung durch das Blasrohr eintritt, dass endlich expandirende Maschinen für gleiche Kraftentwicklung grössere Cylinder erhalten müssen, die für die Befestigung wenigstens sehr unbequem sind: so kann man von der Anwendung des Expansionsprinzips bei Lokomotiv-Maschinen kaum einen praktischen Vortheil erwarten, und es erklärt sich hieraus die Thatsache, dass die Lokomotive mit expandirenden Maschinen keine allgemeine Verbreitung gefunden haben.

Fahrt mit zwei Lokomotiven.

Es ist nicht ohne Interesse, die Bewegung eines Wagenzuges zu untersuchen, der von zwei ungleich construirten und ungleich geheizten Lokomotiven gezogen wird.

Wir wollen annehmen, dass die beiden Lokomotive mit nicht expandirenden Maschinen versehen sind, und bezeichnen durch W den totalen Widerstand des Trains mit Einschluss der Widerstände der Lokomotive, durch V die Geschwindigkeit des ganzen Zuges im Beharrungszustand seiner Bewegung, ferner:

O_1 O_2 die Querschnitte der Cylinder;
l_1 l_2 die Kolbenschube;
D_1 D_2 die Durchmesser der Triebräder;
v_1 v_2 die Kolbengeschwindigkeiten;
S_1 S_2 die Dampfmengen in Kilogrammen, welche in den Lokomotiven in jeder Sekunde gebildet werden;
p_1 p_2 die Dampfspannungen in den Cylindern hinter den Kolben;
r_1 r_2 die schädlichen Vorderpressungen;
α β die Coeffizienten zur Bestimmung des Gewichtes von einem Kubikmeter Dampf;
m_1 m_2 die Coeffizienten für die Berechnung der schädlichen Räume der Cylinder.

Im Beharrungszustand der Bewegung bestehen nun folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,O_1\,(p_1 - r_1)\,v_1 + 2\,O_2\,(p_2 - r_2)\,v_2 = W\,V \\ S_1 = 2\,O_1\,v_1\,(\alpha + \beta\,p_1)\,(1 + m_1) \\ S_2 = 2\,O_2\,v_2\,(\alpha + \beta\,p_2)\,(1 + m_2) \\ \dfrac{V}{v_1} = \dfrac{D_1\,\pi}{2\,l_1} \\ \dfrac{V}{v_2} = \dfrac{D_2\,\pi}{2\,l_2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Aus der zweiten und dritten dieser Gleichungen folgt:

$$p_1 = \frac{S_1}{2\,O_1\,v_1\,\beta\,(1 + m_1)} - \frac{\alpha}{\beta} \qquad p_2 = \frac{S_2}{2\,O_2\,v_2\,\beta\,(1 + m_2)} - \frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Führt man diese Werthe in die erste der Gleichungen (1) ein, so erhält man:

$$\frac{S_1}{\beta\,(1 + m_1)} + \frac{S_2}{\beta\,(1 + m_2)} - 2\left[O_1\,v_1\left(\frac{\alpha}{\beta} + r_1\right) + O_2\,v_2\left(\frac{\alpha}{\beta} + r_2\right)\right] = W\,V$$

Substituirt man für v_1 und v_2 Die Werthe, welche die vierte und fünfte der Gleichungen (1) darbieten, und sucht sodann V, so findet man:

$$V = \frac{\dfrac{S_1}{\beta\,(1 + m_1)} + \dfrac{S_2}{\beta\,(1 + m_2)}}{W + \dfrac{4\,O_1\,l_1}{D_1\,\pi_1}\left(\dfrac{\alpha}{\beta} + r_1\right) + \dfrac{4\,O_2\,l_2}{D_2\,\pi_2}\left(\dfrac{\alpha}{\beta} + r_2\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Drückt man in den Gleichungen (2) v_1 und v_2 durch V aus, und substituirt sodann für V den so eben gefundenen Werth (3), so findet man:

$$p_1 = \frac{\frac{S_1}{1+m_1}}{\frac{S_1}{1+m_1}+\frac{S_2}{1+m_2}} \frac{W + \frac{4 O_1 l_1}{D_1 \pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_1\right) + \frac{4 O_2 l_2}{D_2 \pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_2\right)}{\frac{4 O_1 l_1}{D_1 \pi}} - \frac{\alpha}{\beta} \quad . \; . \; . \quad (4)$$

$$p_2 = \frac{\frac{S_2}{1+m_2}}{\frac{S_1}{1+m_1}+\frac{S_2}{1+m_2}} \frac{W + \frac{4 O_1 l_1}{D_1 \pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_1\right) + \frac{4 O_2 l_2}{D_2 \pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_2\right)}{\frac{4 O_2 l_2}{D_2 \pi}} - \frac{\alpha}{\beta} \quad . \; . \; . \quad (5)$$

Nennt man noch Z_1 und Z_2 die Zugkräfte der beiden Lokomotive, so ist:

$$Z_1 V = 2 O_1 (p_1 - r_1) v_1 \qquad Z_2 V = 2 O_2 (p_2 - r_2) v_2$$

oder, wenn man v_1 und v_2 durch V ausdrückt:

$$Z_1 = \frac{4 O_1 l_1}{D_1 \pi}(p_1 - r_1) \qquad Z_2 = \frac{4 O_2 l_2}{D_2 \pi}(p_2 - r_2)$$

oder, wenn man für p_1 und p_2 die Werthe (4) und (5) substituirt:

$$Z_1 = \frac{\frac{S_1}{1+m_1}}{\frac{S_1}{1+m_1}+\frac{S_2}{1+m_2}} \left[W + \frac{4 O_1 l_1}{D_1 \pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_1\right) + \frac{4 O_2 l_2}{D_2 \pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_2\right)\right] - \left(\frac{\alpha}{\beta}+r_1\right)\frac{4 O_1 l_1}{D_1 \pi} \quad . \quad (6)$$

$$Z_2 = \frac{\frac{S_2}{1+m_1}}{\frac{S_1}{1+m_1}+\frac{S_2}{1+m_2}} \left[W + \frac{4 O_1 l_1}{D_1 \pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_1\right) + \frac{4 O_2 l_2}{D_2 \pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_2\right)\right] - \left(\frac{\alpha}{\beta}+r_2\right)\frac{4 O_2 l_2}{D_2 \pi} \quad . \quad (7)$$

Hiemit ist nun der Beharrungszustand vollkommen bestimmt. Die Gleichung (3) gibt die Geschwindigkeit der Fahrt, die Gleichungen (4) und (5) bestimmen die Dampfspannungen in den Cylindern der Lokomotive. Die Gleichungen (6) und (7) bestimmen die Zugkräfte.

Sind die beiden Lokomotive von gleicher Construktion, ist also $O_1 = O_2$ $l_1 = l_2$ $D_1 = D_2$ $r_1 = r_2$, so folgt aus den Gleichungen (4) und (5):

$$\frac{\alpha + \beta p_1}{\alpha + \beta p_2} = \frac{S_1}{S_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Setzt man für den Fall, dass $O_1 = O_2$ $l_1 = l_2$ $D_1 = D_2$ $r_1 = r_2$ $m_1 = m_2$ ist, der Kürze wegen:

$$\frac{\frac{1}{1+m_1}}{\frac{S_1}{1+m_1}+\frac{S_2}{1+m_2}}\left[W+\frac{4\,O_1\,l_1}{D_1\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_1\right)+\frac{4\,O_2\,l_2}{D_2\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_2\right)\right]=$$

$$\frac{\frac{1}{1+m_2}}{\frac{S_1}{1+m_1}+\frac{S_2}{1+m_2}}\left[W+\frac{4\,O_1\,l_1}{D_1\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_1\right)+\frac{4\,O_2\,l_2}{D_2\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_2\right)\right]=\mathfrak{A}$$

$$\frac{4\,O_1\,l_1}{D_1\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_1\right)=\frac{4\,O_2\,l_2}{D_2\,\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}+r_2\right)=\mathfrak{B}$$

so folgt durch Division der Gleichungen (6) und (7):

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\mathfrak{A}\,S_1-\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\,S_2-\mathfrak{B}}=\frac{S_1-\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}}{S_2-\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}}$$

Es ist aber in allen praktischen Fällen $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ sowohl gegen S_1 als auch gegen S_2 eine kleine Grösse, die also gegen S_1 und S_2 vernachlässigt werden darf; daher hat man annähernd:

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{S_1}{S_2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

Wenn also ein Wagenzug durch zwei gleich construirte, aber ungleich geheizte Lokomotive fortgezogen wird, treten [vermöge (8)] in den Cylindern der Lokomotive Dampfspannungen ein, deren Dichten sich genau wie die Dampfproduktionen verhalten, und üben ferner die beiden Lokomotive Zugkräfte aus, die sich [wegen (9)] nahe wie die Dampfproduktionen verhalten.

Im Allgemeinen ist aber überhaupt die Anwendung zweier Lokomotive ganz unbedenklich, und es ist gar nicht nothwendig, dass sie gleich stark geheizt werden, oder dass in beiden Lokomotiven einerlei Dampfspannung eintritt. Im Beharrungszustand entwickelt jede Lokomotive eine Zugkraft, die vermöge (6) und (7) ihrer Dampfproduktion nahe proportional ist und die Zugkräfte summiren sich. Nur beim Abfahren des Zuges muss mit einiger Vorsicht zu Werke gegangen werden, und es ist gut, wenn in diesem Moment die vorangehende Lokomotive eine grössere Zugkraft entwickelt, als die nachfolgende und zuerst in Gang gesetzt wird.

Differenz zwischen der Spannung des Dampfes in den Cylindern und der Spannung des Dampfes im Kessel.

Die mittlere Spannung des Dampfes in den Cylindern hinter den Kolben richtet sich in einer nicht expandirenden Lokomotive, wie wir gesehen haben [Gleichung (5), Seite 77]: 1) nach der Spannung vor den Kolben; 2) nach dem Widerstand des Trains; 3) nach dem Querschnitt eines Dampfcylinders; 4) nach dem Verhältniss zwischen der Länge des Kolbenschubes und dem Durchmesser der Triebräder.

Die Spannung des Dampfes im Kessel muss gleich sein der Spannung, die in den Cylindern eintritt, mehr noch einer Differenz, die so gross ist, dass dadurch die Widerstände in der Dampfzuleitung überwältigt werden können. Diese Widerstände entstehen: 1) durch die plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen bei Einengungen und Erweiterungen in der Dampfzuleitung; 2) durch rasche Biegungen und Richtungsänderungen der Leitung; 3) durch die Reibung des Dampfes an den Wänden der Leitung.

Den grössten Widerstand verursacht der Regulator, wenn dessen Oeffnung beinahe geschlossen ist, denn die lebendige Kraft des durch diese Regulatoröffnung strömenden Dampfes geht beinahe ganz verloren.

Eine ganz scharfe Bestimmung der Spannung des Dampfes im Kessel gehört abermals zu den Problemen, die sich analytisch nicht lösen lassen. Es ist insbesondere der Umstand ein sehr erschwerender, dass die Dampfzuströmung theils wegen der wechselnden Geschwindigkeit der Kolben und wegen der durch die Schieberbewegung veränderlichen Grösse der Einströmungsöffnungen mit periodisch veränderlicher Geschwindigkeit erfolgt. Da jedoch ein der Wahrheit sich einigermassen näherndes Rechnungsresultat doch besser ist, als gar keine Rechnung, so wollen wir die vorliegende Frage unter folgender Voraussetzung zu lösen suchen:

1. die Spannung des Dampfes in der Leitung bis an die Oeffnung des Regulators sei unveränderlich und so gross als ein Kessel;
2. die Spannung des Dampfes in dem Theil der Leitung zwischen der Regulatoröffnung und den äusseren Mündungen der Dampfkanäle sei ebenfalls constant, aber von vorneherein nicht bekannt;
3. die lebendige Kraft des Dampfes in der Regulatoröffnung gehe verloren;
4. die lebendige Kraft des in den Cylinder einströmenden Dampfes gehe ebenfalls verloren;
5. die Reibungswiderstände und die Widerstände, welche Krümmungen und plötzliche Biegungen verursachen, dürfen vernachlässigt werden.

Nennen wir:

p_1 die Spannung des Dampfes im Cylinder;

y die Spannung des Dampfes in dem Raum zwischen der Regulatoröffnung und den Einströmungsöffnungen in die Dampfkanäle;

p_2 die Spannung des Dampfes im Kessel;

Ω_2 den Querschnitt der Regulatoröffnung;

Ω_1 den Querschnitt eines Dampfkanals;

$\frac{2}{\pi}\Omega_1$ den mittlern Werth der durch die Bewegung des Steuerungsschiebers veränderlichen Oeffnung;

$k_2\, k_1$ die Contraktionscoeffizienten für die Einströmung durch die Querschnitte Ω_2 und $\frac{2}{\pi}\Omega_1$, durch welche der Dampf in einen Dampfkanal einströmt;

S die Dampfmenge in Kilogrammen, welche in jeder Sekunde auf beide Maschinen wirkt;

i die Wassermenge, welche jedes Kilogramm Dampf mit sich fortreisst;

Mit Berücksichtigung der gemachten Voraussetzungen kann man nun schreiben:

$$\left.\begin{aligned} S(1+i) &= \Omega_2 k_2 (\alpha+\beta y)(1+i)\sqrt{\frac{2g}{\beta(1+i)}\,\text{lognat.}\,\frac{\alpha+\beta p_2}{\alpha+\beta y}} \\ \frac{1}{2} S(1+i) &= \frac{2}{\pi}\Omega_1 k_1 (\alpha+\beta p_1)(1+i)\sqrt{\frac{2g}{\beta(1+i)}\,\text{lognat.}\,\frac{\alpha+\beta y}{\alpha+\beta p_1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Es ist aber, weil $\beta(p_2 - y)$ und $\beta(y - p_1)$ als kleine Grössen betrachtet werden dürfen:

$$\text{lognat.} \frac{\alpha + \beta p_2}{\alpha + \beta y} = \log. \left(1 + \frac{\beta(p_2 - y)}{\alpha + \beta y}\right) = \frac{\beta(p_2 - y)}{\alpha + \beta y}$$

$$\text{lognat.} \frac{\alpha + \beta y}{\alpha + \beta p_1} = \log. \left(1 + \frac{\beta(y - p_1)}{\alpha + \beta p_1}\right) = \frac{\beta(y - p_1)}{\alpha + \beta p_1}$$

Daher werden die Gleichungen (1):

$$\left.\begin{aligned} S &= \Omega_2 k_2 (\alpha + \beta y) \sqrt{\frac{2g}{1+i} \frac{(p_2 - y)}{\alpha + \beta y}} \\ \frac{1}{2} S &= \frac{2}{\pi} \Omega_1 k_1 (\alpha + \beta p_1) \sqrt{\frac{2g}{1+i} \frac{y - p_1}{\alpha + \beta p_1}} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Sucht man aus der zweiten dieser Gleichungen y und setzt den Werth in die erste, so findet man:

$$p_2 = p_1 + \frac{S^2(1+i)}{2g(\alpha + \beta p_1)} \left\{ \frac{\pi^2}{16(\Omega_1 k_1)^2} + \frac{1}{\Omega_2^2 k_2^2 + \dfrac{\beta\left(\frac{1}{2}S\right)^2 \Omega_2^2 k_2^2 (1+i)}{2g\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \Omega_1^2 k_1^2 (\alpha + \beta p_1)^2}} \right\}$$

Allein das Glied $\dfrac{\beta\left(\frac{1}{2}S\right)^2 \Omega_2^2 k_2^2 (1+i)}{2g\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \Omega_1^2 k_1^2 (\alpha + \beta p_1)^2}$ darf wegen der Kleinheit von β gegen $\Omega_2^2 k_2^2$ vernachlässigt werden; man erhält daher:

$$p_2 = p_1 + \frac{S^2(1+i)}{2g(\alpha + \beta p_1)} \left[\left(\frac{\pi}{4\Omega_1 k_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Omega_2 k_2}\right)^2\right] \quad \dots\dots \quad (3)$$

Die folgende Tabelle enthält die Differenzen $p_2 - p_1$ der Dampfspannungen im Kessel und im Cylinder, auf 1 Quadratcentimeter bezogen bei verschiedenen Spannungen im Cylinder und für verschiedene Querschnitte der Regulatoröffnung, aber für eine constante Dampfproduktion von 1 Kilogramm per 1 Sekunde. Für S w g Ω_1 wurden folgende constante Werthe gesetzt.

$$S = 1 \qquad i = 0{\cdot}2 \qquad 2g = 19{\cdot}68 \qquad \Omega_1 = 0{\cdot}01 \qquad k_1 = k_2 = 0{\cdot}6$$

Druck im Cylinder auf 1 Quadrat-Centim.	Differenz zwischen dem Druck des Dampfes im Kessel und dem Druck des Dampfes im Cylinder per 1 Quadratcentimeter, wenn der Querschnitt der Regulator-Oeffnung beträgt:						
	20 Quadrat-Centm.	30 Quadrat-Centm.	40 Quadrat-Centm.	60 Quadrat-Centm.	80 Quadrat-Centm.	100 Quadrat-Centm.	120 Quadrat-Centm.
Kilg.	Kilg.	Kilg.	Kilg.	Kilg.	Kilg.	Kilg.	Kilg.
3	2·681	1·226	0·718	0·355	0·228	0·169	0.137
4	2·055	0·940	0·551	0·272	0·175	0·129	0·105
5	1·671	0·764	0·448	0·221	0·142	0·106	0·086
6	1·422	0·650	0·381	0·188	0·121	0·089	0·073

Wenn die Dampfproduktion im Kessel per 1 Sekunde nicht 1 Kilogramm beträgt, so erhält man die Differenz der Pressung per 1 Quadratcentimeter im Kessel und Cylinder, wenn man die Zahlenwerthe der Tabelle mit dem Quadrat s_1 der wirklich stattfindenden Dampfproduktionen multiplizirt.

Wahre Bewegung des Schwerpunktes einer Lokomotive.

Im Beharrungszustand der Bewegung geschehen alle Umdrehungen der Triebräder einer Lokomotive in gleichen Zeiten. Während jeder Umdrehung der Triebräder legt die Lokomotive, wenn die Räder nicht schleifen, einen Weg $D\pi$ zurück, und wenn man diesen durch die constante Zeit einer Umdrehung dividirt, so erhält man die mittlere Geschwindigkeit derjenigen Fortbewegung, die wir bereits untersucht haben. Die Bewegung des Schwerpunktes der Lokomotive erfolgt aber während einer Umdrehung nicht mit Gleichförmigkeit, sondern mit periodisch veränderlicher Geschwindigkeit, weil wegen der Kurbelmechanismen die treibenden Kräfte mit den Widerständen nicht in jedem Augenblick im Gleichgewicht sein können. Wir wollen uns nun mit der während jeder Umdrehung eines Triebrades wegen der Kurbelmechanismen eintretenden ungleichförmigen Bewegungen des Schwerpunktes der Lokomotive beschäftigen. Diese Bewegung ist aber nicht zu verwechseln mit der des Rahmens und der damit verbundenen Theile des ganzen Baues, sondern sie betrifft nur allein die Art und Weise, wie der dem Massensystem in jedem Augenblick seiner Bewegung entsprechende Schwerpunkt in Folge der Kurbelmechanismen im Raum fortrückt.

Wir müssen uns aber, um diese veränderliche Bewegung des Schwerpunktes zu bestimmen, folgende Voraussetzungen erlauben. Wir nehmen an:

1. zwei Maschinen, die ohne Expansion auf zwei unter einem rechten Winkel gestellte Kurbeln wirken;
2. die Pressungen gegen beide Flächen eines Kolbens seien während der ganzen Dauer eines jeden Schubes unveränderlich;
3. das Verhältniss zwischen der Länge einer Schubstange und der Länge eines Kurbelhalbmessers sei so gross, dass man keinen merklichen Fehler begeht, wenn man es als unendlich gross annimmt;

4. der der Lokomotive entgegenwirkende Widerstand sei constant;
5. die totale lebendige Kraft des ganzen Massensystems der Lokomotive dürfe ausgedrückt werden durch das Produkt aus der Masse der Lokomotive in das Quadrat der Geschwindigkeit ihres Schwerpunktes;
6. die Geschwindigkeit der Massen aller an die Lokomotive angehängten Wägen sei eine absolut unveränderliche.

Für die in der Rechnung erscheinenden Grössen wählen wir folgende Bezeichnungen

O der Querschnitt eines Dampfcylinders;
l die Länge des Kolbenschubes;
D der Durchmesser eines Triebrades;
p die Pressung des Dampfes auf einen Quadratmeter der Kolbenfläche;
r die Pressung auf einen Quadratmeter der Vorderfläche eines Kolbens; p und r sind vermöge der zweiten Voraussetzung constant;
W der constante Widerstand, welcher der Bewegung der Lokomotive entgegenwirkt;
M die Masse der Lokomotive;
L das Gewicht der Lokomotive in Tonnen zu 1000 Kilogrammen, demnach $M = \frac{1000\,L}{2\,g}$ wobei g die Beschleunigung beim freien Fall bezeichnet;
V die mittlere
V_1 das Maximum der } Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Lokomotive;
V_2 das Minimum der
φ der Winkel, den in irgend einem Augenblick der Bewegung die Kurbel der rechtseitigen Maschine mit der Bewegungsrichtung des Kolbens bildet, demnach $\frac{\pi}{2} + \varphi$ der analoge Winkel für die linkseitige Maschine;
μ derjenige Werth von φ, bei welchem das Minimum der Geschwindigkeit eintritt.

Während die Kurbel den Winkel φ beschreibt, legt der Kolben der rechtseitigen Maschine einen Weg $\frac{1}{2}(1 - \cos.\varphi)$, der Kolben der linkseitigen Maschine einen Weg $\frac{1}{2}\sin.\varphi$ zurück (was jedoch nur für eine unendlich lange Schubstange richtig ist). Die beiden Kolben entwickeln dabei zusammen eine Wirkung $O(p-r)\frac{1}{2}(1-\cos.\varphi+\sin.\varphi)$ Gleichzeitig legt die Lokomotive einen Weg $\frac{D}{2}\varphi$ zurück, wird also der Widerstand W durch den Weg $\frac{D}{2}\varphi$ überwunden, wird also eine Wirkung $W\frac{D}{2}\varphi$ consumirt. Nennen wir V_0 die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Lokomotive bewegte, als der Winkel φ gleich Null war, y die dem Winkel φ entsprechende Geschwindigkeit, so ist $M(y^2 - V_0^2)$ die Aenderung der lebendigen Kraft der Lokomotiv-Masse während der Bewegung durch den Winkel φ.

Da wir vorausgesetzt haben, dass der Wagenzug seine Geschwindigkeit nicht ändere so besteht nun die Gleichheit:

$$O(p-r)\frac{1}{2}(1-\cos.\varphi+\sin.\varphi) - W\frac{D}{2}\varphi = M(y^2 - V_0^2) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Diese Gleichung gilt jedoch nur von $\varphi = o$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$, weil ausserhalb dieser Gränzen die Richtungen der Pressungen gegen die Kolben Aenderungen erleiden. Innerhalb dieser Gränzen gilt jedoch die Gleichung (1), es mag ein Beharrungszustand vorhanden sein oder nicht. Allein da wir gerade die Bewegung der Lokomotive in ihrem

Beharrungszustand kennen lernen wollen, so müssen wir die Bedingung seines Bestehens analytisch ausdrücken und in (1) einführen. Nun geht aus der Natur der Sache hervor, dass im Beharrungszustand der Bewegung für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wiederum die Geschwindigkeit v_0 eintreten muss; wir erhalten daher die Bedingung, welche den Beharrungszustand charakterisirt, wenn wir in (1) φ gleich $\frac{\pi}{2}$ und y gleich v_0 setzen; wir finden demnach:

$$O\,(p-r)\,\frac{1}{2}\,.\,2 - W\,\frac{D}{2}\,\frac{\pi}{2} = 0$$

oder:

$$W = \frac{4\,O\,(p-r)\,l}{D\,\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Führt man diesen Werth von W in (1) ein, so erhält man:

$$O\,(p-r)\,l\left[\frac{1}{2}\,(1-\cos.\varphi+\sin.\varphi)-\frac{2\,\varphi}{\pi}\right] = M\,(y^2-V_0^2) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

und diese Gleichung drückt nun das Gesetz aus, nach welchem im Beharrungszustand die Bewegung der Lokomotive erfolgt, während der Winkel φ von 0 in $\frac{\pi}{2}$ übergeht.

Es liegt in der Natur der Sache, dass innerhalb dieser Grenzen ein Minimum und ein Maximum der Geschwindigkeit vorkommen muss. Für diejenigen Werthe von φ, für welche y ein Maximum oder ein Minimum wird, muss $\frac{d\,(y^2)}{d\,\varphi} = 0$ sein. Differenzirt man die Gleichung (3) und setzt $\frac{d\,(y^2)}{d\,\varphi} = 0$, so findet man:

$$O\,(p-r)\,l\left[\frac{1}{2}\,(\sin.\varphi+\cos.\varphi)-\frac{2}{\pi}\right] = 0$$

oder $\sin.\varphi + \cos.\varphi = \frac{4}{\pi}$. Aus dieser Gleichung findet man, mit Berücksichtigung, dass $\sin.\varphi + \cos.\varphi = \sqrt{1+\sin.2\,\varphi}$ ist:

$$\sin.2\,\varphi = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1 = 0{\cdot}6205$$

Die innerhalb 0 und 180° liegenden Winkel, welche dieser Gleichung entsprechen, sind: $38^\circ + 21'$ und $141^\circ + 39'$. Die dem Minimum und Maximum der Geschwindigkeit entsprechenden Werthe von φ sind demnach:

$19^\circ + 10' + 30''$ (Minimum)
$70^\circ + 49' + 30''$ (Maximum)

Es ist klar, dass der erstere dieser Werthe dem Minimum, und der letztere dem Maximum entspricht. Denn wenn φ sehr klein ist, wirkt beinahe nur die linkseitige Maschine treibend; wird dagegen φ nahe 45°, so wirken beide Maschinen beinahe mit voller Kraft.

Bezeichnen wir durch μ die Bogenlänge, welche dem Winkel von $19^\circ + 10' + 30''$ entspricht, so müssen der Gleichung (3) sowohl der Werth $\varphi = \mu$ und $y = V_2$, als auch der Werth $\varphi = \frac{\pi}{2} - \mu$ und $y = V_1$ genügen. Man erhält daher:

$$O(p-r)l\left[\frac{1}{2}(1-\cos.\mu+\sin.\mu)-\frac{2\mu}{\pi}\right]=M(V_2^2-V_0^2)$$

$$O(p-r)l\left[\frac{1}{2}(1-\sin.\mu+\cos.\mu)-\frac{2\left(\frac{\pi}{2}-\mu\right)}{\pi}\right]=M(V_1^2-V_0^2)$$

Die Differenz dieser Gleichungen gibt:

$$O(p-r)l\left[-\sin.\mu+\cos.\mu-1+4\frac{\mu}{\pi}\right]=M(V_1^2-V_2^2) \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Nun ist aber $\frac{1}{2}(V_1+V_2)=V$, und wenn wir das Verhältniss $\frac{V_1-V_2}{V}=i$ setzen, so wird $V_1^2-V_2^2=(V_1+V_2)(V_1-V_2)=2V\times iV=2iV^2$. Die Gleichung (4) wird demnach:

$$O(p-r)l\left[-\sin.\mu+\cos.\mu-1+4\frac{\mu}{\pi}\right]=2\,i\,V^2M$$

und hieraus folgt:

$$i=\frac{O(p-r)l\left[-\sin.\mu+\cos.\mu-1+\frac{4\mu}{\pi}\right]}{2V^2M} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Nach diesem Werth von i ist die Ungleichförmigkeit zu beurtheilen, welche in der Bewegung des Schwerpunktes der Lokomotive vermöge der Kurbelmechanismen eintritt. Es ist:

$$\frac{4\mu}{\pi}=\frac{4(19\times60\times60+10\times60+30)}{60\times60\times180}=0{\cdot}4261$$

$$\sin.\mu=\sin.(19^0+10'+30'')=0{\cdot}3284$$

$$\cos.\mu=\cos.(19^0+10'+30'')=0{\cdot}9444$$

Ferner:

$$M=\frac{1000\,L}{2\,g}=\frac{1000\,L}{2\times9{\cdot}808}$$

und hierdurch wird der Werth von i:

$$i=\frac{O(p-r)l}{2424\,L\,V^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Es sei z. B.:

$O=0{\cdot}1$ $\quad p-r=40000$ $\quad l=0{\cdot}6$ $\quad L=18$ Tonnen $\quad V=10$ Meter

so wird $i=0{\cdot}00055$, d. h. der Unterschied zwischen der grössten und kleinsten Geschwindigkeit ist $0{\cdot}00055$ von der mittleren Geschwindigkeit. Dieser Unterschied beträgt also 0·0055 Meter.

An diesem Beispiel ersieht man, dass die durch die Kurbelmechanismen verursachte Ungleichförmigkeit der Bewegung des Schwerpunktes so unbedeutend ist, dass man sie durch die delikatesten Messinstrumente wohl kaum zu entdecken im Stande wäre. Diese Ungleichförmigkeit ist also für die Praxis eine nicht beachtenswerthe.

Uebergang aus einem Beharrungszustand in einen andern.

Der Uebergang aus einem Beharrungszustand in einen andern kann verursacht werden: 1) durch eine Aenderung des Widerstandes, den die Lokomotive zu überwinden hat, also insbesondere durch Steigen oder Fallen der Bahn; 2) durch eine Aenderung der Kesselheizung; 3) durch eine Aenderung der Regulatorstellung; 4) durch eine Aenderung des Expansionsgrades, wenn der Steuerungsmechanismus eine variable Expansion zulässt; 5) durch eine Aenderung der Ausströmungsöffnung des Blasrohres; 6) durch das gleichzeitige Eintreten zweier oder mehrerer der unter (1) bis (5) genannten Veränderungen.

Um die Erscheinungen, welche bei dem Uebergang aus einem Beharrungszustand in einen andern vorkommen, leichter zu besprechen, wollen wir den ersteren A, den letzteren B nennen.

Geschieht der Uebergang aus A in B nur durch eine Zunahme des Widerstandes, und bleibt alles Andere ungeändert, so muss zunächst eine Abnahme der Geschwindigkeit eintreten, denn im Zustand A war die Spannung des Dampfes in den Cylindern so, dass sie den Widerständen im Mittel genommen das Gleichgewicht hielt; wenn also plötzlich der Widerstand wächst, so kann in diesem Augenblick und in den darauf folgenden die Spannung des Dampfes nicht im Stande sein, den grösseren Widerstand zu bewältigen. Allein so wie die Geschwindigkeit der Lokomotive abnimmt, entsteht eine Verminderung des Dampfverbrauches, während die Dampferzeugung in beinahe ungeschwächtem Masse fortgeht; es muss also im Kessel eine Dampfansammlung und daher eine Steigerung der Spannung eintreten. Allein so wie die Spannung des Dampfes im Kessel wächst, muss sie auch in den Cylindern hinter den Kolben allmählig zunehmen, und diess wird so lange fortdauern, bis in den Cylindern eine Spannung eintritt, welche im Stande ist, dem im Zustand B vorhandenen Widerstand das Gleichgewicht zu halten, und bis ferner der Dampfverbrauch genau so gross wird, als er im Zustand A war. Allein da bis zu diesem Augenblick hin die Spannung des Dampfes fort und fort nicht hinreichend war, dem grösseren Widerstand das Gleichgewicht zu halten, so muss die Geschwindigkeit der Lokomotive bei dem Uebergang aus A in B fortwährend abnehmen. Diese Abnahme erfolgt jedoch nicht gleichförmig, sondern sie erfolgt anfangs rasch und wird allmälig schwächer und schwächer. Im Zustand B herrschen also im Allgemeinen in der Lokomotive stärkere Dampfspannungen, und ist ihre Geschwindigkeit kleiner als im Zustand A.

Wird die Aenderung des Zustandes A durch eine Verstärkung der Heizung bewirkt, so wird zunächst die Dampfproduktion gesteigert, es muss also eine Dampfansammlung und mithin eine Erhöhung der Dampfspannung im Kessel eintreten. Dadurch wird aber auch die Spannung des Dampfes in den Cylindern hinter den Kolben gesteigert, und da sich, der Voraussetzung gemäss, der Widerstand nicht geändert hat, so werden die Kolben mit einer Kraft getrieben, die mehr als hinreichend ist, um die Widerstände zu bewältigen; es muss also die Geschwindigkeit der Maschine fort und fort bis zu einer gewissen Gränze zunehmen, und diese Gränze wird durch den Umstand gesteckt, dass mit der Geschwindigkeitszunahme ein stärkerer Dampfverbrauch eintritt, was zur Folge hat, dass die Differenz zwischen der Dampfproduktion und dem Dampfverbrauch allmählig abnehmen und zuletzt ganz verschwinden muss; was aber ferner zur Folge hat, dass die Dampfspannungen fort und fort abnehmen werden, bis wiederum die im Zustand A da gewesenen Spannungen eintreten.

Im Beharrungszustand B ist also eine grössere Geschwindigkeit vorhanden, sind aber die Spannungszustände beinahe so wie sie in A waren. Ich sage „beinahe“, denn

die grössere Geschwindigkeit der Lokomotive verursacht einen stärkeren Blasrohrdruck und einen stärkeren Luftwiderstand, es wächst also überhaupt der Total-Widerstand, den der Dampf zu überwinden hat, und daher muss im Zustand B die Dampfspannung etwas grösser sein als sie im Zustand A war. Auch wird aus diesem Grunde die Fahrgeschwindigkeit in einem etwas schwächeren Masse wachsen als die Zunahme der Dampfproduktion.

Geschieht die Aenderung des Zustandes A durch eine Verengung der Blasrohrmündung, so wird zunächst der Blasrohrdruck und mithin der totale Widerstand, der vom Dampf überwunden werden muss, vermehrt. Die Spannung, welche der Dampf im Zustand A hatte, wird also zur Bewältigung des totalen Widerstandes nicht mehr hinreichen, in der Bewegung muss also eine Verzögerung, folglich eine Veränderung des Dampfverbrauches, daher eine Dampfansammlung und mithin eine Erhöhung der Dampfspannung eintreten. Diese Veränderungen werden so lange fortdauern, bis ein Zustand B eintritt, in welchem Dampfverbrauch und Dampfproduktion gleich gross geworden sind und in welchem ferner der Druck des Dampfes mit dem durch die Verengung der Blasrohrmündung verstärkten Widerstand in's Gleichgewicht gekommen ist. In diesem Zustand B wird jedoch die Dampfproduktion grösser sein als sie im Zustand A war, denn indem der Dampf mit einer grösseren Spannkraft durch das Blasrohr entweicht, wird die anfachende Wirkung dieses Vorganges und folglich die Dampfproduktion gesteigert; man kann desshalb ohne Rechnung nicht wohl entscheiden, ob die Geschwindigkeit der Lokomotive im Zustande B grösser oder kleiner sein wird, als sie in A war; denn einerseits müsste die Geschwindigkeit abnehmen, weil der Widerstand vermehrt wurde, anderseits müsste die Geschwindigkeit wachsen, weil die Dampfproduktion zunimmt. Auf welcher Seite das Uebergewicht liegt, kann nur durch Rechnung oder durch Versuche entschieden werden.

Wird eine Aenderung des Beharrungszustandes A vermittelst des Regulators veranlasst, und zwar durch eine Verminderung der Einströmungsöffnung, so wird zunächst der Uebergang des Dampfes aus dem Kessel in die Cylinder erschwert. Im Zustand A war die Spannung des Dampfes im Kessel gerade hinreichend, um die produzirte Dampfmenge durch die Regulatoröffnung in den Cylinder zu treiben; so wie aber die Regulatoröffnung plötzlich verengt wird, nimmt die Dampfüberströmung ab, es muss also eine Dampfansammlung, mithin eine Steigerung der Dampfspannung im Kessel eintreten, und diese Veränderungen werden so lange fortdauern, bis die Dampfspannung eine Höhe erreicht hat, bei der sie im Stande ist, allen Dampf, der produzirt wird, durch die enge Regulatoröffnung zu treiben. Die Geschwindigkeit der Lokomotive nimmt anfangs ab, erreicht nach einiger Zeit ein Minimum, und nimmt dann so lange zu, bis sie so gross geworden ist, als sie im Zustand A war. Der Zustand B unterscheidet sich also von A nur durch eine höhere Dampfspannung im Kessel; alles Uebrige wird nicht geändert.

Wird der Zustand A verändert, indem man eine stärkere Expansion eintreten lässt, so wird anfänglich die Wirkung der Maschine und auch der Dampfverbrauch verändert, es muss also eine Abnahme der Geschwindigkeit und eine Ansammlung des Dampfes im Kessel, mithin eine Spannungserhöhung in demselben eintreten. So wie aber diese wächst, wird die Leistung der Maschine allmählig gesteigert, und nimmt die Geschwindigkeit wiederum zu, bis endlich ein Zustand B eintritt, in welchem eine höhere Dampfspannung und eine grössere Geschwindigkeit der Maschine vorhanden ist. Eine grosse Geschwindigkeit muss zuletzt eintreten, weil durch die erhöhte Expansion die Kraftleistungen der Maschine gesteigert werden. Eine höhere Dampfspannung muss eintreten, weil im Zustand B die Cylinder weniger gefüllt werden als sie in A gefüllt wurden, und demnach in beiden Zuständen wegen der gleich gebliebenen Dampferzeugung auch der Dampfverbrauch keine Aenderung erlitten hat.

Die Führung einer Lokomotive beruht wesentlich auf der richtigen Kenntniss der Erscheinungen und Wirkungen, von welchen eine Aenderung des Beharrungszustandes begleitet ist.

Will man bei ungeändertem Widerstand für einige Zeit schneller oder langsamer fahren, so kann dies bewirkt werden, indem man die Regulatoröffnung in ersterem Fall vergrössert, in letzterem vermindert, oder indem man eine schwächere oder stärkere Expansion eintreten lässt. Allein es ist nicht möglich, durch eine Aenderung der Regulatoröffnung die Geschwindigkeit dauernd zu erhöhen oder zu vermindern.

Will man bei einer schwachen Aenderung des Widerstandes eine Aenderung der Geschwindigkeit der Lokomotive verhindern, so kann dies abermals vermittelst des Regulators oder vermittelst des Expansionsapparates bewirkt werden.

Um immer eine hinreichende Quantität von ziemlich hoch gespanntem Dampf im Kessel vorräthig zu haben, ist es angemessen, bei normaler Geschwindigkeit mit einer ziemlich engen Regulatoröffnung zu fahren, die Dampferzeugung vorzugsweise auf solchen Bahnstrecken, die nur einen geringen Widerstand verursachen, zu begünstigen und diesen Dampf für andere Bahnstrecken, die grössere Widerstände veranlassen, aufzusparen. Dies kann bewirkt werden, wenn man beim Bahnabwärtsfahren nachfeuert und die Regulatoröffnung, so wie auch die Blasrohröffnung verengt, beim Bahnaufwärtsfahren dagegen diese beiden Oeffnungen erweitert. Das Abwärtsfahren erfolgt auf diese Weise mit schwacher Kraft, mit starkem Blasrohrdruck, aber mit lebhafter Anfachung, das Aufwärtsfahren dagegen mit erhöhter Kraft, mit schwachem Blasrohrdruck und mit schwacher Anfachung.

Auch die Speisung des Kessels mit Wasser aus dem Tender muss mit Beachtung der Bahnverhältnisse geschehen. Wenn plötzlich eine grosse Wassermenge in den Kessel gebracht wird, tritt in demselben eine niedrigere Temperatur ein, wird sogar ein Theil des vorhandenen Dampfes condensirt, muss also die Spannung des Dampfes und mithin die Leistungsfähigkeit der Maschine abnehmen; es ist daher angemessen, die Kesselspeisung wie die Kesselfeurung vorzugsweise beim Bahnabwärtsfahren zu begünstigen.

Bayerische Staatsbibliothek München

V.

Die Taschensteuerung.

Zur Steuerung der Lokomotiv-Dampfmaschinen werden gegenwärtig allgemein einfache Schieber gebraucht, die eine schwache innere und eine starke äussere Ueberdeckung haben. Zur Bewegung dieser Schieber bedient man sich der von *R. Stephenson* eingeführten Taschensteuerung, vermittelst welcher eine expandirende Wirkung des Dampfes, so wie auch das Vorwärts- und Rückwärtslaufen der Lokomotive hervorgebracht werden kann. Ich darf annehmen, dass dem Leser die Einrichtung und Wirkungsweise dieser Vorrichtung bekannt ist, wende mich daher sogleich zur Theorie derselben, welche die Aufgabe zu lösen hat, den Zusammenhang zwischen den Constructions-Elementen und den Wirkungen dieses Apparates ausfindig zu machen.

Die Constructions-Elemente des Apparates sind: 1) die äussere Ueberdeckung des Schiebers; 2) die innere Ueberdeckung desselben; 3) die Excentricität der Steuerungsscheiben; 4) der Voreilungswinkel der Steuerungsscheiben; 5) die Länge der Excentrikstangen; 6) die Bogenlänge der Tasche; 7) der Krümmungshalbmesser der Tasche.

Die Wirkungselemente des Apparates sind: 1) der Angriffspunkt der Tasche, d. h. derjenige Punkt der Tasche, welcher auf die Schieberstange einwirkt; 2) das lineare Voreilen des Schiebers beim Beginne des Kolbenschubes; 3) die grösste Einströmungsöffnung, wenn der Schieber am Ende seiner Bewegung angekommen ist; 4) die Dauer der Einströmung; 5) die Dauer der Ausströmung.

Die Constructionselemente, mit welchen ein solcher Steuerungsapparat construirt sein muss, damit derselbe gewisse Wirkungen hervorzubringen im Stande ist, wurden bisher von den Constructeurs auf empirischem Wege vermittelst eines Versuchsmodelles ausfindig gemacht; sie lassen sich aber, wie zuerst *Phillips* *) gezeigt hat, viel einfacher und sicherer durch Rechnung bestimmen. Diess soll nun auch im Folgenden geschehen; ich werde jedoch den Weg, welchen *Phillips* betreten hat, um zu den Grundgleichungen des Problems zu gelangen, nicht einschlagen, weil dieses Ziel weit einfacher aus der Betrachtung der Figuren, welche den geometrischen Zusammenhang aller Theile des Apparates darstellen, erreicht werden kann.

*) Théorie de la coulisse servant à produire la détente variable dans les machines à vapeur, et particulièrement dans les machines locomotives, par *M. Phillips*. Annales des mines, 1853, tome III.

Krümmungshalbmesser der Tasche.

Wir wollen zunächst den angemessenen Krümmungshalbmesser der Tasche bestimmen. Tab. XVIII, Fig. 89 stellt den Steuerungsapparat in derjenigen Position dar, wenn der Kolben seine Bewegung von Links nach Rechts beginnt, und wenn die Tasche in ihre mittlere Stellung gebracht ist, in welcher der mittlere Punkt B_1 derselben auf die Schieberstange einwirkt. O_1 A_1 ist die Kurbel der Maschine. D_1 E_1 sind die Mittelpunkte der excentrischen Scheiben. D_1 C_1 F_1 H_1 die Excentrikstangen. C_1 B_1 H_1 die Krümmung der Tasche.

Tab. XVIII., Fig. 90 zeigt die Stellung des Apparates, wenn der Kolben seine Bewegung von Rechts nach Links beginnt.

Fig. 91 ist eine allgemeine Stellung des Apparates, wenn die Kurbel O A des Kolbens einen Winkel ω zurückgelegt hat, und wenn die Tasche etwas gehoben ist, so dass sie nicht mehr mit dem mittleren Punkt auf die Schieberstange einwirkt.

Die Krümmung der Tasche sollte von der Art sein, dass wenn der Kolben an einem oder am andern Ende des Schubes steht, eine Bewegung des Schiebers nicht eintritt, wenn man die Tasche hebt oder senkt.

Aendert man in Fig. 89 die Stellung der Tasche, ohne die Kurbel O_1 A_1 zu drehen, so beschreiben die Punkte C_1 und H_1 kleine Kreisbögen, die auf D_1 C_1 und F_1 H_1 senkrecht stehen, die ganze Tasche dreht sich also um den Punkt E_1, in welchem sich die Verlängerungen der Excentrikstangen begegnen. Der Punkt B_1 wird also bei einer Hebung oder Senkung der Tasche keine Bewegung machen, wenn C_1 B_1 H_1 ein aus E_1 beschriebener Kreisbogen ist, oder E_1 C_1 $= E_1$ B_1 $= E_1$ H_1 wäre für diese Stellung der Kurbel O_1 A_1 der zweckmässigste Krümmungshalbmesser der Tasche.

Aendert man in Fig. 90 um unendlich wenig die Stellung der Tasche, so beschreiben die Punkte C_2 und H_2 kleine auf E_2 C_2 und E_2 H_2 senkrecht stehende Kreisbögen. Die Tasche dreht sich demnach um den Punkt E_2, in welchem sich die Richtungen von D_2 C_2 und F_2 H_2 durchschneiden. Der Punkt B_2 wird also bei einer Hebung oder Senkung der Tasche keine Bewegung machen, wenn C_2 B_2 H_2 ein aus E_2 beschriebener Kreisbogen ist, d. h. für die Stellung Fig. 90 des Apparates wäre $E_2 C_2 = E_2 B_2 = E_2 H_2$ der vortheilhafteste Krümmungshalbmesser der Tasche.

Man sieht hieraus, dass es nicht möglich ist, den Krümmungshalbmesser der Tasche so zu wählen, dass der Schieber weder in Fig. 89, noch in Fig. 90 eine Bewegung macht, wenn man die Tasche hebt oder senkt; man muss sich demnach damit begnügen, den Halbmesser der Tasche so zu nehmen, dass die Bewegungen des Schiebers sowohl für die Stellung Fig. 89, als auch für die Stellung Fig. 90 möglichst klein ausfallen, und dies ist wohl dann der Fall, wenn der Krümmungshalbmesser der Tasche gleich dem arithmetischen Mittel aus $E_1 C_1$ und $E_2 C_2$ gemacht wird.

Nennen wir R diesen angemessensten Krümmungshalbmesser, so ist:

$$R = \frac{1}{2}(\overline{E_1 C_1} + \overline{E_2 C_2}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Nennen wir ferner:

$\varrho = \overline{O_1 D_1} = \overline{O_1 F_1} = \overline{O_2 F_2} = \overline{O_2 D_2}$ die Excentrizitäten der Scheiben;

$l = \overline{D_1 C_1} = \overline{F_1 H_1} = \overline{D_2 C_2} = \overline{F_2 H_2}$ die Länge einer Excentrikstange;

$\widehat{V_1 O_1 D_1} = \widehat{v_1 O_1 F_1} = \widehat{V_2 O_2 F_2} = \widehat{v_2 O_2 D_2} = \alpha$ den Voreilungswinkel;

$\overline{C_1 H_1} = \overline{C_2 H_2} = 2c$ die Länge der Sehne, welche dem Bogen der Tasche entspricht, so ist in Fig. 89:

$$\overline{E_1 C_1} : c = l : c - \varrho \sin. \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

Demnach:

$$\overline{E_1 C_1} = \frac{c\,l}{c - \varrho \cos. \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Ist dagegen in Fig. 90:

$$\overline{E_2 C_2} : c = l : c + \varrho \cos. \alpha$$

Demnach:

$$\overline{E_2 C_2} = \frac{c\,l}{c + \varrho \cos. \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Substituirt man diese Werthe von $\overline{E_1 C_1}$ und $\overline{E_2 C_2}$ in (1), so erhält man:

$$R = \frac{c^2 l}{c^2 - \varrho^2 \cos.^2 \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Allein $\varrho \cos. \alpha$ ist gegen c eine sehr kleine Grösse; $\varrho^2 \cos.^2 \alpha$ kann daher gegen c^2 vernachlässigt werden, und dann folgt:

$$R = l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Der angemessenste Krümmungshalbmesser für die Tasche ist also gleich der Länge der Excentrikstange.

Gleichung der Bewegung des Schiebers.

In Fig. 91 ist J der Mittelpunkt des Schiebers, G der Punkt, in welchem die Sehne CH die Linie OJ durchschneidet. Die Entfernung GJ ist streng genommen nicht constant, sondern ändert sich mit dem Winkel ω, allein diese Aenderung ist nur ganz unmerklich, wenn die Länge der Aufhängstange der Tasche und wenn auch die Länge CH der Tasche im Vergleich zur ganzen Bewegung des Schiebers gross ist; wir können also die Entfernung GJ als eine constante Länge betrachten, die wir gleich b setzen wollen.

Nennen wir:

$\overline{OD} = \overline{OF} = r \quad \overline{DC} = \overline{FH} = l \quad \overline{CH} = 2c \quad \overline{OJ} = x \quad \overline{GJ} = b \quad \overline{CG} = y$

so ist zunächst:

$$x = \overline{OG} + b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Vermittelst Fig. 91 findet man leicht folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
y \cos. \psi &= l \sin. \varphi + \varrho \sin. \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \omega)\right] \\
(2c - y) \cos. \psi &= l \sin. \varphi_1 + \varrho \sin. \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \omega)\right] \\
\overline{OG} &= \varrho \cos. \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \omega)\right] + l \cos. \varphi - y \sin. \psi \\
\overline{OG} &= \varrho \cos. \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \omega)\right] + l \cos. \varphi_1 + (2c - y) \sin. \psi
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Aus den beiden ersteren dieser Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned}\sin.\varphi &= \frac{y\cos.\psi - \varrho\cos.(\alpha+\omega)}{l}\\ \sin.\varphi_1 &= \frac{(2\,l - y)\cos.\psi - \varrho\cos.(\alpha-\omega)}{l}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Durch Subtraktion der dritten und vierten der Gleichungen (7) ergibt sich eine Gleichung, aus welcher man, mit Berücksichtigung, dass $\sin.(\alpha+\omega) - \sin.(\alpha-\omega) = 2\cos.\alpha\,\sin.\omega$ ist, leicht findet:

$$\sin.\psi = \frac{2\,\varrho\cos.\alpha\sin.\omega + l(\cos.\varphi - \cos.\varphi_1)}{2\,c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)^*$$

Setzt man diesen Werth in die dritte der Gleichungen (7) und berücksichtigt (6), so erhält man:

$$x = b + \varrho\sin.(\alpha+\omega) - y\frac{\varrho}{c}\cos.\alpha\sin.\omega + l\left[\cos.\varphi - \frac{y}{2c}(\cos.\varphi - \cos.\varphi_1)\right] \quad \ldots \quad (10)$$

Die Gleichungen (8) und (9) sind absolut genau; die Gleichung (10) ist nur in so fern ungenau, als wir annehmen, dass $\overline{CG}$ und $\overline{BG}$ zwei von ω unabhängige Längen sind. Diese Ungenauigkeit ist aber in der That eine verschwindend kleine. Die Gleichung (10) würde also, wenn man aus derselben vermittelst (8) und (9) die Winkel φ φ_1 und ψ eliminirte, den Werth von x, d. h. die Position des Schiebers als Funktion von ω beinahe mit absoluter Genauigkeit bestimmen. Diese Elimination ist aber nicht möglich, man muss also, um x zu bestimmen, ein Annäherungsverfahren befolgen.

Die Winkel φ φ_1 und ψ sind jederzeit so klein, dass man sich erlauben darf, $\sin.\varphi = \varphi$ $\cos.\varphi = 1$ $\sin.\varphi_1 = \varphi_1$ $\cos.\varphi_1 = 1$ $\sin.\psi = \psi$ $\cos.\psi = 1$ zu setzen. Unter dieser Voraussetzung wird die Gleichung (10):

$$x = b + l + \varrho\sin.(\alpha+\omega) - \varrho\frac{y}{c}\cos.\alpha\sin.\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

*) Vernachlässigt man das jederzeit nur kleine Glied $l(\cos.\varphi - \cos.\varphi)$, so erhält man eine Gleichung, die mit derjenigen übereinstimmt, welche *Phillips* in seinem Aufsatz, Seite 15, erst nach weitläufigen geometrischen Betrachtungen, analytischen Rechnungen und Integrationen von Gleichungen herausbringt.

Man findet diese Gleichung auch ganz leicht und direkt, wenn man unendlich lange Excentrikstangen und eine im Verhältniss zur Schieberbewegung sehr lange Tasche annimmt. Unter dieser Voraussetzung stimmen nämlich die Bewegungen der Punkte C und H mit den Horizontal-Bewegungen von D und F überein. Die Ablenkungen der Punkte C und H von ihrer mittleren Position sind dann, wie Fig. 92 zeigt,

$$\overline{MC} = \varrho\cos.\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\omega)\right] \text{ und } \overline{NH} = \varrho\cos.\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha-\omega)\right]$$

Es folgt daher unmittelbar aus dieser Figur:

$$\sin.\psi = \frac{\overline{MC} - \overline{NH}}{\overline{CH}} = \varrho\frac{[\sin.(\alpha+\omega) - \sin.(\alpha-\omega)]}{2\,c} = \frac{\varrho}{c}\cos.\alpha\sin.\omega$$

welches die von *Phillips* auf so weiten Umwegen gefundene Gleichung ist.

Der wahre mittlere Werth von x ist:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\, d\omega = b + l$$

$x-(b+l)$ ist demnach die Abweichung des Schiebers von seiner mittleren Position, in welcher er gegen die beiden Einströmungsöffnungen symetrisch steht. Setzen wir $x-(b+l)=\xi$, so wird vermöge (11):

$$\xi = \varrho \sin.(\alpha+\omega) - \varrho \frac{y}{c} \cos.\alpha \sin.\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

und dieser Ausdruck bestimmt also annähernd das Hin- und Herpendeln des Schiebers um seine mittlere Position.

Nennt man X den Weg, den der Kolben zurücklegt, während die Kurbel den Winkel ω beschreibt, r den Halbmesser der Kurbel, L die Länge der Schubstange, μ den Winkel, den die Schubstange mit der Bewegungsrichtung des Kolbens bildet, so ist ganz streng:

$$X = r(1-\cos.\omega) + L(1-\cos.\mu) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Allein μ ist stets ein kleiner Winkel, man darf sich also wohl erlauben, das Glied $L(1-\text{Cos.}\mu)$ ganz zu vernächlässigen, und dann erhält man:

$$X = r(1-\cos.\omega) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Vermittelst der Gleichungen (13) und (15), können wir nun die Beziehungen ausfindig machen, die zwischen den Construktionselementen und den Wirkungen des Apparates bestehen; dabei werden uns die Fig. 93 bis 97 behülflich sein.

Fig. 93 zeigt die mittlere Position des Schiebers, i ist die innere, e die äussere Ueberdeckung.

Fig. 94 zeigt die Stellung des Schiebers, wenn der Kolbenschub beginnt, oder wenn $\omega = o$ ist, a ist das lineare Voreilen des Schiebers.

Fig. 95 zeigt die Stellung des Schiebers, wenn die Einströmungsöffnung am grössten ist, a_1 ist das Maas derselben.

Fig. 96 zeigt die Stellung des Schiebers, wenn die Einströmung aufhört, oder wenn die Expansion des Dampfes beginnt.

Fig. 97 zeigt die Stellung des Schiebers, wenn die Ausströmung aufhört, wenn also vor dem Kolben die Compression des Dampfes beginnt.

Bezeichnen wir durch $X_1\ X_2\ X_3$, $\Omega_1\ \Omega_2\ \Omega_3$ diejenigen Werthe von X und von ω, welche den Schieberstellungen (Fig. 95, 96, 97) entsprechen, so ist:

für $\omega =$	o	Ω_1	Ω_2	Ω_3
$X =$	o	X_1	X_2	X_3
$\xi =$	$e+a$	$e+a_1$	e	$-i$

Wir erhalten demnach vermöge der Gleichungen (13) und (15) die nachstehenden Beziehungen:

$$e + a = \varrho \sin. \alpha \quad \dots\dots\dots \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} e + a_1 &= \varrho \sin. (\alpha + \Omega_1) - y \frac{\varrho}{c} \cos. \alpha \sin. \Omega_1 \\ X_1 &= r (1 - \cos. \Omega_1) \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned} e &= \varrho \sin. (\alpha + \Omega_2) - y \frac{\varrho}{c} \cos. \alpha \sin. \Omega_2 \\ X_2 &= r (1 - \cos. \Omega_2) \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (18)$$

$$\left.\begin{aligned} - i &= \varrho \sin. (\alpha + \Omega_3) - y \frac{\varrho}{c} \cos. \alpha \sin. \Omega_3 \\ X_3 &= r (1 - \cos. \Omega_3) \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (19)$$

Durch Differenziation der Gleichung (13) findet man

$$\frac{d\xi}{d\omega} = \varrho \cos. (\alpha + \omega) - \varrho \frac{y}{c} \cos. \alpha \cos. \omega$$

Nun ist aber Ω_1 derjenige Werth von ω, für welchen ξ am grössten wird, für welchen mithin $\frac{d\xi}{d\omega} = 0$ werden muss, wir erhalten demnach zur Bestimmung von Ω_1 die Gleichung

$$\varrho \cos. (\alpha + \Omega_1) - \varrho \frac{y}{c} \cos. \alpha \cos. \omega = 0$$

aus welcher folgt:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang.}\, \Omega_1 &= \frac{1 - \frac{y}{c}}{\text{tang.}\, \alpha} \\ \cos. \Omega_1 &= \frac{\text{tang.}\, \alpha}{\sqrt{\text{tang.}^2 \alpha + \left(1 - \frac{y}{c}\right)^2}} \\ \sin. \Omega_1 &= \frac{1 - \frac{y}{c}}{\sqrt{\text{tang.}^2 \alpha + \left(1 - \frac{y}{c}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (20)$$

Setzt man diesen Werth von $\cos. \Omega_1$ und $\sin. \Omega_1$ in die erste der Gleichungen (17) so findet man

$$e + a_1 = \varrho \sqrt{\sin.^2 \alpha + \cos.^2 \alpha \left(1 - \frac{y}{c}\right)^2} \quad \dots\dots\dots \quad (21)$$

Diese Gleichungen (16) (18) (19) (20) (21) drücken die Beziehungen aus, welche zwischen den Construktionselementen und den Wirkungen des Steuerungsapparates bestehen, und wir können nun vermittelst derselben verschiedene Fragen beantworten.

Legen wir uns zunächst die Aufgabe vor, die Wirkungen eines Apparates, dessen Elemente gegeben sind, zu bestimmen.

In diesem Falle sind die gegebenen Grössen

$$e \quad i \quad \varrho \quad \alpha \quad c \quad y \quad r$$

Die zu suchenden Grössen dagegen

$$a \quad a_1 \quad \Omega_1 \quad X_1 \quad \Omega_2 \quad X_2 \quad \Omega_3 \quad X_3$$

und wir erhalten nun

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{wegen Gleichung} & (16): & a = \varrho \sin.\alpha - e \\
\text{„} \quad \text{„} & (21): & a_1 = \varrho\sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1 - \frac{y}{c}\right)^2} \\
\text{„} \quad \text{„} & (20): & \text{tang.}\,\Omega_1 = \dfrac{1 - \frac{y}{c}}{\text{tang.}\,\alpha} \\
\text{„} \quad \text{„} & (17): & X_1 = r(1 - \cos.\Omega_1) \\
\text{„} \quad \text{„} & (18): & e = \varrho \sin.(\alpha + \Omega_2) - y\frac{\varrho}{c}\cos.\alpha \sin.\Omega_2 \\
\text{„} \quad \text{„} & (18): & X_2 = r(1 - \cos.\Omega_2) \\
\text{„} \quad \text{„} & (19): & +i = -\varrho\sin.(\alpha + \Omega_3) + y\frac{\varrho}{c}\cos.\alpha\sin.\Omega_3 \\
\text{„} \quad \text{„} & (19): & X_3 = r(1 - \cos.\Omega_3)
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Die Werthe von Ω_2 und Ω_3 müssen aus den trigonometrischen Gleichungen, welche e und i ausdrücken, durch ein Annäherungsverfahren berechnet werden.

Senkt man die Tasche ganz herab, so dass $y = 0$ wird, so wirkt nur allein das Vorwärts-Excentrum auf den Schieber und die Einströmungsöffnung, so wie auch die Dauer der Einströmung wird dann am grössten. Für diesen Fall werden die Gleichungen (22)

$$\left.\begin{array}{l}
a = \varrho \sin.\alpha - e \\
a_1 = \varrho \\
\Omega_1 = 90^0 - \alpha \\
X_1 = r(1 - \sin.\alpha) \\
e = \varrho \sin.(\alpha + \Omega_2) \\
X_2 = r(1 - \cos.\Omega_2) \\
i = -\varrho \sin.(\alpha + \Omega_3) \\
X_3 = r(1 - \cos.\Omega_3)
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

woraus sich die unbekannten Grössen sehr leicht berechnen lassen.

Legen wir uns ferner die Aufgaben vor, die Construktionselemente des Apparates so zu bestimmen, dass derselbe eine gewisse Wirkung hervorbringt, so sind die gegebenen Grössen

$$a \quad a_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad y \quad c \quad r$$

und die zu suchenden

$$e \quad i \quad \varrho \quad \alpha \quad \Omega_1 \quad X_1 \quad \Omega_2 \quad \Omega_3$$

Aus der Gleichung (16) und der ersten der Gleichungen (17) folgt:

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{a_1 \sin.\alpha - a\sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1-\frac{y}{c}\right)^2}}{\sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1-\frac{y}{c}\right)^2} - \sin.\alpha} \\ \varrho &= \frac{a_1 - a}{\sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1-\frac{y}{c}\right)^2} - \sin.\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (24)$$

Durch Division dieser Ausdrücke folgt:

$$\frac{e}{\varrho} = \frac{a_1 \sin.\alpha - a\sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1-\frac{y}{c}\right)^2}}{a_1 - a} \quad \ldots\ldots (25)$$

Vermöge der ersten der Gleichungen (18) ist aber auch:

$$\frac{e}{\varrho} = \sin.(\alpha + \Omega_2) - \frac{y}{c}\cos.\alpha \sin.\Omega_2 \quad \ldots\ldots (26)$$

Man erhält daher, wenn man diese Werthe von $\frac{e}{\varrho}$ einander gleich setzt:

$$\sin.(\alpha+\Omega_2) - \frac{y}{c}\cos.\alpha\sin.\Omega_2 = \frac{a_1}{a_1-a}\sin.\alpha - \frac{a}{a_1-a}\sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1-\frac{y}{c}\right)^2} \quad \ldots (27$$

Die zu suchenden Grössen lassen sich nun auf folgende Art bestimmen:

Aus der zweiten der Gleichungen (18) folgt zunächst:

$$\cos.\Omega_2 = 1 - \frac{X_2}{r}$$

Zur Bestimmung von α dient die trigonometrische Gleichung (27), nämlich:

$$\sin.(\alpha+\Omega_2) - \frac{y}{c}\cos.\alpha\sin.\Omega_2 = \frac{a_1}{a_1-a}\sin.\alpha - \frac{a}{a_1-a}\sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1-\frac{y}{c}\right)^2}$$

(28)

Die zweite der Gleichungen (24) gibt:

$$\varrho = \frac{a_1 - a}{\sqrt{\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha\left(1-\frac{y}{c}\right)^2} - \sin.\alpha}$$

Aus der Gleichung (16) folgt dann ferner:

$$e = \varrho \sin.\alpha - a$$

Aus der ersten der Gleichungen (20):

$$\text{tang.}\,\Omega_1 = \frac{1 - \frac{y}{c}}{\text{tang.}\,\alpha}$$

Aus der zweiten der Gleichungen (17):

$$X_1 = r\,(1 - \cos.\,\Omega_1)$$

Aus der zweiten der Gleichungen (19):

$$\cos.\,\Omega_3 = 1 - \frac{X_3}{r}$$

Endlich aus der ersten der Gleichungen (19):

$$i = -\varrho \sin.\,(\alpha + \Omega_3) + y\frac{\varrho}{c}\cos.\,\alpha \sin.\,\Omega_3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ (28)$$

Verlangt man, dass der Apparat gewisse Wirkungen hervorbringt, wenn nur allein das Vorwärts-Excentrum auf den Schieber einwirkt, so ist $y = o$ und dann werden die Gleichungen (28)

$$\left.\begin{aligned}
\cos.\,\Omega_2 &= 1 - \frac{X_2}{r} \\
\sin.\,(\alpha + \Omega_2) &= \frac{a_1}{a_1 - a}\sin.\,\alpha - \frac{a}{a_1 - a} \\
\varrho &= \frac{a_1 - a}{1 - \sin.\,\alpha} \\
e &= \varrho \sin.\,\alpha - a \\
\Omega_1 &= 90 - \alpha \\
X_1 &= r\,(1 - \sin.\,\alpha) \\
\cos.\,\Omega_3 &= 1 - \frac{X_3}{r} \\
i &= -\varrho \sin.\,(\alpha + \Omega_3)
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (29)$$

Nebst diesen zwei Hauptfragen, die durch die Gleichungen (22) (23) (28) (29) beantwortet werden, kann man noch sehr viele andere stellen, allein ich will diesem Gegenstand keine zu grosse Ausdehnung geben, weil ich der Ansicht bin, dass dieser Apparat nicht als Expansionssteuerung, sondern nur als gewöhnliche Steuerung einen praktischen Werth hat.

Als Expansionssteuerung ist der Apparat sehr unvollkommen, denn schwache Expansionen, die man wohl ganz gut hervorbringen kann, helfen nicht viel, und stärkere Expansionen geschehen sehr mangelhaft, indem die grösste Einströmungsöffnung zu klein und die Dauer der Compression und des Gegendruckes gegen das Ende des Schubes hin zu gross ausfällt.

Als gewöhnlicher Steuerungsapparat ist dagegen diese Vorrichtung eine vortreffliche, das Vor- und Rückwärtsfahren und selbst auch das Abstellen der Maschine kann so leicht

und sicher bewirkt werden; das Voreilen des Schiebers macht, dass der Dampf leicht in den Cylinder gelangen kann, und durch die Aufhebung der Einströmung, bevor noch der Kolben das Ende seines Schubes erreicht hat, bewirkt man, dass der Cylinder nicht nachträglich, wenn sich der Kolben kaum mehr bewegt, mit Dampf gefüllt wird.

Um den Gebrauch der aufgestellten Formeln zu zeigen, wollen wir eine numerische Anwendung machen.

Stellen wir an einen zu construirenden Apparat folgende Forderungen.

Wenn nur allein das Vorwärtsexcentrum auf den Schieber einwirkt, wenn also $y = 0$ ist, soll:

1. die Einströmung durch 0·839 des Kolbenschubes stattfinden;
2. die Ausströmung aufhören, nachdem der Kolben 0.964 seines Schubes zurückgelegt hat;
3. das lineare Voreilen 0·007 Meter betragen;
4. die grösste Einströmungsöffnung 0·035 Meter betragen.

Es ist also gegeben:

$$y = 0 \qquad \frac{X_2}{2r} = 0{\cdot}839 \qquad \frac{X_3}{2r} = 0{\cdot}964 \qquad a = 0{\cdot}007 \text{ Meter} \qquad a_1 = 0{\cdot}035 \text{ Meter}$$

Für diese Daten findet man aus den Formeln (29):

$$\cos. \Omega_2 = 1 - 1{\cdot}678 = -0{\cdot}678 \;\ldots\ldots\; \Omega_2 = 132^0 + 42'$$

$$\sin. (\alpha + 132^0 + 42') = \frac{0{\cdot}035}{0{\cdot}035 - 0{\cdot}007} \sin. \alpha - \frac{0{\cdot}007}{0{\cdot}035 - 0{\cdot}007} \qquad \alpha = 28^0$$

$$\varrho = \frac{0{\cdot}035 - 0{\cdot}007}{1 - \sin. 28^0} \;\ldots\ldots\; \varrho = 0{\cdot}0528 \text{ Meter}$$

$$e = 0{\cdot}0528 \sin. 28^0 - 0{\cdot}007 \;\ldots\ldots\; e = 0{\cdot}024 \text{ Meter}$$

$$\Omega_1 = 90 - 28 \;\ldots\ldots\; \Omega_1 = 62^0$$

$$\frac{X_1}{2r} = 1 - \sin. 28^0 \;\ldots\ldots\; \frac{X_1}{2r} = 0{\cdot}5306$$

$$\cos. \Omega_3 = 1 - 1{\cdot}928 = -0{\cdot}928 \;\ldots\ldots\; \Omega_3 = 158^0\, 8'$$

$$i = -0{\cdot}0528 \sin. (158^0 + 8' + 28^0) \;\ldots\ldots\; i = 0{\cdot}006$$

VI.

Die störenden Bewegungen einer Lokomotive.

Einleitung.

Stellt man sich in die Nähe des Geleises einer Eisenbahn, und beobachtet mit Aufmerksamkeit die Bewegung einer im vollen Laufe vorüber fahrenden Lokomotive, so hat es das Ansehen, als erfolgte diese Bewegung genau nach der Richtung des Geleises und mit vollkommen gleichförmiger Geschwindigkeit. Stellt man sich hingegen auf die Plattform der Lokomotive, so fühlt und sieht man sogleich, dass sie nicht so sanft als es von dem ersten Standpunkt aus zu sein schien dem Geleise folgt, sondern dass sie sehr mannigfaltigen heftigen Erschütterungen, Zuckungen und Schwankungen ausgesetzt ist. Man fühlt, dass die Stelle, auf der man steht, auf und nieder, vorwärts und rückwärts, so wie auch hin und her oscillirt, sieht ferner, dass der Kessel und alle mit demselben in Verbindung stehenden Theile sehr mannigfaltige geradlinige und drehende Schwingungen machen, und insbesondere, dass die Lokomotive dem Geleise nicht genau folgt, sondern zwischen demselben hin und her schlängelt.

Die wirkliche Bewegung der Lokomotive erfolgt also nicht in so einfacher Weise, als sie einem neben der Bahn stehenden Beobachter vor sich zu gehen scheint, sondern die ganze Bewegung ist im Gegentheil aus sehr vielen einzelnen Bewegungen zusammengesetzt.

Allein die Lokomotive sollte sich, um ihrem Zweck vollkommen zu entsprechen, mit absolut gleichförmiger Geschwindigkeit und in der Weise fortbewegen, dass jeder ihrer Punkte eine mit der Axe des Geleises vollkommen congruente Kurve beschriebe, so zwar, dass die in den Wägen befindlichen Gegenstände und Personen von der Fortbewegung des Zuges gar nicht affizirt würden. Diese Abweichungen des wirklichen Bewegungszustandes von dem gleichförmig mittleren sind demnach schädliche Störungen, die so viel als möglich geschwächt oder beseitiget werden sollten, denn diese Störungen zerrütteln den Bau der Lokomotive und können, wenn sie in einer gewissen Stärke auftreten, ein Ausgleisen der Lokomotive veranlassen.

Die praktische Beseitigung oder Schwächung dieser Störungen erfordert eine genaue Kenntniss der Ursachen und Umstände, durch welche sie hervorgerufen werden, und diese Kenntniss erlangt man, wenn man die wahre Bewegung der Lokomotive mit Hilfe der allgemeinen Grundsätze der Mechanik untersucht und berechnet, was in der folgenden Untersuchung geschehen soll.

Zuvörderst wollen wir die einzelnen Elementarbewegungen, aus welchen die totale Bewegung zusammengesetzt ist, namhaft machen; diese Elementarbewegungen sind:

1) *Der mittlere Fortlauf.* Das ist diejenige gleichförmige Bewegung, welche eintreten müsste, wenn die verschiedenen Störungen gar nicht vorhanden wären, und wenn in

jedem Augenblick die auf die Lokomotive einwirkenden treibenden Kräfte mit den Widerständen im Gleichgewicht wären.

2) *Die periodische Bewegung des Schwerpunktes.* Im Beharrungszustand der Bewegung ist wohl die Kraft, mit welcher die Lokomotive durch den Dampfdruck getrieben wird, mit den Widerständen, im Mittel genommen, im Gleichgewicht, aber nicht in jedem einzelnen Zeitaugenblick der Bewegung, denn die beiden Kolben wirken auf zwei unter einem rechten Winkel gegen einander gestellte Kurbeln ein, was zur Folge hat, dass das statische Moment der Kraft, mit welcher die Kurbelaxe umgetrieben wird, einen periodischen veränderlichen Werth hat. Dieses Moment ist am kleinsten, wenn einer der beiden Kolben am Ende, der andere gleichzeitig auf halbem Schub steht, es ist am grössten, wenn beide Kurbeln mit der Bewegungsrichtung der Kolben Winkel von 45° bilden. Die Maschine wird also im Beharrungszustand ihrer Bewegung mit einer Kraft vorwärtz getrieben, die bald stärker, bald schwächer ist als die Widerstände, ihre Geschwindigkeit muss also bald zu-, bald abnehmen. Die hieraus entstehende Zuckung ist jedoch, wie wir früher (Seite 94) gezeigt haben, wegen der grossen Masse der Lokomotive, so wie auch wegen der Raschheit, mit der sie sich in der Regel bewegt, so schwach, dass ihre Existenz zwar durch Rechnung nachgewiesen, aber durch das Gefühl, sowie auch durch Messungen gar nicht erkannt werden kann.

3) *Das Zucken.* Die Massen der Kolben, der Kolbenstangen und Schubstangen, sowie auch die Massen einiger Steuerungstheile haben gegen das Wagengestell eine hin- und hergehende Bewegung. Der Schwerpunkt des vollständigen Lokomotivbaues hat daher gegen den Rahmenbau eine periodisch veränderliche Lage, allein diese Massenbewegungen können (nach dem Grundsatz der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes eines Massensystems) auf die Bewegungen des Schwerpunktes keinen Einfluss ausüben, es muss also die Verschiebung des Schwerpunktes, welche durch den Hin- und Hergang der Massen angeregt wird, durch eine gewisse Bewegung der Massen des Rahmen- und Kesselbaues aufgehoben werden. Gehen beide Kolben vorwärts, so muss gleichzeitig der Rahmen mit dem Kessel zurückweichen, gehen beide Kolben rückwärts, so muss der Rahmen mit dem Kessel vorwärts rücken. Bewegen sich die Kolben mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung, so kann in diesem Augenblick der Rahmenbau mit dem Kessel weder vorwärts noch rückwärts. Man sieht also, dass durch die hin- und hergehenden Bewegungen der Massen des Kolbens, der Kolbenstange, der Schubstange etc., ein Vorwärts- und Rückwärtsbewegen des Rahmenbaues, mithin ein Zucken desselben veranlasst wird.

Man kann sich diese Wirkung der hin- und hergehenden Massen auch auf folgende Art erklären. Diese hin- und hergehenden Massen einer Maschine werden durch die erste Hälfte eines Schubes beschleuniget, in der zweiten Hälfte verzögert; dies ist aber nur möglich, wenn die auf diese Massen nach entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte, nämlich der Druck des Dampfes, gegen eine Kolbenfläche, und der Rückdruck des Kurbelzapfens gegen die Schubstange nicht gleich gross sind, sondern wenn der Rückdruck des Kurbelzapfens gegen die Schubstange in der ersten Hälfte des Schubes kleiner, in der zweiten Hälfte des Schubes grösser ist als der Dampfdruck gegen den Kolben. Nun wirkt aber der in einem Cylinder befindliche Dampf nicht nur gegen eine der Grundflächen des Kolbens, sondern auch gleichzeitig gegen die dieser Grundfläche zugewendete Deckelfläche des Cylinders, und diese Pressungen sind von gleicher Stärke. Durch die Wirkung des Dampfes auf jede der beiden Maschinen wird daher der Rahmenbau durch ungleiche Kräfte nach entgegengesetzter Richtung gepresst und die Resultirende dieser Kräfte wirkt in den auf einander folgenden Schubhälften abwechselnd vorwärts und rückwärts; es wird demnach der Wagenbau durch die Wirkung des Dampfes auf jede der beiden Maschinen abwechselnd vorwärts und rückwärts getrieben und da die Kurbeln der beiden Maschinen nicht um 180°, sondern um 90° gegeneinander gestellt sind, so können sich diese Wir-

kungen der beiden Maschinen auf das Wagengestelle, mit Ausnahme einzelner Zeitmomente, nicht aufheben, Wagenbau und Kessel müssen daher wegen der abwechselnden Beschleunigung und Verzögerung der hin- und hergehenden Massen in eine zuckende Bewegung gerathen. Diese störende Bewegung kann jedoch, wie zuerst *Le Chatelier* gezeigt hat, vollständig aufgehoben werden, wenn die Triebräder der Lokomotive mit Massen versehen werden, die durch ihre Centrifugalkraft die ungleiche Wirkung der Schubstangen gegen die Kurbelzapfen aufheben.

4) *Das Schlingern.* Nebst diesen zuckenden Bewegungen, veranlassen die hin- und hergehenden Massen auch noch eine oscillirende drehende Bewegung der Lokomotive um eine durch ihren Schwerpunkt gehende Vertikalaxe; denn die Pressungen des Dampfes gegen die Deckelflächen der Cylinder und die Pressungen der Schubstangen gegen die Kurbelzapfen, halten sich auch in Bezug auf Drehung um eine vertikale Schwerpunktsaxe nicht das Gleichgewicht. Diese Kräfte bestreben sich also, die Lokomotive abwechselnd hin und her zu drehen, und da die Räder zwischen den Schienen einen gewissen, wenn auch kleinen Spielraum haben, so setzt sich jene Drehung mit der fortschreitenden Bewegung zu einer schlängelnden Bewegung zusammen, die, insbesondere wenn der Druck der Vorderräder gegen die Bahn schwach ist, ein Ausgleisen der Lokomotive veranlassen kann.

Auch diese Schlängelung kann ganz aufgehoben werden, wenn man die Triebräder mit Massen versieht, die durch ihre Centrifugalkraft die Drehung aufheben, welche durch die hin- und hergehenden Massen angeregt wird.

Nebst den bisher angeführten Elementarbewegungen kommen noch drei andere, einzig und allein von dem Bau der Lokomotive herrührende schwingende Bewegungen vor. Der zu einem Ganzen vereinigte Bau des Rahmens, des Kessels und der Cylinder wird stets durch Federn getragen, die auf den Axenbüchsen der Trieb- und Tragräder direckt oder indireckt aufsitzen, dieser Bau liegt also auf einer elastischen Unterlage, die möglicher Weise dreierlei Bewegungen zulässt und diese Möglichkeiten werden durch den Druck, den die Gleitstücke, wegen der im Allgemeinen schiefen Lage der Schubstangen, gegen die Führungen beim Vorwärtsfahren nach vertikaler Richtung aufwärts, beim Zurückfahren nach vertikaler Richtung abwärts ausüben, zur Wirklichkeit. Diese Bewegungen befolgen sehr komplizirte Gesetze, weil die Gleitstücke ihren Ort verändern und die Intensitäten ihrer Pressungen mit der wechselnden Neigung der Schubstangen periodisch veränderlich sind. Diese drei Bewegungen sind nun:

5) *Das Wogen.* Vertikalschwingung des Schwerpunktes. Der an den Federn hängende Bau wird durch sein Gewicht nach abwärts, durch die Elastizitätskraft der Federn und durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale nach aufwärts zur Bewegung angeregt. Allein die Elastizitätskräfte der Federn sind mit ihrem Biegungszustand, und die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale sind mit der Stellung der Schubstangen periodisch veränderlich, und dadurch entsteht nach vertikaler Richtung eine schwingende Bewegung des Schwerpunktes, die wir das Wogen der Lokomotive nennen wollen.

6) *Das Wanken.* (Drehung um eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Längenaxe). Die auf den Wagenbau nach vertikaler Richtung wirkenden Kräfte sind im Allgemeinen in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Längenaxe nicht im Gleichgewicht, müssen daher, da sie periodisch veränderlich sind, ein Hin- und Herdrehen, also ein Wanken des ganzen Baues hervorbringen. Dadurch werden die Räder der Lokomotive bald stark, bald schwach gegen die Bahn gedrückt, und wenn in einem Moment, in welchem der Druck eines Vorderrades gegen die Bahn schwach ist, durch eine an der Bahn befindliche Unebenheit ein Stoss gegen dieses schwach niederdrückende Rad ausgeübt wird, so kann ein Ausgleisen der Lokomotive die Folge sein. Dieses Wanken, so wie auch das früher besprochene Auf- und Niederwogen der Lokomotive kann nicht

vollständig aufgehoben werden, denn die Federn müssen vorhanden sein, weil sonst die von den Unebenheiten der Bahn entstehenden Stösse zu hart wären, und die Pressungen der Gleitstücke gegen die Leitlineale können auch nicht aufgehoben werden; diese störenden Bewegungen können jedoch durch eine zweckmässige Bauart der Lokomotive so weit gemässigt werden, dass sie nicht mehr gefährlich werden. Durch welche Construktionsweise dieses möglich wird, wird sich in der Folge zeigen.

7) *Das Nicken.* (Drehung um eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Queraxe). Jene vertikal aufwärts wirkenden Pressungen der Federn und der Gleitstücke sind aber auch in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende horizontale Queraxe nicht im Gleichgewicht, müssen also periodische Drehungen um diese Axe, demnach ein abwechselndes Heben und Senken der Enden des auf den Federn liegenden Baues hervorbringen. Jedesmal, wenn das vordere Ende des Wagenbaues aufwärts schwingt, ist der Druck der Vorderräder gegen die Bahn schwach, und wenn in einem solchen Moment durch eine Unebenheit der Bahn die Vorderräder in die Höhe gestossen werden, kann es geschehen, dass ihre Berührung mit der Bahn aufhört und dass sie aus dem Geleise gelenkt werden. Es ist also auch diese Störung hinsichtlich des Ausgleisens sehr bedenklich, und soll daher so weit als möglich geschwächt werden, was wiederum nur durch eine geeignete Bauart der Lokomotive geschehen kann.

Die aus dem Wogen, Wanken und Nicken sich zusammensetzende Bewegung kann man das Gaukeln nennen.

Den mittleren Fortlauf der Lokomotive und die periodische Bewegung des Schwerpunktes haben wir bereits in dem vorhergehenden Abschnitte behandelt; die übrigen der genannten Bewegungen werden wir in diesem Abschnitt erschöpfend untersuchen.

Das Zucken und Schlingern.

Bewegungen einer frei hängenden Lokomotive.

Wenn man eine nicht balanzirte Lokomotive mit vier langen Ketten, welche den Rahmen an seinen vier Ecken fassen, aufhängt, so dass sie frei in der Luft schwebt, und sich wie ein Pendel, in horizontalem Sinne, nach jeder Richtung bewegen kann, hierauf den Kessel heizt, und den Dampf auf die Maschine wirken lässt, so gerathen nicht nur die Kolben, die Schubstangen, die Kurbelaxen und sämmtliche Triebräder in Bewegung, sondern es entsteht auch in dem Rahmenbau und den damit verbundenen Theilen (Kessel, Dampfcylinder etc.) eine aus zwei Schwingungen zusammengesetzte Bewegung, aus einer Schwingung in der Richtung der Längenaxe der Lokomotive und aus einer drehenden Schwingung um eine Vertikalaxe. Die Ursachen, welche diese beiden Schwingungen in einer frei hängenden Lokomotive veranlassen, sind auch vorhanden, wenn die Lokomotive nicht aufgehängt, sondern auf die Bahn gestellt ist und auf derselben fortläuft, und sie sind es, welche dann die Erscheinungen verursachen, die wir Zucken und Schlingern genannt haben.

Eine genaue Kenntniss der schwingenden Bewegungen einer frei hängenden Lokomotive ist in zweifacher Hinsicht von praktischem Werth, denn zunächst lernen wir dadurch die Bewegungen kennen, welche eine auf der Bahn fortlaufende Lokomotive, vermöge ihres inneren Baues, zu machen strebt und theilweise auch wirklich macht; denn eine Lokomotive, die frei hängend Längen-Oscillationen und drehende Schwingungen zeigt,

wird, wenn man sie auf die Bahn stellt und durch Dampf forttreibt, vermöge der Ursache, welche die Längenschwingungen veranlasst, mit periodischer Geschwindigkeit fortrollen, und vermöge der Ursache, welche die drehenden Schwingungen erzeugt, ihre Bewegungsrichtung zwischen dem Geleise bald nach der einen, bald nach der andern Seite zu ändern suchen und die Energie, mit welcher sie dies zu thun strebt, wird aus der Kraft beurtheilt werden können, mit welcher die drehenden Schwingungen im frei hängenden Zustand erfolgen. Den Hauptvortheil, den wir aus dem Studium der Bewegungen einer frei hängenden Lokomotive ziehen können, besteht aber darin, dass wir dadurch die Mittel kennen lernen, durch welche diese Schwingungen ganz aufgehoben werden können, und diese Mittel sind zugleich diejenigen, welche das Zucken und Schlingern einer auf der Bahn laufenden Lokomotive ganz aufheben, denn eine Lokomotive, die im aufgehängten Zustand keinerlei Schwingungen zeigt, kann, wenn sie auf die Bahn gestellt und fortgetrieben wird, kein Bestreben zu einer Geschwindigkeits- oder Richtungsänderung der Bewegung äussern. Die Mittel, welche die Schwingungen der frei hängenden Lokomotive beseitigen, sind also zugleich die Mittel, durch welche das Zucken und Schlingern aufgehoben werden kann.

Das Zucken.

Längenschwingungen einer frei hängenden Lokomotive.

Diese Schwingungen kann man durch verschiedene Methoden berechnen. Eine Methode bietet der Grundsatz der Erhaltung des Schwerpunktes dar, und nach dieser wollen wir die Berechnung durchführen.

Eine frei hängende, durch die innere Kraft des Dampfes in Bewegung gebrachte Lokomotive kann als ein Massensystem angesehen werden, auf welches keine nach horizontaler Richtung zielende äussere Kräfte einwirken, da nun die inneren Kräfte eines solchen Systems den Ort seines Schwerpunktes nicht zu verrücken vermögen, so müssen die Bewegungen sämmtlicher Massen so vor sich gehen, dass der dem Massensystem in jedem Augenblick entsprechende ideale Schwerpunkt stets an dem gleichen Ort bleibt. Hieraus folgt, dass der Rahmenbau zurückweichen muss, wenn beide Kolben vorwärts gehen, und vorwärts schwingen wird, wenn beide Kolben zurückgehen etc., dass mithin Längenoscillationen des Rahmenbaues eintreten müssen. Es sei nun Tab. XI, Fig. 43 der Grundriss, Tab. XII., Fig. 44 der Aufriss der Lokomotive in einem Augenblick der Bewegung, in welchem die Mittellinie $A x_1$ des Rahmens mit einer durch den idealen Schwerpunkt B des Ganzen Systems gezogenen fixen geraden Linie O x einen Winkel φ bildet, der vermöge der drehenden Schwingungen einen veränderlichen Werth hat, in welchem Augenblick ferner die Kurbeln der rechtseitigen und linkseitigen Maschine mit einer Horizontalebene, beziehungsweise die Winkel α und $\frac{\pi}{2}-\alpha$ bilden. O sei ein in der Linie B x willkührlich angenommener fixer Punkt, A der Mittelpunkt der Kurbelaxe, C der Schwerpunkt aller Theile der Lokomotive, mit Ausnahme der Kolben, Kolbenstangen, Schubstangen und der Kurbelkörper.

Nennen wir:

$\overline{OB}=a$ die Entfernung des idealen Schwerpunktes des totalen Massensystems von dem fixen Punkt O;

$\overline{AC}=b$ die Entfernung des Schwerpunktes aller in C vereinigt gedachten Massen vom Mittelpunkt der Kurbelaxe;

$\overline{AB} = \xi$ die Entfernung des Mittelpunktes der Kurbelaxe von dem idealen Schwerpunkt B des totalen Massensystems in dem Augenblick, in welchem die Winkel α und φ gelten;

$\left.\begin{array}{l} AP_1 = x_1 \\ MP_1 = y_1 \end{array}\right\}$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der Lokomotive in Bezug auf die Linie Ax_1;

$\left.\begin{array}{l} OP = x \\ MP = y \end{array}\right\}$ die Coordinaten des Punktes M in Bezug auf die Linie OBx;

G das Gewicht der vollständigen Lokomotive sammt Wassergehalt des Kessels;

q das Gewicht eines Kurbelkörpers sammt Kurbelwarze;

ϱ die Entfernung des Schwerpunktes von q von der Kurbelaxe;

S die Summe der Gewichte eines Kolbens einer Kolbenstange sammt Kreuzkopf und einer Schubstange;

L die Länge einer Kolbenstange;

r den Halbmesser einer Kurbel;

s die Entfernung des Schwerpunktes einer Masse S vom Mittelpunkt des Kurbelzapfens, wenn Kurbel, Schubstange und Kolbenstange in eine geraden Linie fallen,

so ist zunächst:

$$\left.\begin{array}{l} x = a + (x_1 - \xi)\cos.\varphi - y_1 \sin.\varphi \\ y = \quad (x_1 - \xi)\sin\varphi + y_1\cos.\varphi \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Nennt man m das Gewicht des im Punkt M befindlichen Massentheilchens der Lokomotive, so hat man zur Bestimmung des Ortes des idealen Schwerpunktes B die Beziehung;

$$\Sigma m x = a \Sigma m \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wobei Σ das Summenzeichen ist, welches auf sämmtliche Massenpunkte der totalen Lokomotive auszudehnen ist.

Setzt man für x den Werth, welchen die erste der Gleichungen (1) darbietet, so wird:

$$\Sigma m \left[a + (x_1 - \xi)\cos.\varphi - y_1 \sin.\varphi\right] = a\Sigma m \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

oder weil $\Sigma m a = a \Sigma m$ ist:

$$\Sigma m \left[(x_1 - \xi)\cos.\varphi - y_1 \sin.\varphi\right] = 0 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

In diesem Ausdruck darf man $\sin.\varphi$ und $\cos.\varphi$ vor das Summenzeichen setzen, weil der Winkel φ für alle Massenpunkte der Lokomotive den gleichen Werth hat, man erhält daher statt dieser Gleichung (4) die folgende:

$$\cos.\varphi\,(\Sigma m x_1 - \Sigma m \xi) - \sin.\varphi\,\Sigma m y_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Nun ist aber $\Sigma m y_1 = 0$, indem jedem Punkt, welcher sich linker Hand von der Mittellinie Ax_1 befindet, ein zweiter Punkt rechter Hand entspricht, für welchen y_1 eben so gross, aber negativ ist. Dann ist ferner $\Sigma m \xi = \xi\,\Sigma m = \xi G$. Die Gleichung (5) wird daher, weil $\cos.\varphi$ nicht Null ist:

$$\Sigma m x_1 = \xi G \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

wobei Σ wie früher auf sämmtliche Massenpunkte der ganzen Lokomotive auszudehnen ist.

Bezeichnet man für einen Augenblick durch $\Sigma_1\ \Sigma_2\ \Sigma_3$ diejenigen Theile der ganzen Summe $\Sigma m x_1$, welche sich auf die Gewichte $G - 2q - 2S$ $2q$ und $2S$ beziehen, so ist, wenn man die Hin- und Herbewegung der Steuerungstheile unberücksichtiget lässt:

$$\Sigma m x_1 = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Est ist aber $\Sigma_1 = (G - 2q - 2S)\,b$:

$$\Sigma_2 = q\,\varrho \cos.\alpha + q\,\varrho \sin.\alpha = q\,\varrho\,(\cos.\alpha + \sin.\alpha)$$

Ferner, wenn man die Winkel vernachlässigt, welche die Schubstangen mit den Kolbenstangen bilden:

$$\Sigma_3 = S\,(r \cos.\alpha + s) + S\,(r \sin.\alpha + s)$$

$$\Sigma_3 = S\left[r\,(\cos.\alpha + \sin.\alpha) + 2\,s\right]$$

Man hat demnach:

$$\Sigma m x_1 = b\,(G - 2q - 2S) + q\,\varrho\,(\cos.\alpha + \sin.\alpha) + S\left[r\,(\cos.\alpha + \sin.\alpha) + 2\,s\right]$$

oder:

$$\Sigma m x_1 = (G - 2q - 2S)\,b + 2\,S\,s + (q\,\varrho + S\,r)\,(\cos.\alpha + \sin.\alpha)$$

Führt man diesen Werth von $\Sigma m x_1$ in die Gleichung (6) ein und sucht dann den Werth von ξ, so findet man:

$$\xi = \frac{(G - 2g - 2S)\,b + 2\,S\,s}{G} + \frac{q\,\varrho + S\,r}{G}\,(\cos.\alpha + \sin.\alpha) \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Der Werth von ξ ist, wie man sieht, mit dem Winkel α periodisch veränderlich, d. h die Kurbelaxe der Lokomotive, der Rahmenbau und alle mit demselben starr verbundenen Körper bewegen sich daher bei jeder Umdrehung der Triebräder vorwärts und rückwärts, oder die Lokomotive macht periodische Längenschwingungen. Von $\alpha = o$ bis $\alpha = 45^0$ nimmt die Summe $\cos.\alpha + \sin.\alpha$ und nimmt folglich auch der Werth von ξ fortwährend zu, der Rahmen bewegt sich also in dieser Zeit rückwärts. Von $\alpha = 45^0$ bis $\alpha = 180 + 45^0$ nimmt der Werth von $\sin.\alpha + \cos.\alpha$ und nimmt folglich auch ξ. fortwährend ab, und in dieser Zeit bewegt sich der Rahmen vorwärts.

Der gösste Werth von ξ, nämlich der dem Winkel 45^0 entsprechende ist:

$$\frac{(G - 2q - 2S)\,b + 2\,S\,s}{G} + \frac{q\,\varrho + S\,r}{G}\,(\sin.45^0 + \cos.45^0) =$$

$$\frac{(G - 2q - 2S)\,b + 2\,S\,s}{G} + \frac{q\,\varrho + S\,r}{G}\,\sqrt{2}$$

Der kleinste Werth von ξ, nämlich der dem Winkel $180 - 45$ entsprechende ist:

$$\frac{(G - 2q - 2S)\,b + 2\,S\,s}{G} + \frac{q\,\varrho + S\,r}{G}\left[\sin.(180 + 45^0) + \cos.(180 + 45^0)\right] =$$

$$\frac{(G - 2q - 2S)\,b + 2\,S\,s}{G} - \frac{q\,\varrho + S\,r}{G}\,\sqrt{2}$$

Die ganze Verschiebung des Rahmens während jeder Umdrehung der Triebräder ist demnach (die Differenz aus dem grössten und kleinsten Werth von ξ):

$$\frac{q\varrho + Sr}{G} 2\sqrt{2}$$

Sie ist, wie man sieht, ganz unabhängig, sowohl von der Geschwindigkeit, so wie auch von dem Gesetze, nach welchem die drehende Bewegung der Triebaxe erfolgt, und richtet sich vorzugsweise nur nach dem Verhältniss $\frac{S}{G}$ zwischen den hin - und hergehenden Massen und der ganzen Masse der Lokomotive. Da dieses Verhältniss jederzeit einen sehr kleinen Werth hat, so beträgt diese Verschiebung allerdings nicht viel, allein wenn eine Lokomotive auf der Bahn im schnellen Lauf ist, wobei die Triebräder in einer Sekunde circa 3 Umdrehungen machen, kommen in jeder Sekunde 3 solche Schüttlungen vor, sie treten also dann mit sehr grosser Heftigkeit auf.

Für eine Personenlokomotive kann man nehmen:

$$G = 24000 \text{ Kilg.} \qquad q = 60 \text{ Kilg.} \qquad S = 224 \text{ Kilg.}$$

$$r = 0{\cdot}23 \text{ Meter} \qquad \varrho = 0{\cdot}18 \text{ Meter.}$$

und dann wird:

$$\frac{q\varrho + Sr}{G} 2\sqrt{2} = 0.007 \text{ Meter.}$$

Das Zucken beträgt also hier nur 7 Millimeter, allein wenn man sich vorstellt, dass diese grosse Masse in jeder Sekunde 3 mal und jedesmal um 7 Millimeter geschüttelt wird, so wird man wohl erkennen, dass dies eine sehr heftige Bewegung sein müsse, die zunächst auf die Verbindung aller Theile der Maschine merklich nachtheilig wirken kann, dann aber noch ein abzuckendes Anziehen der Lokomotive zur Folge haben muss.

Beträchtlicher als in obigem Falle wird die Zuckung oder Schüttlung bei Maschinen mit gekuppelten Rädern, wegen der Masse der Kupplungsstangen, die ebenfalls in S eingerechnet werden müssen, vorausgesetzt, dass die Bewegungsrichtung der Kupplungsstangen mit jener der Schubstangen übereinstimmt, wie dies bei gekuppelten Maschinen mit aussen liegenden Cylindern der Fall ist. Bei Maschinen mit innen liegenden Cylindern ist es dagegen möglich, dass die äusseren Kupplungsstangen die Schüttlung vermindern, dies ist nämlich der Fall, wenn die äusseren Kurbeln der Kupplungsstangen gegen die inneren Maschinenkurbeln um 180° verstellt sind.

Bei Güterlokomotiven mit äusseren Cylindern und äusseren Schub - und Kupplungsstangen ist es, um die Schüttlung zu schwächen, gut, diese Stangen alle gerade nur so stark zu halten, als es für die Sicherheit durchaus nothwendig ist.

Bei nicht gekuppelten Maschinen ist es aber hinsichtlich der Schüttlung ganz gleichgültig, ob die Cylinder innen oder aussen liegen, weil diese Lage der Cylinder in diesem Falle auf das Gewicht der Schubstange und überhaupt auf das Gewicht der hin - und hergehenden Massen beinahe keinen Einfluss hat.

Es ist schon oben erwähnt worden, dass das Zucken wesentlich nur von dem Verhältniss $\frac{S}{G}$ abhängt; so lange dieses Verhältniss seinen Werth nicht ändert, ist es also in Betreff des Zuckens ganz gleichgültig, wie die Maschine sonst gebaut ist, ob sie äussere oder innere Cylinder hat, ob die Triebräder vor oder hinter der Feuerbüchse angebracht sind und wie überhaupt die Radstellung beschaffen ist. Auch ist es gleichgültig, ob die Spurweite gross oder klein ist, ob äussere oder innere Rahmen genommen

werden, ob der Schwerpunkt des Baues weiter vorn oder weiter zurück liegt, ob er hoch oder tief liegt u. s. w., mit einem Wort: das Zucken schreibt über den Bau der Locomotive nichts vor, ausgenommen ein möglichst geringes Gewicht der hin- und hergehenden Masse; und selbst auch von dieser Anforderung kann man sich vollständig befreien, wenn man balanzirende Massen anbringt, welche, wie wir sogleich sehen werden, das Zucken vollständig beseitigen.

Aufhebung der Längenschwingungen oder des Zuckens durch Massen.

Es gibt zwei Mittel, durch welche das Zucken ganz aufgehoben werden kann, nämlich durch Anbringung entweder von hin- und hergehenden oder von rotirenden Massen. Das Mittel der rotirenden Massen kann bei allen Arten von Lokomotiven leicht angewendet werden, jenes der hin- und hergehenden Massen jedoch nur bei Locomotiven mit innen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern. Macht man nämlich bei einer solchen Maschine das Gewicht der auf einer Seite der Lokomotive befindlichen Kupplungsstangen gleich $\frac{\varrho q + r S}{r}$, die äusseren Kurbeln der Kupplungsstangen so lang als die inneren Kurbeln und stellt sie den innern Kurbeln diametral gegenüber, so ist klar, dass dann die Schüttlung ganz aufgehoben wird, denn bei einer solchen Einrichtung ändert der den sämmtlichen hin- und hergehenden Massen entsprechende Schwerpunkt seine Lage gegen die Rahmen nicht, es ist also kein Grund vorhanden, wesshalb der Schwerpunkt des Rahmenbaues seinen Ort verändern sollte. Eine solche Lokomotive wird also im aufgehängten Zustand keine Längenschwingungen machen, und wenn sie auf der Bahn läuft, kein Zucken zeigen.

Wir wollen nun sehen, ob und auf welche Weise die Längenschwingungen an frei hängenden Lokomotiven durch Anbringung von rotirenden Massen aufgehoben werden können.

Wir versehen jedes dieser Räder mit Gewichten von gleicher Grösse (Fig. 44). Es sei Q eines dieser Gewichte, ϱ_2 die Entfernung des Schwerpunktes dieser Gewichte von der geometrischen Axe der Kurbelwelle, $180^\circ - \gamma^\circ$ und $180^\circ + \gamma^\circ$ die Winkel, welche die nach den Schwerpunkten gehenden Radien mit den Richtungen der Kurbeln bilden.

Wir berechnen zunächst die Längenschwingungen der Lokomotive, wenn sie mit diesen Gewichten versehen ist.

Es gilt auch hier wiederum wie bei der nicht balanzirten Lokomotive die Gleichung (6) Seite 113, nämlich

$$\Sigma m x_1 = \Sigma G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

allein das Summenzeichen muss hier auch auf die Balanzirgewichte Q ausgedehnt werden.

Derjenige Theil der Summe $\Sigma m x_1$ welcher sich auf die Balanzirgewichte bezieht, ist offenbar

$$-\varrho_2 Q \cos.(\alpha - \gamma) - \varrho_2 Q \cos.(90 - \alpha - \gamma) = -\varrho_2 Q \left[\cos.(\alpha - \gamma) + \sin.(\alpha + \gamma)\right]$$

Die Theile der Summe $\Sigma m x_1$ welche sich auf die übrigen Massen der Lokomotive beziehen, sind hier wie bei der nicht balanzirten Lokomotive

$$(G - 2q - 2S) b + 2 S s + (q \varrho + r S)(\sin.\alpha + \cos.\alpha)$$

und somit erhalten wir:

$$G\xi = (G - 2q - 2S)b + 2Ss + (q\varrho + rS.)(\sin.\alpha + \cos.\alpha) - \varrho_2 Q[\cos.(\alpha - \gamma) + \sin.(\alpha + \gamma)]$$

oder auch weil

$$\cos.(\alpha - \gamma) + \sin.(\alpha + \gamma) = (\sin\alpha + \cos.\alpha)(\sin\gamma + \cos\gamma).$$

$$G\xi = (G - 2q - 2S)b + 2Ss + [q\varrho + rS - \varrho_2 Q(\sin.\gamma + \cos.\gamma)][\sin.\alpha + \cos.\alpha]$$

Hieraus folgt;

$$\xi = \frac{(G - 2q - 2S)b + 2Ss}{G} + \frac{q\varrho + rS - \varrho_2 Q(\sin.\gamma + \cos.\gamma)}{G}(\sin.\alpha + \cos.\alpha) \quad . \; . \; . \quad (10)$$

Wenn keine Längenschwingungen stattfinden sollen, so muss ξ denselben Werth haben für jeden Werth von α; dies ist aber nur möglich, wenn

$$q\varrho + rS - Q\varrho_2(\sin.\gamma + \cos.\gamma) = 0$$

oder wenn

$$\sin.\gamma + \cos\gamma = \frac{\varrho q + rS}{Q\varrho_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Da diese Gleichung drei unbestimmte Grössen, nämlich γ Q und ϱ_2 enthält, so können die Längenschwingungen durch sehr verschiedene Balanzirungsgewichte aufgehoben werden. Wenn ϱ_2 und γ angenommen wird, findet man Q, wenn Q und ϱ_2 so angenommen wird, dass $\frac{\varrho q + rS}{Q\varrho_2} \leqq 1.414$ ausfällt, findet man ein entsprechendes γ.

Wenn es sich nur um die Aufhebung der Längenschwingungen handelte, könnte man $\gamma = 0$ oder $\gamma = 180^0$ nehmen und dann fände man $Q\varrho_2 = \varrho q + rS$, allein es handelt sich auch um die Beseitigung der drehenden Schwingungen, und dies erfordert, wie wir sehen werden, abermals eine gewisse Beziehung zwischen Q ϱ_2 und γ, es ist daher vorläufig angemessener, für γ keinen speziellen Werth anzunehmen, sondern abzuwarten, welche Bedingung die Aufhebung der drehenden Schwingungen vorschreibt.

Longitudinalschwingung einer aufgehängten Lokomotive der allgemeinsten Art.

Wir wollen nun die Längenschwingungen einer Lokomotive bestimmen, die folgende allgemeine Einrichtungen hat. 1) Die Entfernung eines Dampfcylindermittels vom Mittel Ax_1 der Maschine sei e; 2) die Maschine sei aussen mit Kupplungsstangen versehen; 3) die Räder seien mit Balanzirungsmassen versehen. Es sei (Tab. XII. Fig. 44 und Fig. 45.):

e die Entfernung des Mittels eines Cylinders vom Mittel Ax_1 der Lokomotive;
r der Halbmesser einer Maschinenkurbel;
S das Gewicht eines Kolbens, einer Kolbenstange und einer Schubstange;
q das Gewicht der Körper, die eine Maschinenkurbel bilden;

ϱ die Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts q von der geometrischen Axe der Kurbelwelle;

e_1 die Entfernung des Mittels einer Kupplungsstange vom Mittel Ax der Lokomotive.

S_1 das Gewicht einer Kupplungsstange;

r_1 der Halbmesser einer Kupplungsstangenkurbel;

s, s_1 Die Entfernungen der Schwerpunkte der Massen S und S_1 von den Kurbelzapfen;

$90°$ Winkel, den die Richtungen der Kupplungskurbeln gegeneinander bilden;

β Winkel, unter welchem die rechtseitige Kupplungskurbel gegen die rechtseitige Maschinenkurbel geneigt ist;

q_1 Gewicht einer Kurbel der Kupplungsstange;

ϱ_1 Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts q_1 von der geometrischen Axe der Kurbelwelle;

Q Gewicht einer Balanzirungsmasse;

ϱ_2 Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts Q von der geometrischen Drehungsaxe der Kurbelwelle;

e_2 Entfernung des Schwerpunktes eines Gewichts Q von der durch Ax_1 gelegten Verticalebene;

γ Winkel, den die Richtungen von ϱ mit den Verlängerungen von r bilden; (Fig. 44.)

Es besteht auch hier wiederum die Gleichung (6), nämlich:

$$\Sigma m x_1 = \xi G.$$

Die Glieder von $\Sigma m x_1$, welche die einzelnen Körper der ganzen Lokomotive liefern, sind hier folgende:

Die Glieder, welche entsprechen den Massen sind

$G - 2q - 2S - 2q_1 - 2S_1 - 2Q$ $b[G - 2q - 2S - 2q_1 - 2S_1 - 2Q]$

$2q$ $\quad q\varrho(\cos.\alpha + \sin.\alpha)$

$2S$ $\quad S[r(\cos.\alpha + \sin.\alpha) + 2s]$

$2q_1$ $\quad q_1\varrho_1[\cos.(\alpha+\beta) + \sin.(\alpha+\beta)]$

$2S_1$ $\quad S\left\{r_1[\cos.(\alpha+\beta) + \sin.(\alpha+\beta)] + 2s_1\right\}$

$2Q$ $\quad -Q\varrho_2\left\{\sin.(\alpha+\gamma) + \cos.(\alpha-\gamma)\right\}$

wir erhalten daher für ξ folgenden Werth

$$\xi = \frac{b(G - 2q - 2S - 2q_1 - 2S_1 - 2Q) + 2Ss + 2S_1 s_1}{G} +$$

$$\frac{q\varrho + Sr - \varrho_2 Q(\sin.\gamma + \cos.\gamma)}{G}(\sin.\alpha + \cos.\alpha) +$$

$$\frac{(q_1\varrho_1 + S_1 r_1)}{G}\cos.\beta(\sin.\alpha + \cos.\alpha) + \frac{(q_1\varrho_1 + S_1 r_1)}{G}\sin.\beta(\cos.\alpha - \sin.\alpha)$$

Wenn die Längenschwingung nicht eintreten soll, muss ξ für jeden Werth von α den gleichen Werth haben, und dies ist nur dann der Fall, wenn β entweder 0 oder 180^0 ist und wenn dann ferner:

$$q \varrho + S r - \varrho_2 Q (\sin. \gamma + \cos. \gamma) + (q_1 \varrho_1 + S_1 r_1) \cos. \beta = 0$$

oder weil $\cos. 0^0 = +1, \cos. 180^0 = -1$ ist, so wird diese Bedingungsgleichung

$$q \varrho + S r - \varrho_2 Q (\sin. \gamma + \cos. \gamma) \pm (q_1 \varrho_1 + S_1 r_1) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

wobei das obere Zeichen gilt, wenn die auf einer Seite der Linie $A x_1$ befindlichen Kurbeln parallel gestellt sind und das untere Zeichen, wenn diese Kurbeln diametral gegenüber stehen.

Das Schlingern.

Drehende Schwingungen einer frei hängenden Maschine.

Eine aufgehängte Lokomotive ist als ein System von Massen zu betrachten, welches in horizontalem Sinne nach jeder Richtung frei beweglich ist, und das von keinen äusseren Horizontalkräften affizirt wird. In einem solchen System halten sich alle inneren Horizontalkräfte das Gleichgewicht, und wenn sich die Massen des Systems gegen einander bewegen, so muss diess in einer solchen Weise geschehen, dass die sämmtlichen den Beschleunigungen der Massentheilchen entsprechenden Kräfte die Bedingungen des Gleichgewichts erfüllen, es muss daher die Summe der statischen Momente dieser Kräfte in Bezug auf eine durch den idealen Schwerpunkt des Systems gehende Vertikalaxe gleich Null sein.

Um das hier mit Worten Gesagte analytisch auszudrücken, wählen wir die gleichen Bezeichnungen, die zur Untersuchung der Längenschwingungen gedient haben, und werden im Verlauf der Rechnung nur noch einige Bezeichnungen hinzufügen.

Die beschleunigenden Kräfte eines im Punkt M befindlichen Massentheilchens, dessen Gewicht m ist, sind:

$$\frac{m}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad \frac{m}{g} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Diese Kräfte äussern ein Bestreben, die ganze Lokomotive um eine durch den idealen Schwerpunkt B gehende Vertikalaxe zu drehen, und diesem Bestreben entspricht ein Moment von der Grösse:

$$\frac{m}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} x - \frac{m}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} y$$

Die Summe der Momente aller beschleunigenden Kräfte sämmtlicher Massentheilchen ist demnach:

$$\Sigma \frac{m}{g} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} x - \frac{d^2 x}{dt^2} y \right)$$

wobei das Summenzeichen Σ auf sämmtliche Massentheilchen, aus welchem die Lokomotive besteht, auszudehnen ist.

Dieše Summe muss aber für die, im frei hängenden Zustand durch den inneren Dampfdruck bewegte Lokomotive gleich Null sein. Man hat daher zur Berechnung der drehenden Schwingung der Lokomotive die Gleichung:

$$\Sigma \, m \left(\frac{d^2 y}{dt^2} x - \frac{d^2 x}{dt^2} y \right) = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Integration:

$$\Sigma \, m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \text{Const.}$$

Wenn die Lokomotive in dem Augenblick, wenn die Einwirkung des Dampfes auf die Kolben beginnt, keine Geschwindigkeit hat, so ist in demselben für jeden Punkt der Lokomotive $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ gleich Null. Unter dieser Voraussetzung verschwindet die Constante, und die Gleichung der Bewegung wird:

$$\Sigma \, m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nun ist schon Seite (113) gefunden worden:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + (x_1 - \xi) \cos. \varphi - y_1 \sin. \varphi \\ y &= \quad\; (x_1 - \xi) \sin. \varphi + y_1 \cos. \varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Durch Differenziation findet man hieraus:

$$\frac{dx}{dt} = -(x_1 - \xi) \sin. \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \cos. \varphi \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \right) - y_1 \cos. \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \sin. \varphi \frac{dy_1}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = (x_1 - \xi) \cos. \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \sin. \varphi \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \right) - y_1 \sin. \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \cos. \varphi \frac{dy_1}{dt}$$

Allein weil die Entfernung jedes Punktes von der Mittellinie $B x_1$ der Lokomotive während ihrer Bewegung unverändert bleibt, so ist für jeden Punkt der Lokomotive $\frac{dy_1}{dt} = 0$, demnach:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\left[(x_1 - \xi) \sin. \varphi + y_1 \cos. \varphi\right] \frac{d\varphi}{dt} + \cos. \varphi \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \right) \\ \frac{dy}{dt} &= \left[(x_1 - \xi) \cos. \varphi - y_1 \sin. \varphi\right] \frac{d\varphi}{dt} + \sin. \varphi \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Durch Combination der Gleichungen (2) und (3) findet man nach einigen Reduktionen:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \left\{ (x_1 - \xi)^2 + y_1^2 + a \left[(x_1 - \xi) \cos. \varphi - y_1 \sin. \varphi\right] \right\} \frac{d\varphi}{dt} + (a \sin. \varphi - y_1) \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \right)$$

Substituirt man diesen Werth in (1) so wird derselbe:

$$0 = \frac{d\varphi}{dt} \Sigma m \left[(x_1 - \xi)^2 + y_1^2\right] + a \cdot \frac{d\left[\sin.\varphi\, \Sigma m\,(x_1 - \xi)\right]}{dt} - \Sigma m\, y_1 \frac{dx_1}{dt} - a \sin.\varphi \frac{d\varphi}{dt} \Sigma m\, y_1 + \frac{d\xi}{dt} \Sigma m\, y_1 \quad \ldots \quad (4)$$

die zwei letzten Glieder dieses Ausdrucks sind aber wegzulassen, denn beinahe jedem Massenpunkt, welcher sich auf einer Seite der Axe $B x_1$ der Lokomotive in einer grossen Entfernung y_1 befindet, entspricht auf der anderen Seite ein eben so grosser Massenpunkt, für welchen y_1 eben so gross aber negativ ist, es heben sich also in der Summe $\Sigma m y_1$ die Glieder paarweise auf. Eine Ausnahme hievon machen nur die dem Gewichte nach unbedeutenden Bestandtheile, welche nur auf einer Seite der Lokomotive vorkommen.

Durch Weglassung der zwei letzten Glieder wird die Gleichung der Bewegung

$$0 = \frac{d\varphi}{dt} \Sigma m \left[(x_1 - \xi^2) + y_1^2\right] + a \frac{d.\left[\sin.\varphi\, \Sigma m\,(x_1 - \xi)\right]}{dt} - \Sigma m\, y_1 \frac{dx_1}{dt} \quad \ldots \quad (5)$$

Allein es ist $\Sigma m x_1 = \xi\, \Sigma m = \Sigma m\, \xi$, demnach $\Sigma m\,(x_1 - \xi) = 0$, daher erhalten wir statt (5) folgende Gleichung

$$0 = \frac{d\varphi}{dt} \Sigma m \left[(x_1 - \xi)^2 + y_1^2\right] - \Sigma m\, y_1 \frac{dx_1}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Es ist aber

$$\Sigma m \left[(x_1 - \xi)^2 + y_1^2\right] = \Sigma m\,(x_1^2 + y_1^2) + \xi^2 \Sigma m - 2\,\xi\, \Sigma m\, x_1$$

oder weil $\Sigma m x_1 = \xi\, \Sigma m$ und $\Sigma m = G$ ist:

$$\Sigma m \left[(x_1 - \xi)^2 + y_1^2\right] = \Sigma m\,(x_1^2 + y_1^2) - \xi^2\, G\,.$$

daher wird die Gleichung (6) der Bewegung

$$0 = \left[\Sigma m\,(x_1^2 + y_1^2) - \xi^2\, G\right] \frac{d\varphi}{dt} - \Sigma m\, y_1 \frac{dx_1}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Die hier angedeuteten Summen müssen nun für alle Theile der Lokomotive berechnet werden. Bezeichnen wir zur Abkürzung der Sprache durch $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ diejenigen Theile der totalen Summe $\frac{d\varphi}{dt} \Sigma m\,(x_1^2 + y_1^2) - \Sigma m\, y_1 \frac{dx_1}{dt}$, welche die Massen $G - 2q - 2S$, $2q$, $2S$ liefern, so können wir die Gleichung (7) der Bewegung auch schreiben

$$0 = \mathfrak{R} + \mathfrak{K} + \mathfrak{S} - \xi^2\, G \frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$\mathfrak{N}$ bezieht sich auf alle Theile der Lokomotive mit Ausnahme der Kolben, der Schubstangen und Gleitstücke, der Kolbenstangen und der Kurbelkörper (derjenigen Massen, die über die Rundung der Axe hinausragen). Die Hin- und Herbewegung der Steuerungstheile und einiger Pumpentheile können wir vernachlässigen. Da $m(x_i^2 + y_i^2)$ das Trägheitsmoment eines Massentheilchens in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt A der Kurbel gehende Verticalaxe ausdrückt und $\frac{dx_i}{dt}$ für jeden Punkt, auf welchen $\mathfrak{N}$ bezogen werden muss, verschwindet, so reducirt sich der Werth von $\mathfrak{N}$ auf das Produkt aus $\frac{d\varphi}{dt}$ in das Trägheitsmoment aller zu $\mathfrak{N}$ gehörigen Massen in Bezug auf die durch A gehende Vertikalaxe. Dieses Trägheitsmoment, als Gewicht ausgedrückt, wollen wir durch $(G - 2q - 2S)k^2$ ausdrücken, dann haben wir

$$\mathfrak{N} = (G - 2q - 2S)\,k^2 \frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$\mathfrak{K}$ bezieht sich auf die beiden Kurbelkörper.

Der mathematisch genaue Werth von $\mathfrak{K}$ ist äuserst zusammengesetzt, jedoch von keinem erheblichen Einfluss, denn die Kurbelmassen sind im Vergleich zu den übrigen Massen sehr klein; wir dürfen uns daher mit einem Annäherungswerthe begnügen und einen solchen erhalten wir, wenn wir $\mathfrak{K}$ so berechnen, als wäre die Masse jeder Kurbel in ihrem Schwerpunkt vereinigt. Unter dieser Voraussetzung ist

für die Masse	
der Vorderkurbel	der Hinterkurbel
$x_i = \varrho \cos.\alpha$	$x_i = \varrho \sin.\alpha$
$y_i = -e$	$y_i = +e$
$\frac{dx_i}{dt} = -\varrho \sin.\alpha \frac{d\alpha}{dt}$	$\frac{dx_i}{dt} = \varrho \cos.\alpha \frac{d\alpha}{dt}$

demnach wird

$$\mathfrak{K} = \left[q(\varrho^2 \cos.^2\alpha + e^2) + q(\varrho^2 \sin.^2\alpha + e^2)\right]\frac{d\varphi}{dt} - q e \varrho \sin.\alpha \frac{d\alpha}{dt}$$
$$- q e \varrho \cos.\alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

oder

$$\mathfrak{K} = q(\varrho^2 + 2e^2)\frac{d\varphi}{dt} - q e \varrho (\sin.\alpha + \cos.\alpha)\frac{d\alpha}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

wobei $2e$ die Entfernung der Axen der beiden Dampfcylinder bezeichnet.

$\mathfrak{S}$ fällt ebenfalls äusserst zusammengesetzt aus, wenn man seinen Werth mathematisch genau bestimmen will, wir wollen uns also auch hier mit einer Annäherung begnügen, die wir dadurch erhalten, dass wir uns denken, es sei die Masse einer Schubstange, einer Kolbenstange und eines Kolbens längs einer geraden Linie L gleichmässig vertheilt, deren Länge so gross ist, als der Abstand des Kolbens von der Kurbelwarze bei ausgestreckter Stellung der Schubstange. Auch wollen wir die Neigungen der Schubstangen gegen die Kolbenstangen unberücksichtigt lassen.

Nehmen wir in den Linien L zwei Punkte an, die von ihren Kurbeln um u entfernt sind, so ist

für den Punkt der Vorderkurbel	für den Punkt der Hinterkurbel.
$x_1 = r \cos. \alpha + u$	$x_1 = r \sin. \alpha + u$
$y_1 = - e$	$y_1 = + e$
$\frac{d x_1}{dt} = - r \sin. \alpha \frac{d \alpha}{dt}$	$\frac{d x_1}{dt} = r \cos. \alpha \frac{d \alpha}{dt}$

Nennen wir λ die ganze Länge einer Linie L, so ist auf jede Längeneinheit ein Gewicht $\frac{S}{\lambda}$ zu vertheilen, und auf ein unendlich kleines Stückchen du der Länge ein Gewicht $\frac{S}{\lambda}$du. Diese beiden Gewichtstheilchen liefern zusammen in der Summe $\mathfrak{S}$ folgenden Betrag:

$$\left\{\left[(r \cos. \alpha + u)^2 + e^2\right]\frac{S}{\lambda} du + \left[(r \sin. \alpha + u)^2 + e^2\right] \frac{S}{\lambda} du \right\} \frac{d \varphi}{dt} - e r \sin. \alpha \frac{d \alpha}{dt} \frac{S}{\lambda} du - e r \cos. \alpha \frac{d \alpha}{dt} \frac{S}{\lambda} du$$

oder

$$\left[r^2 + 2 e^2 + 2 u^2 + 2 r u (\cos. \alpha + \sin. \alpha)\right] \frac{S}{\lambda} du \frac{d \varphi}{dt} - e r (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d \alpha}{dt} \frac{S}{\lambda} du$$

Die Summe $\mathfrak{S}$ wird nun gefunden, wenn man diesen letzten Ausdruck von $u = o$ bis $u = \lambda$ integrirt, und man findet

$$\mathfrak{S} = \left[(r^2 + 2 e^2) S + \frac{2}{3} S \lambda^2 + \lambda r S (\cos. \alpha + \sin. \alpha)\right] \frac{d \varphi}{dt} - e r S (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d \alpha}{dt} \quad . \quad . \quad (11)$$

Wenn wir nun die für $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ erhaltenen Werthe in der Gleichung (8) einführen, so ergibt sich:

$$0 = (G - 2 q - 2 S) k^2 \frac{d \varphi}{dt} + q (\varrho^2 + 2 e^2) \frac{d \varphi}{dt} - q e \varrho (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d \alpha}{dt}$$

$$+ \left[(r^2 + 2 e^2) S + \frac{2}{3} S \lambda^2 + \lambda r S (\cos. \alpha + \sin. \alpha)\right] \frac{d \varphi}{dt} - e r S (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d \alpha}{dt} - \xi^2 G \frac{d \varphi}{dt}$$

oder wenn man die Glieder, welche $\frac{d \varphi}{dt}$ und jene, welche $\frac{d \alpha}{dt}$ als Faktoren enthalten zusammenfasst.

$$0 = \left\{- \xi^2 G + (G - 2 q - 2 S) k^2 + q (\varrho^2 + 2 e^2) + S \left[(r^2 + 2 e^2) + \frac{2}{3} \lambda^2 + \lambda r (\sin. \alpha + \cos. \alpha)\right]\right\} \frac{d \varphi}{dt}$$

$$- (q \varrho + r S) e (\sin. \alpha + \cos. \alpha) \frac{d \alpha}{dt}$$

oder endlich wenn man für ξ seinen Werth setzt, den wir früher in der Untersuchung über die Längenschwingung gefunden haben, und welchen die Gleichung (8) Seite 114 darbietet

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} - \left[\frac{(G - 2q - 2S) b + 2Ss}{G} + \frac{q\varrho + Sr}{G} (\sin.\alpha + \cos.\alpha) \right]^2 G \\ + (G - 2q - 2S) k^2 + q (r^2 + 2c^2) \\ + S \left[(r^2 + 2e^2) + \frac{2}{3} \lambda^2 + \lambda r (\sin.\alpha + \cos.\alpha) \right] \end{array} \right\} \frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

$$- (q\varrho + rS) e (\sin.\alpha + \cos.\alpha) \frac{d\alpha}{dt}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left. \begin{array}{l} (G - 2q - 2S) k^2 + q(\varrho^2 + 2e^2) + S(r^2 + 2e^2 + \frac{2}{3}\lambda^2) - \frac{[(G - 2q - 2S) b + 2Ss]^2}{G} = \mathfrak{A} \\ -2 \frac{[(G - 2q - 2S) b + 2Ss][q\varrho + Sr]}{G} + S\lambda r = \mathfrak{B} \\ - \frac{(q\varrho + Sr)^2}{G} = \mathfrak{C} \\ - (q\varrho + rS) e = \mathfrak{D} \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (13)$$

und lässt in der Gleichung (12) dt weg, so folgt aus derselben

$$d\varphi = - \frac{\mathfrak{D} (\sin.\alpha + \cos.\alpha) d\alpha}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} (\sin.\alpha + \cos.\alpha) + \mathfrak{C} (\sin.\alpha + \cos.\alpha)^2}.$$

Das Integrale dieser Gleichung würde das Gesetz der drehenden Schwingung bestimmen. Es lässt sich in der That durchführen, allein das Ergebniss ist ein so ausserordentlich complizirtes, dass es wohl angemessen ist, sich mit einer Annäherung zu begnügen. Berücksichtigt man die Kleinheit der Massen q und S gegen die ungeheure Masse G, so ist klar, dass man keinen merklichen Fehler begehen wird, wenn man in den Ausdrücken für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nur diejenigen Glieder beibehält, welche G als Faktor enthalten, dann wird aber

$$\mathfrak{A} = G(k^2 - b^2) \qquad \mathfrak{B} = -2b(q\varrho + Sr) + S\lambda r \qquad \mathfrak{C} = 0$$

$$\mathfrak{D} = -(q\varrho + rS) e$$

und dann wird die Gleichung für $d\varphi$

$$d\varphi = - \frac{(q\varrho + rS) e (\sin.\alpha + \cos.\alpha) d\alpha}{G(k^2 - b^2) + [-2b(q\varrho + Sr) + S\lambda r][\sin.\alpha + \cos.\alpha]} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

allein hier ist das zweite Glied des Nenners gegen das erste eine verschwindend kleine Grösse, indem jederzeit k gegen b sehr gross ist: dieses zweite Glied darf also auch vernachlässigt werden und dann wird

$$d\varphi = - \frac{(q\varrho + rS) e (\sin.\alpha + \cos.\alpha) d\varphi}{G(k^2 - b^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Hieraus folgt nun durch Integration:

$$\varphi = + \frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)}(\cos.\alpha - \sin.\alpha) + \text{Const.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Für die grössten und kleinsten Werthe von φ muss $\frac{d\varphi}{d\alpha} = 0$ sein, also vermöge (15).

$$\sin.\alpha + \cos.\alpha = 0$$

Dies ist der Fall, wenn $\alpha = 180 - 45$ und $\alpha = 360 - 45^0$. Diese grössten und kleinsten Werthe des Winkels φ sind demnach:

$$-\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)}\, 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \text{Const.}$$

$$+\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)}\, 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \text{Const.}$$

Der totale Schwingungswinkel ist demnach (in Theilen des Halbmessers ausgerückt):

$$\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)}\, 4\sqrt{\frac{1}{2}} = 2{\cdot}828\, \frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

In dem Moment, wenn durch die Einwirkung des Dampfes die Bewegung der Lokomotive beginnt, haben die Kurbeln eine gewisse Stellung, hat also α einen gewissen Werth, den wir mit α_0 bezeichnen wollen. Für den Beginn der Bewegung ist demnach wegen (16)

$$0 = \frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)}(\cos.\alpha_0 - \sin.\alpha_0) + \text{Const.}$$

Zieht man diesen Ausdruk von (16) ab, so erhält man:

$$\varphi = \frac{q\varrho + Sr}{G(k^2 - b_2)}\, e \left\{[\cos.\alpha - \cos.\alpha_0] - [\sin.\alpha - \sin.\alpha_0]\right\}$$

oder:

$$\varphi = -\frac{q\varrho + Sr}{G(k^2 - b^2)}\, e\; 2\sin.\frac{\alpha - \alpha_0}{2}\left[\sin.\frac{\alpha + \alpha_0}{2} + \cos.\frac{(\alpha + \alpha_0}{2}\right]$$

Hieraus sieht man zunächst, dass die Lokomotive jedesmal in ihre initiale Stellung (für welche $\varphi = 0$ ist) zurückkehrt, wenn die Kurbeln in ihre initiale Stellung (für welche $\alpha = \alpha_0$ ist) zurückehren.

Da, wie wir gesehen haben, die extremsten Werthe von φ um gleich viel von dem Werth der Integrationsconstanten abweichen, so bedeutet dieselbe den mittleren Werth des Winkels φ. Es ist aber:

$$\text{Const.} = -\frac{(q\varrho + Sr)e}{G(k^2 - b^2)}(\cos.\alpha_0 - \sin.\alpha_0)$$

Diese mittlere Schwingungsposition der Lokomotive richtet sich demnach nach dem Winkel α_0, d. h. nach der anfänglichen Stellung der Kurbeln.

Setzt man in die Gleichung (16) $\alpha = 45^\circ$, oder $\alpha = 180 + 45^\circ$, so wird für den einen, wie für den andern dieser Werthe φ gleich Constant. Die von der anfänglichen Stellung der Kurbeln abhängige mittlere Position der Lokomotive tritt also jedesmal ein, wenn während der Bewegung $\alpha = 45^\circ$, oder $\alpha = 180 + 45^\circ$ geworden ist. Wäre anfänglich $\alpha_0 = 45^\circ$ oder $\alpha_0 = 180 + 45^\circ$, so würde $\text{const.} = 0$. In diesem Falle wird also die mittlere Schwingungsposition der Lokomotive mit ihrer initialen Position zusammentreffen.

Bezeichnen wir den mittleren Werth von φ mit φ_m, setzen also $\varphi_m = \text{const.}$, so wird:

$$\varphi = \frac{q\varrho + S r}{G(k^2 - b^2)} e (\cos.\alpha - \sin.\alpha) + \varphi_m .$$

oder:

$$\varphi - \varphi_m = \frac{q\varrho + S r}{G(k^2 - b^2)} e (\cos.\alpha - \sin.\alpha)$$

Der Ausdruck rechter Hand des Gleichheitszeichens bestimmt also die Schwingung der Lokomotive gegen ihre mittlere Position.

Wenn wir nun die Bewegung der Lokomotive von einem Augenblick an, in welchem $\alpha = 45^\circ$ ist, durch eine ganze Umdrehung verfolgen, so ist der Vorgang folgender:

In dem Augenblick, von welchem an wir die Bewegung der Lokomotive verfolgen, befindet sich dieselbe in ihrer mittleren Position, d. h. in derjenigen Position, in welche sie jedesmal zurückkehrt, wenn $\alpha = 45$, oder $180 + 45^\circ$ wird. Während α über 45° hinaus bis zu $180 - 45^\circ$ wächst, nimmt der Winkel φ fortwährend ab, schwingt also die Lokomotive für einen auf derselben stehenden und vorwärts schauenden Beobachter nach rechts hin, und wenn $\varphi = 180 - 45^\circ$ geworden ist, ist sie nach rechts hin am weitesten von ihrer mittleren Position abgewichen. Von $\alpha = 180 - 45$ bis $\alpha = 360 - 45^\circ$ schwingt die Lokomotive nach links und gelangt dabei, wenn $\alpha = 180 + 45^\circ$ ist, in ihre mittlere Schwingungsposition. Von $\alpha = 360 - 45$ bis $\alpha = 360 + 45^\circ$ schwingt sie wiederum nach links zurück und erreicht zuletzt ihre mittlere Position. Der Betrag des ganzen Schwingungswinkels ist:

$$\frac{(q\varrho + S r) e}{G(k^2 - b^2)} 2\sqrt{2}$$

ist also gross: 1) wenn die Gewichte der Kurbeln und die hin- und hergehende Masse gross sind; 2) wenn die Abstände ϱ, r und e, d. h. wenn der Kurbelhalbmesser und der Abstand der Maschine gross ist; 3) wenn das Trägheitsmoment des Kesselbaues etc. klein ist.

Dieser Schwingungswinkel ist aber unabhängig: 1) von der Kraft, mit welcher der Dampf auf den Kolben wirkt; 2) von der Geschwindigkeit der rotirenden Bewegung der Kurbelaxe und von dem Gesetz, nach welchem diese Drehung erfolgt; 3) von der Radstellung, denn $G(k^2 - b^2)$ ist das Trägheitsmoment des Rahmenbaues in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende Vertikalaxe, ist also von der Radstellung unabhängig; 4) von der Spurweite.

Drehende Schwingungen einer aufgehängten nicht balanzirten Lokomotive mit inneren Cylindern und mit äusseren Kupplungsstangen.

Wenn wir uns mit dem Annäherungsgrad begnügen, durch welchen wir bei der Untersuchung über die Schwingungen einer nicht gekuppelten Maschine die Gleichung (16) gefunden haben, so fällt es nicht schwer, die analoge Gleichung für eine Maschine mit gekuppelten Rädern aufzustellen.

Wir behalten die bis jetzt gewählten Bezeichnungen bei und nennen ferner noch r_1 den Halbmesser einer Kurbel der Kupplungsstange, S_1 das Gewicht der Kupplungsstange, q_1 das Gewicht einer Kupplungskurbel, d. h. desjenigen Körpers, der über die runde Nabe des Rades hinausragt, ϱ_1 die Entfernung des Schwerpunktes einer Kupplungskurbel von der geometrischen Drehungsaxe der Kurbelwelle, e_1 die Entfernung der zu beiden Seiten der Lokomotive befindlichen Kupplungsstange von der Axe $A\,x_1$. Wir nehmen an, dass die Richtungen der äussern Kurbeln den Richtungen der innern Kurbeln diametral entgegengesetzt angebracht sind.

Es ist klar, dass wir in dem vorhergehenden Fall statt der Gleichung (16) folgende erhalten werden:

$$\varphi = \frac{(q\,\varrho + S\,r)\,e}{G\,(k^2 - b^2)}\,(\cos.\,\alpha - \sin.\,\alpha) + \frac{(q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1}{G\,(k^2 - b^2)}\left[\cos.\,(\alpha + \pi) - \sin.\,(\alpha + \pi)\right] + \text{Const.}$$

oder:

$$\varphi = \frac{(q\,\varrho + S\,r)\,e - (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1}{G\,(k^2 - b^2)}\,(\cos.\,\alpha - \sin.\,\alpha) + \text{Const.}$$

Man sieht hieraus, dass die Massen der Kupplungsstangen die drehenden Schwingungen zu schwächen, oder sogar ganz aufzuheben im Stande sind, wenn die Kupplungskurbeln den Maschinenkurbeln diametral entgegengesetzt gestellt werden. Diese Drehung verschwindet vollkommen, wenn:

$$(q\,\varrho + S\,r)\,e = (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1$$

Drehende Bewegung einer frei hängenden nicht balanzirten Maschine mit aussen liegenden Cylindern und Kupplungsstangen.

Eine solche Lokomotive hat keine innern Kurbeln, und die Maschinenkurbeln fallen mit den Kupplungskurbeln zusammen, man erhält demnach:

$$\varphi = \frac{S\,r\,e + (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1}{G\,(k^2 - b^2)}\,(\cos.\,\alpha - \sin.\,\alpha) + \text{Const.}$$

Hier sind also die Schwingungen wie bei einer ungekuppelten Maschine mit inneren Cylindern.

Gleichung der Kurve, welche der Mittelpunkt A der Kurbelaxe beschreibt, wenn Längenschwingungen und drehende Schwingungen gleichzeitig stattfinden.

Die Gleichungen für φ und ξ, welche die Drehung und die Längenschwingung bestimmen, haben für Lokomotive jeder Art die Form:

$$\xi = m + n\,(\sin.\,\alpha + \cos.\,\alpha)$$

$$\varphi = m_1 + n_1\,(\sin.\,\alpha - \cos.\,\alpha)$$

wobei $m\ m_1\ n\ n_1$ constante, von den Dimensionen und Gewichten abhängige Grössen sind.

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\xi - m}{n} = \sin.\,\alpha + \cos.\,\alpha$$

$$\frac{\varphi - m_1}{n_1} = \sin.\,\alpha - \cos.\,\alpha$$

Durch Addition und Subtraktion dieser Gleichungen folgt:

$$\sin.\,\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{\xi - m}{n} + \frac{\varphi - m_1}{n_1}\right]$$

$$\cos.\,\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{\xi - m}{n} - \frac{\varphi - m_1}{n_1}\right]$$

Nimmt man die Summe der Quadraten dieser Gleichungen, so erhält man:

$$1 = \frac{1}{4}\left[\frac{\xi - m}{n} + \frac{\varphi - m_1}{n_1}\right]^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{\xi - m}{n} - \frac{\varphi - m_1}{n_1}\right]^2$$

oder:

$$2 = \left(\frac{\xi - m}{n}\right)^2 + \left(\frac{\varphi - m_1}{n_1}\right)^2$$

Drehende Schwingungen einer aufgehängten mit Centrifugalmassen versehenen Lokomotive der allgemeinsten Art.

Wir haben bereits Seite 117 die Einrichtung einer solchen Lokomotive von allgemeiner Construktion angegeben, und ihre Längenschwingungen untersucht. Nun wollen wir auch ihre drehenden Schwingungen bestimmen. Wir lassen alle Bezeichnungen bestehen, die in jenem Artikel angenommen wurden.

Auch für eine solche Lokomotive von allgemeiner Einrichung besteht die Seite 121 aufgefundene Gleichung der Drehung (7) nämlich:

$$0 = \left[\Sigma\,(x_1^2 + y_1^2) - \xi^2\,G\right]\frac{d\varphi}{dt} - \Sigma\,m\,y_1\,\frac{dx_1}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

wobei die Summe auf alle Gewichtstheile der Lokomotive auszudehnen sind:

$\Sigma\,m\,(x_1^2 + y_1^2)$ ist das totale Trägheitsmoment der ganzen Lokomotive in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt A der Kurbelaxe gehende Vertikalaxe. Dieses Trägheitsmoment ist wegen jener Bestandtheile, die während der Bewegung der Treibaxe ihre Lage gegen den Rahmenbau verändern, eine periodisch veränderliche Grösse. Allein alle diese gegen den Rahmenbau beweglichen Theile haben im Vergleich zu den übrigen Theilen, die ihre relative Lage gegen einander und gegen die durch A gehende Vertikalaxe nicht ändern, nur einen sehr kleinen Werth. Wir werden daher keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir in der Berechnung des Trägheitsmoments $\Sigma m\,(x_1^2 + y_1^2)$ die Trägheitsmomente dieser beweglichen Theile ganz vernachlässigen. Nennen wir daher $G\,k^2$ das Trägheitsmoment aller gegen einander nicht beweglichen Theile der Lokomotive in Bezug auf eine durch A gehende Vertikalaxe, so ist annähernd

$$\Sigma\,m\,(x_1^2 + y_1^2) = G\,k^2$$

Den genauen Werth von ξ, welcher der Längenschwingung entspricht, haben wir früher Seite (118) gefunden. Da jedoch die Massen q S q_1 S_1 Q gegen G ungemein klein sind, so ist ξ nur um äusserst wenig von b verschieden, wir dürfen uns daher erlauben, $\xi^2 G = b^2 G$ zu setzen. Dann haben wir:

$$\Sigma\, m\,(x_1^2 + y_1^2) - \xi^2\, G = G\,(k^2 - b^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Nun handelt es sich noch um die Berechnung der letzten Summe des Ausdrucks (18). Die Glieder, welche die Massen $2q$ $2S$ $2q_1$ $2S_1$ $2Q$ in diese Summe liefern, sind nun folgende:

1) für die Massen $2p$ $\ldots\ldots$ $q\,e\,\varrho\,(\sin.\alpha + \cos.\alpha)\,\frac{d\alpha}{dt}$

2) „ „ „ $2q_1$ $\ldots\ldots$ $q_1\,e_1\,\varrho_1\left[\sin.(\alpha+\beta) + \cos.(\alpha+\beta)\right]\frac{d\alpha}{dt}$

3) „ „ „ $2S$ $\ldots\ldots$ $S\,e\,r\,(\sin.\alpha + \cos.\alpha)\,\frac{d\alpha}{dt}$

4) „ „ „ $2S_1$ $\ldots\ldots$ $S_1\,e_1\,r_1\left[\sin.(\alpha+\beta) + \cos.(\alpha+\beta)\right]\frac{d\alpha}{dt}$

5) „ „ „ $2Q$ $\ldots\ldots$ $-\,e_2\,\varrho_2\,Q\left[\sin.(\alpha-\gamma) + \cos.(\alpha+\gamma)\right]\frac{d\alpha}{dt}$

Die Gleichung der drehenden Bewegung wird demnach:

$$G\,(k^2 - b^2)\,\frac{d\varphi}{dt} = (q\,e\,\varrho + S\,e\,r)\,(\sin.\alpha + \cos.\alpha)\,\frac{d\alpha}{dt} + (q_1\,e_1\,\varrho_1 + S_1\,e_1\,r_1)\left[\sin.(\alpha+\beta) + \cos.(\alpha+\beta)\right]\frac{d\alpha}{dt}$$
$$- e_2\,\varrho_2\,Q\left[\sin.(\alpha-\gamma) + \cos.(\alpha+\gamma)\right]\frac{d\alpha}{dt}$$

Es ist aber

$$\sin.(\alpha+\beta) + \cos.(\alpha+\beta) = \cos.\beta\,(\sin.\alpha + \cos.\alpha) - \sin.\beta\,(\sin.\alpha - \cos.\alpha)$$
$$\sin.(\alpha-\gamma) + \cos.(\alpha+\gamma) = (\sin.\alpha + \cos.\alpha)\,(\cos.\gamma - \sin.\gamma)$$

daher wird obige Gleichung:

$$G\,(k^2 - b^2)\,\frac{d\varphi}{dt} = \left[(q\,\varrho + S\,r)\,e + (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1\cos.\beta - e_2\,\varrho_2\,Q\,(\cos.\gamma - \sin.\gamma)\right](\sin.\alpha + \cos.\alpha)\,\frac{d\alpha}{dt}$$
$$- (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1\sin.\beta\,(\sin.\alpha - \cos.\alpha)\,\frac{d\alpha}{dt}$$

Lässt man in dieser Gleichung dt weg und integrirt dieselbe in Bezug auf α, so findet man:

$$G\,(k - b^2)\,\varphi = \left[(q\,\varrho + S\,r)\,e + (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1\cos.\beta - e_2\,\varrho_2\,Q\,(\cos.\gamma - \sin.\gamma)\right](\sin.\alpha - \cos.\alpha)$$
$$+ (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1\sin.\beta\,(\sin.\alpha + \cos.\alpha) + \text{Const.}$$

Wenn keine drehende Schwingung stattfinden soll, muss φ für jeden Werth von α gleich Null sein.

Diess erfordert aber die Erfüllung folgender Bedingungen:

$$\text{Const.} = 0$$

$$\beta = 0 \text{ oder } = \pi$$

$$(q\,\varrho + S\,r)\,e + (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1 \cos.\beta - e_2\,\varrho_2\,Q\,(\cos.\gamma - \sin.\gamma) = 0$$

Wenn aber $\beta = 0$ oder $= \pi$ ist, kann die letzte Gleichung auch geschrieben werden wie folgt:

$$(q\,\varrho + S\,r)\,e \pm (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1 - e_2\,\varrho_2\,Q\,(\cos.\gamma - \sin.\gamma) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

wobei das obere Zeichen gilt, wenn die äussern und innern Kurbel parallel gestellt sind, das untere Zeichen hingegen, wenn die Kurbeln diametral gegenüber stehen.

Vollständige Aufhebung des Zuckens und Schlingerns durch rotirende Balanzirungs-Massen.

Wir haben Seite (119) gefunden, dass die Längenschwingungen einer Lokomotive verschwinden, wenn

$$(q\,\varrho + S\,r) \pm (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1) = \varrho_2\,Q\,(\cos.\gamma + \sin.\gamma) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ist; haben ferner oben Gleichung (20) gefunden, dass die drehenden Schwingungen nicht eintreten, wenn

$$(q\,\varrho + S\,r\,e) \pm (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\,e_1 = e_2\,\varrho_2\,Q\,(\cos.\gamma - \sin.\gamma) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ist. Bestehen diese Bedingungen gleichzeitig, so wird demnach weder die eine, noch die andere dieser Schwingungen eintreten. Diese Gleichungen können aber gleichzeitig bestehen, weil sie zwei unbestimmte Grössen Q und γ enthalten. Diese lassen sich also so bestimmen, dass keine von den beiden störenden Bewegungen eintritt.

Dividirt man die Gleichung (2) durch e_2, quadrirt sie hierauf, so wie auch die Gleichung (1) und nimmt die Summe dieser Quadrate, so erhält man eine Gleichung, aus welcher folgt:

$$Q = \frac{q\,\varrho + S\,r}{\varrho_2} \sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e}{e_2}\right)^2\right] \pm \left[1 + \frac{e\,e_1}{e_2^2}\right] \frac{q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1}{q\,\varrho + S\,r} + \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2\right]\left[\frac{q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1}{q\,\varrho + S\,r}\right]^2\right\}} \quad (3)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt ferner:

$$\sin.\gamma = \frac{1}{2\,\varrho_2\,Q}\left[(q\,\varrho + S\,r)\left(1 - \frac{e}{e_2}\right) \pm (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\left(1 - \frac{e_1}{e_2}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$\cos.\gamma = \frac{1}{2\,\varrho_2\,Q}\left[(q\,\varrho + S\,r)\left(1 + \frac{e}{e_2}\right) \pm (q_1\,\varrho_1 + S_1\,r_1)\left(1 + \frac{e_1}{e_2}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

In diesen Formeln gelten die oberen Zeichen, wenn die Kupplungskurbeln den Treibkurbeln parallel gestellt sind, die unteren Zeichen dagegen, wenn die Kupplungskurbeln den Treibkurbeln diametral gegenüberstehen. Die Gleichung (3) bestimmt die Grösse eines Balanzirungsgewichtes, die Gleichungen (4) und (5) die Position der Gewichte, wenn man nicht nur die numerischen Werthe, sondern auch die Zeichen von $\sin.\gamma$ und $\cos.\gamma$ berücksichtigt. Um jeden Zweifel über die richtige Anbringung der Balanzirungsmassen zu beseitigen, dienen die Figuren 49, 50, Tab. XII. Der in denselben verzeichnete spitze Winkel γ_1 ist derjenige Winkel, dessen Sinus und Cosinus gleich ist dem *numerischen* Werthen von $\sin.\gamma$ und von $\cos.\gamma$. Der schraffirte Kreis stellt das Balanzirungsgewicht am vorderen, der nicht schraffirte Kreis das Balanzirungsgewicht des hinteren Rades vor.

Die Balanzirungsgewichte sind anzubringen, wie folgendes Schema andeutet:

$\sin.\gamma$	$\cos.\gamma$	Figur.
$+1$	$+1$	49 a
$+1$	-1	49 b
-1	-1	50 a
-1	$+1$	50 b

Man erhält die Tangente des Winkels γ_1, wenn man die Werthe von $\sin.\gamma$ und $\cos.\gamma$ der Gleichungen (3) und (4) durch einander dividirt und nur allein den numerischen Werth des Quotienten nimmt; es ist also $\tan g.\gamma_1$ gleich dem numerischen Werthe des Quotienten.

$$\frac{\left(1-\frac{e}{e_2}\right) \pm \frac{q_1 r_1 + S_1 r_1}{q r + S r}\left(1-\frac{e_1}{e_2}\right)}{\left(1+\frac{e}{e_2}\right) \pm \frac{q_1 r_1 + S_1 r_1}{q r + S r}\left(1+\frac{e_1}{e_2}\right)} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Für eine Lokomotive, deren Räder nicht gekuppelt sind, die also überhaupt mit nur 2 Triebrädern versehen ist, ist $S_1 = 0$ $q_1 = 0$ und dann wird:

$$Q = \frac{q\rho + S r}{\rho_2} \sqrt{\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{e}{e_2}\right)^2\right]} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\sin.\gamma = \frac{q\rho + S r}{2\rho_2 Q}\left(1-\frac{e}{e_2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

$$\cos.\gamma = \frac{q\rho + S r}{2\rho_2 Q}\left(1+\frac{e}{e_2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Für innen liegende Cylinder ist $e < e_2$. Fällt also sowohl $\sin.\gamma$ als $\cos.\gamma$ positiv aus, so sind demnach die Gewichte so anzubringen, wie Fig. 49 a zeigt. Für aussen liegende Cylinder ist $e > e_2$. Fällt also $\sin.\gamma$ negativ, $\cos.\gamma$ positiv aus, so sind also die Gewichte anzubringen, wie Fig. 50 b zeigt.

Für Lokomotive mit aussen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern fallen die Kupplungskurbeln mit den Triebrädern der Richtung nach zusammen, müssen also in den Gleichungen (3) (4) (5) die oberen Zeichen genommen werden, und da in diesem

Fall $e > e_1 > e_2$ ist, so wird $\sin.\gamma$ negativ; $\cos.\gamma$ dagegen positiv, sind demnach die Gewichte so anzubringen, wie Fig. 50 b zeigt.

Stellen wir die verschiedenen Lokomotive nach der Grösse der Balanzirungsgewichte, welche sie erfordern, zusammen, so erhalten wir folgende Reihe, welche mit derjenigen Construction beginnt, die das kleinste Gewicht verlangt.

	Cylinderlage.	Räder.	Kupplungskurbeln.
A.	innen	nicht gekuppelt	keine
B.	aussen	nicht gekuppelt	keine
C.	innen	gekuppelt	diametral
D.	innen	gekuppelt	parallel
E.	aussen	gekuppelt	zusammenfallend

Wenn bei einer Lokomotive mit innen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern die äusseren Kupplungskurbeln den inneren Triebkurbeln diametral gegenüber gestellt sind, muss man in den Ausdrücken für Q, $\sin.\gamma$, $\cos\gamma$, die unteren Zeichen nehmen; und in diesem Falle hat es das Ansehen, dass der Werth von Q unter gewissen Umständen verschwinden könnte, dass also gar keine Balanzirungsgewichte nothwendig, würden. Wir wollen diese Vermuthung prüfen.

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{q_1 \varrho_1 + S_1 r_1}{q \varrho + S r} = k$, so verschwindet Q, wenn ist:

$$\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e}{e_2}\right)^2\right] - \left[1 + \frac{e e_1}{e_2^2}\right] k + \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2\right] k^2 = 0$$

hieraus folgt:

$$k = \frac{q_1 \varrho_1 + S_1 r_1}{q r + S r} = \frac{1 + \frac{e e_1}{e_2^2} \pm \left(\frac{e_1}{e_2} - \frac{e}{e_2}\right)\sqrt{-1}}{1 + \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2}$$

Die Werthe von k, welche den Ausdruck von Q zum Verschwinden bringen, sind demnach, wie man sieht, imaginär, so lange e von e_1 verschieden ist. Allein die Gleichung, aus welcher wir k gesucht haben, gilt nur für Maschinen mit innen liegenden Cylindern, weil es nur bei diesen möglich ist, dass die Kupplungskurbeln den Triebkurbeln diametral gegenüber stehen; es kann also e nicht gleich e_1 genommen werden und folglich ist es nicht möglich, die schwingenden Bewegungen ohne Balanzirungsgewichte aufzuheben.

Direktes Verfahren zur Bestimmung der Balanzirungs-Massen.

Die das Zucken und Schlingern aufhebenden Balanzirungsmassen können auch durch folgendes Verfahren direkt bestimmt werden.

Die Wirkungen, welche die hin- und hergehenden Massen der Kolben, Kolbenstangen, Schubstangen und Kupplungsstangen in horizontalem Sinne hervorbringen, sind beinahe so, wie wenn diese Massen mit den Kurbelzapfen direkt verbunden wären und mit denselben herum rotirten, denn die Horizontalbewegungen dieser Massen stimmen mit den

Horizontalbewegungen der Kurbelzapfen beinahe überein. Wir wollen uns also vorstellen, dass die hin- und hergehenden Massen in den Kurbelzapfen, mit welchen sie in Verbindung stehen, concentrirt würden, so dass sie mit den Kurbelzapfen um die Treibaxe herum rotiren müssten, und nun kommt es darauf an, die Treibräder mit solchen Massen zu versehen, dass ihre Centrifugalkräfte den Centrifugalkräften der mit den Kurbeln verbundenen Massen das Gleichgewicht halten.

Wir legen der Rechnung eine Maschine mit innen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern zu Grunde und nehmen an, dass die Kupplungskurbeln mit den Maschinenkurpeln parallel gestellt seien (Fig. 46) und lassen die früher gewählten Bezeichnungen gelten, bezeichnen aber noch durch ω die Winkelgeschwindigkeit der Triebräder.

Nun ist: $\frac{S}{g}\omega^2 r$ die Centrifugalkraft eines Kolbens, einer Kolbenstange und einer Schubstange; $\frac{q}{g}\omega^2\varrho$ die Centrifugalkraft eines inneren Kurbelkörpers; $\frac{S_1}{g}\omega^2 r_1$ die Centrifugalkraft einer Kupplungsstange; $\frac{q_1}{g}\omega^2\varrho_1$ die Centrifugalkraft eines äusseren Kurbelkörpers. Es ist klar, dass die Wirkung dieser vier Centrifugalkräfte durch zwei Massen B und b aufgehoben werden kann, wenn man dieselben in einer Entfernung ϱ_2 den Kurbeln gegenüber mit den Triebrädern verbindet. Die Centrifugalkräfte der Massen B und b sind: $\frac{B}{g}\omega^2\varrho_2$, $\frac{b}{g}\omega^2\varrho_2$. Nach dem Gesetz des Hebels halten sich diese sechs Kräfte das Gleichgewicht, wenn folgenden Bedingungen entsprochen wird:

$$\frac{B}{g}\omega^2\varrho_2 \times 2\,c_2 = \left(\frac{S}{g}\omega^2 r + \frac{q}{g}\omega^2\varrho\right)(e_2 + e) + \left(\frac{S_1}{g}\omega^2 r_1 + \frac{q_1}{g}\omega^2\varrho_1\right)(e_2 + e_1)$$

$$\frac{b}{g}\omega^2\varrho_2 \times 2\,e_2 = \left(\frac{S}{g}\omega^2 r + \frac{q}{g}\omega^2\varrho\right)(e_2 - e) - \left(\frac{S_1}{g}\omega^2 r_1 + \frac{q_1}{g}\omega^2\varrho_1\right)(e_1 - e_2)$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{S\,r + q\,\varrho}{\varrho_2}\;\frac{e_2 + e}{2\,e_2} + \frac{S_1 r_1 + q_1 \varrho_1}{\varrho_2}\;\frac{e_1 + e_2}{2\,e_2} \\ b &= \frac{S\,r + q\,\varrho}{\varrho_2}\;\frac{e_2 - e}{2\,e_2} - \frac{S_1 r_1 + q_1 \varrho_1}{\varrho_2}\;\frac{e_1 - e_2}{2\,e_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Diese zwei Massen heben aber nur allein die Massenwirkung einer Maschine und einer Kupplungsstange auf. Um aber auch die Massenwirkungen der zweiten (hintern) Maschine und der zweiten Kupplungsstange aufzuheben, müssen die Räder noch mit zwei Massen B und b versehen werden, und diese zwei Massen müssen, die erstere am Hinterrad, die letztere am Vorderrad, den Richtungen der hintern Kurbeln gegenüber angebracht werden. Die Wirkung aller mit den 4 Kurbeln rotirenden Massen kann also aufgehoben werden, wenn man jedes der beiden Triebräder mit zwei Massen B und b versieht. Am Vorderrad (Fig. 47 a) muss die Masse B der vordern Kurbel gegenüber angebracht werden. Am Hinterrad (Fig. 48 a) dagegen muss die Masse B der hintern Kurbel gegenüber, die Masse b der vordern Kurbel gegenüber angebracht werden. Allein den Centrifugalkräften der beiden mit einem Rad zu verbindenden Massen B und b entspricht eine resultirende Kraft, die auch durch eine einzige Masse Q hervorgebracht werden kann. Vorausgesetzt, dass Q ebenfalls in der Entfernung ϱ_2 angebracht wird, hat man nach der Zerlegung der Kräfte (Fig. 47 b):

$$B = Q\cos.\gamma \qquad b = Q\sin.\gamma$$

demnach:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang.}\,\gamma = \dfrac{b}{B} \\[2ex] Q = \sqrt{b^2 + B^2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Substituirt man für b und B die Werthe, welche die Gleichungen (1) darbieten, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$\text{tang.}\,\gamma = \frac{\left(1 - \dfrac{e}{e_2}\right) + \dfrac{S_1 r_1 + q_1 \rho_1}{S r + q \rho}\left(1 - \dfrac{e_1}{e_2}\right)}{\left(1 + \dfrac{e}{e_2}\right) + \dfrac{S_1 r_1 + q_1 \rho_1}{S r + q \rho}\left(1 + \dfrac{e_1}{e_2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$Q = \frac{S r + q \rho}{\rho_2} \sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e}{e_2}\right)^2\right] + \left[1 + \frac{e e_1}{e_2^2}\right]\frac{S_1 r_1 + q_1 \rho_1}{S r + q \rho} + \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2\right]\left[\frac{S_1 r_1 + q_1 \rho_1}{S r + q \rho}\right]^2\right\}}$$

und dieser Ausdruch stimmt mit den früher Seite 130 gefundenen überein, denn wir haben bei dieser Rechnung paralelle Kurbeln vorausgesetzt, für welche in den früheren Gleichungen die oberen Zeichen gelten.

Pressungen der Triebräder gegen die Bahn, wenn dieselben mit balanzirenden, rotirenden Massen versehen sind.

Die rotirenden Balanzirungsmassen bringen durch ihre Centrifugalkraft einen veränderlichen Druck der Triebräder gegen die Schienen hervor, wodurch unter gewissen Umständen bedenkliche Nachtheile entstehen können.

Nennen wir $\mathfrak{C}$ den Betrag der Centrifugalkraft einer rotirenden Masse, ψ den Winkel, den in irgend einem Augenblick der Bewegung der durch den Schwerpunkt der rotirenden Masse gehende Radius mit einer durch den Mittelpunkt des Rades vertikal abwärts gezogenen Linie bildet, so ist $\mathfrak{C}\cos.\psi$ die Kraft, mit welcher das Rad durch die Wirkung der Centrifugalkraft der rotirenden Masse nach vertikaler Richtung abwärts getrieben wird. Nennen wir ferner $\mathfrak{G}$ das Gewicht der Triebaxe, der Triebräder und der mit denselben verbundenen rotirenden Massen, $\mathfrak{p}$ den Druck, welcher in dem Zeitaugenblick, dem der Winkel ψ entspricht, gegen die Axenbüchse der Räder ausgeübt wird. Endlich $\mathfrak{P}$ den Druck des Triebrades gegen die Bahn, so ist

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2}\mathfrak{G} + \mathfrak{p} + \mathfrak{C}\cos.\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Wenn die störenden Bewegungen des Wankens, Wogens und Nickens nur in einem schwachen Maase stattfinden, dürfen wir die Pressung $\mathfrak{p}$ als eine constante ansehen, und dann ist der Druck $\mathfrak{P}$ nur allein mit ψ veränderlich.

Der grösste und kleinste Werth dieses Druckes ist $\frac{1}{2}\mathfrak{G} + \mathfrak{p} + \mathfrak{C}$ und $\frac{1}{2}\mathfrak{G} + \mathfrak{p} - \mathfrak{C}$. Der erstere tritt ein, so oft der Schwerpunkt der rotirenden Masse seinen tiefsten, der letztere, so oft der Schwerpunkt der rotirenden Masse seinen höchsten Stand erreicht. Sollte $\frac{1}{2}\mathfrak{G} + \mathfrak{p} - \mathfrak{C} = 0$, oder $\mathfrak{C} = \frac{1}{2}\mathfrak{G} + \mathfrak{p}$ werden, so würde der Druck des Rades gegen die Bahn ganz aufhören. Sollte gar $\mathfrak{C} > \frac{1}{2}\mathfrak{G} + \mathfrak{p}$ werden, so würden die Räder jedesmal in die Höhe springen, wenn die Schwerpunkte der rotirenden Massen ihre höchsten Orte

erreichen und die beiden Räder würden dann auf der Bahn gleichsam hämmernd fortlaufen.

Nennen wir D den Durchmesser eines Triebrades, $g = 9{\cdot}808$ die Beschleunigung durch die Schwere, V die Fahrgeschwindigkeit der Lokomotive und behalten im Uebrigen die früher gewählten Bezeichnungen bei, so ist:

$$\mathfrak{G} = \frac{Q}{g} V^2 \left(\frac{2\varrho_2}{D}\right)^2 \frac{1}{\varrho_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

In der höchsten Stellung einer rotirenden Masse hört also der Druck des Rades gegen die Bahn ganz auf, wenn:

$$\frac{Q}{g} V^2 \left(\frac{2\varrho_2}{D}\right)^2 \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{2} \mathfrak{G} + \mathfrak{p}$$

ist, oder wenn:

$$V = \sqrt{\left\{ \frac{g \frac{1}{2} \mathfrak{G} + \mathfrak{p}}{Q} \left(\frac{D}{2\varrho_2}\right)^2 \varrho_2 \right\}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Für eine stärkere Personenzuglokomotive dürfen wir annehmen:

$$Q = 50 \qquad \frac{1}{2} \mathfrak{G} + \mathfrak{p} = 4000 \qquad \frac{D}{2\varrho_2} = \frac{4}{3} \qquad \varrho_2 = 1 \qquad g = 9{\cdot}808$$

und mit diesen Daten findet man $V = 37$ Meter. Die grösste Geschwindigkeit der Schnellzüge beträgt aber nur circa 16 Meter, ist also nicht halb so gross als diejenige, bei welcher ein Aufspringen der Räder eintreten könnte.

Wir wollen noch die grössten und kleinsten Pressungen der Räder berechnen, wenn eine Geschwindigkeit von 16 Meter eintritt.

Nehmen wir wiederum:

$$Q = 50 \qquad \frac{D}{2\varrho_2} = \frac{4}{3} \qquad \varrho_2 = 1 \qquad g = 9{\cdot}808 \qquad \frac{1}{2} \mathfrak{G} + \mathfrak{p} = 4000$$

und $V = 16$, so wird:

$$\frac{1}{2} \mathfrak{G} + \mathfrak{p} \pm \frac{Q}{g} V^2 \left(\frac{2\varrho_2}{D}\right)^2 \frac{1}{\varrho} = 4000 \pm 734$$

Das Minimum der Pressung eines Rades gegen die Bahn ist demnach in diesem Falle $4000\,(1 - 0{\cdot}183)$, das Maximum dagegen $4000\,(1 + 0{\cdot}183)$.

Diese grössten und kleinsten Pressungen weichen also nur circa 18% von dem mittleren Werth ab.

Diese Veränderlichkeit des Druckes der Räder gegen die Bahn ist also bei dieser grössten gegenwärtig vorkommenden Geschwindigkeit der Schnellzüge noch nicht bedenklich, denn eine Verminderung des Druckes um 18% kann ein Aufspringen der Räder noch nicht veranlassen, und durch eine Verstärkung dieses Druckes um 18% ist auch nicht zu befürchten, dass die Radumfänge ungleichförmig abgenützt werden könnten.

Vollkommen könnte die Wirkung der hin- und hergehenden Massen der Kolben, Kolbenstangen und Schubstangen nur durch hin- und hergehende Gegenmassen aufgehoben werden; allein die Anbringung derselben ist mit constructiven Schwierigkeiten verbunden, und so lange diese nicht beseitigt werden können, muss man sich schon mit den rotirenden Massen begnügen, und muss sich den veränderlichen Druck der Triebräder gegen die Bahn gefallen lassen.

Der praktische Werth der Massenbalanzirung.

Der praktische Werth der Balanzirung der hin- und hergehenden Massen durch rotirende oder durch hin- und hergehende Massen ist bis jetzt noch nicht richtig gewürdigt worden. Die französischen Ingenieure überschätzen die Sache und sie scheinen der Ansicht zu sein, dass durch eine richtige Balanzirung der Massen die wesentlichsten Uebelstände, mit welchen ein Lokomotivbau behaftet sein kann, aufgehoben wären. Die Engländer schlagen den Werth der Balanzirung zu gering an und kümmern sich um diese Angelegenheit in der Regel schon aus dem Grunde nicht, weil sie von einem „Theoretiker“ aufgebracht wurde. Nach meiner Meinung ist eine richtige Balanzirung zu empfehlen, ich bin jedoch weit entfernt, zu glauben, dass damit den wesentlichsten Uebelständen, mit welchen eine Lokomotive behaftet sein kann, abgeholfen würde. Diese Hauptübel liegen nicht im Zucken und Schlingern, sondern sie liegen im Wanken, Wogen und Nicken. Um die beiden ersteren dieser störenden Bewegungen aufzuheben, genügt es, richtig berechnete Balanzirungsgewichte anzuwenden, im Uebrigen ist aber in dieser Hinsicht der Bau der Lokomotive ganz gleichgültig. Um dagegen die drei letzteren störenden Bewegungen möglichst zu schwächen, muss die ganze Disposition der Maschine, des Kessels und der Räder und muss das ganze System der Federung gewissen Bedingungen entsprechen. Die wichtigsten Gesetze des Lokomotivbaues ergeben sich nicht aus dem Studium der zuckenden und schlingernden Bewegung, sondern sie folgen, wie wir in der Folge sehen werden, aus dem Studium der Bewegungen des Wogens, Wankens und Nickens. Dieses Studium ist der Gegenstand der folgenden, etwas weitläufigen Untersuchungen.

Das Gaukeln

oder

das Wanken, Wogen und Nicken.

Die Kräfte, welche das Gaukeln verursachen.

Das Wanken, Wogen und Nicken oder die gaukelnde Bewegung des auf den Federn liegenden Baues wird durch die Kräfte verursacht, welche auf dieses Massensystem einwirken und sich nicht das Gleichgewicht halten. Diese Kräfte sind folgende:

1) das Gewicht des auf den Federn ruhenden Baues;
2) die Elasticitätskräfte der Federn;
3) die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale;
4) der Widerstand des durch die Lokomotive fortzuziehenden Trains;
5) die Pressungen des Dampfes gegen die Deckelflächen der Dampfcylinder;
6) die Pressungen der Triebaxe gegen die Axengabeln.

Wenn eine Lokomotive ruhig auf der Bahn steht, wird das Gewicht des auf den Federn liegenden Baues durch die Elastizitätskräfte der Federn getragen, und jede derselben befindet sich dabei in einem mehr oder weniger deformirten Zustande. So wie aber in dem auf den Federn liegenden Bau eine gaukelnde Bewegung veranlasst wird, werden die Federn bald mehr, bald weniger deformirt, und wirken dann mit veränderlichen Intensitäten auf den Bau ein, so dass in demsellben die einmal hervorgerufene gaukelnde Bewegung fortdauernd erhalten wird.

Die Schubstangen bilden mit den Kolbenstangen Winkel, die mit den Kurbelstellungen veränderlich sind; dies hat zur Folge, dass die Gleitstücke gegen die Führungslineale beim Vorwärtsfahren nach aufwärts, beim Rückwärtsfahren nach abwärts Pressungen ausüben, deren Angriffspunkte und Intensitäten veränderlich sind.

Am hinteren Ende des Rahmenbaues wirkt der Widerstand, den der fortzuschaffende Wagenzug verursacht. Der Angriffspunkt dieses Widerstandes liegt tiefer als der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues, und die Intensität desselben ist, streng genommen, wegen der nicht ganz gleichförmigen Bewegung der Lokomotive etwas veränderlich.

Die mit dem Rahmenbau fest verbundenen Dampfcylinder werden durch den Druck des Dampfes gegen die Deckelflächen der Cylinder bald vorwärts, bald rückwärts getrieben. Laufen beide Kolben vorwärts, so werden die Cylinder durch den Dampfdruck zurück getrieben. Laufen beide Kolben nach rückwärts, so werden die Cylinder nach vorwärts getrieben. Laufen die Kolben nach entgegengesetzter Richtung, so wird einer von den Cylindern nach vorwärts, der andere nach rückwärts getrieben.

Durch den Druck des Dampfes gegen die Kolben wird die Axe der Triebräder mit veränderlicher Kraft bald vorwärts, bald rückwärts getrieben. Die Achsenbüchsen drücken desshalb bald stärker, bald schwächer gegen die Axengabeln.

Durch das veränderliche Spiel dieser Kräfte wird das Wanken, Wogen und Nicken hervorgebracht. Das Wanken entsteht, weil diese Kräfte in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Queraxe nicht im Gleichgewichte sind. Das Wogen

wird veranlasst, weil die Summe der vertikal aufwärts wirkenden Kräfte veränderlich ist, während das vertical abwärts wirkende Gewicht des Baues einen constanten Werth hat. Das Nicken wird hervorgerufen, weil die Kräfte in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Baues gehende Längenaxe nicht im Gleichgewichte sind.

Die Bestimmung dieser störenden Bewegungen ist der Gegenstand der folgenden Untersuchung, die dabei vorkommenden Rechnungen sind zwar weitläufig, stehen aber in keinem Missverhältnisse mit den Resultaten, welche sie uns liefern.

Druck der Gleitstücke gegen die Führungslineale.

Es sei, Tab. XII, Fig. 44,

- r der Halbmesser einer Maschinenkurbel;
- L die Länge einer Schubstange;
- α der Winkel, den in irgend einem Augenblick der Bewegung eine Kurbel mit der Bewegungsrichtung des Kolbens bildet;
- λ der Winkel, den gleichzeitig die Schubstange mit der Kolbenstange oder mit der Bewegungsrichtung des Kolbens bildet;
- P die Kraft, mit welcher der Kolben treibend einwirkt;
- S der in der Schubstange wirkende Widerstand;
- N die Kraft, mit welcher das Gleitstück nach aufwärts getrieben wird, wenn die Bewegung nach vorwärts erfolgt.

Dies vorausgesetzt, ist zunächst

$$r \sin. \alpha = L \sin. \lambda$$

demnach

$$\sin. \lambda = \left(\frac{r}{L}\right) \sin. \alpha \qquad \tang \lambda = \frac{\left(\frac{r}{L}\right) \sin. \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin.^2 \alpha}}$$

Es ist aber ferner $S \cos. \lambda = P$, $S \sin. \lambda = N$, demnach

$$N = P \tang. \lambda = P \frac{\left(\frac{r}{L}\right) \sin. \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin.^2 \alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Das Verhältniss $\left(\frac{r}{L}\right)$ ist bei Lokomotiven immer höchstens $\frac{1}{6}$, der Werth von $\left(\frac{r}{L}\right)^2 \sin.^2 \alpha$ beträgt also im Maximum $\frac{1}{36}$, kann also gegen die Einheit vernachlässigt werden, dann wird aber

$$N = P \frac{r}{L} \sin. \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Bezeichnen wir für die zweite Maschine die Kraft, mit welcher ihr Kolben treibend

wirkt, mit P und den Druck des Gleitstückes gegen das Führungslineal mit N_1, so ist, da die Kurbeln der beiden Maschinen einen rechten Winkel bilden,

$$N_1 = P_1 \frac{r}{L} \sin.\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = P_1 \frac{r}{L} \cos.\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Es folgt sowohl aus der Betrachtung der Figur, sowie auch aus den Werthen von N und N_1, dass diese Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale stets nach aufwärts gerichtet bleiben, so lange die Bewegung der Kurbel nach der Richtung des Pfeiles erfolgt, denn das Zeichen von P stimmt stets mit dem Zeichen von $\sin.\alpha$, und das Zeichen von P_1 stimmt stets mit dem Zeichen von $\cos.\alpha$ überein. Erfolgt dagegen die Bewegung der Kurbel nach einer Richtung, die der des Pfeiles in der Figur entgegengesetzt ist, so fallen die Zeichen von P und $\sin.\alpha$, so wie auch von P_1 und $\cos.\alpha$ entgegengesetzt aus, die Werthe von N und N_1 werden also dann beständig negativ oder die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale sind, beim Rückwärtsfahren einer Lokomotive, deren Cylinder vor der Triebaxe liegen, nach abwärts gerichtet.

Dass diese Pressungen spürbare Wirkungen hervorbringen können, sieht man am besten durch ihre numerischen Werthe.

Es sei z. B. für eine Personenzuglokomotive der Durchmesser eines Dampfcylinders $= 0{\cdot}4$ Meter, die Spannung des Dampfes hinter den Kolben auf 1 Quadratmeter bezogen, 50000 Kilogramm, der schädliche Widerstand vor den Kolben 12500 Kilogramm, das Verhältniss $\frac{r}{L} = 6$, so sind die grössten Werthe von N und N_1

$$\frac{\overline{0{\cdot}4}^2 \times 3{\cdot}14}{4} (50000 - 12500) \frac{1}{6} = 785 \text{ Kilogramm.}$$

Allgemeine Gleichungen zur Bestimmung der gaukelnden Bewegung.

Die Bewegungen eines starren Massensystems werden bekanntlich durch 6 Gleichungen bestimmt. Drei derselben bestimmen die Bewegung des Schwerpunktes, drei andere die Drehungen des Systems um drei der Richtung nach auf einander senkrecht stehende, durch den Schwerpunkt gehende Axen.

Um die Bewegung des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues zu bestimmen, nehmen wir ein die fortschreitende Bewegung der Lokomotive begleitendes Axensystem $O\xi$ $O\upsilon$ $O\zeta$ an. Die Axe $O\xi$ legen wir in die Axe des Geleises $O\upsilon$ quer über das Geleise. $O\zeta$ steht mithin vertikal.

Nennen wir ξ υ ζ die Coordinaten des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues in Bezug auf dieses fortschreitende Axensystem, ΣX ΣY ΣZ die algebraische Summe der Kräfte, welche in einem beliebigen Zeitmoment der Bewegung parallel mit $O\xi$ $O\upsilon$ $O\zeta$ auf das Massensystem einwirken, M die totale Masse des auf den Federn liegenden Baues $\left(\text{Masse} = \frac{\text{Gewicht}}{2 \times 9{\cdot}808}\right)$, so sind die Gleichungen der Bewegung des Schwerpunktes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{1}{2}\frac{\Sigma X}{M} \\ \frac{d^2\upsilon}{dt^2} &= \frac{1}{2}\frac{\Sigma Y}{M} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \frac{1}{2}\frac{\Sigma Z}{M} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Um die drehenden Bewegungen des Massensystems zu bestimmen, legen wir durch den Schwerpunkt desselben ein Axensystem $O x_1$ $O y_1$ $O z_1$ und zwar so, dass $O x_1$. mit der Axe des Lokomotivkessels parallel ist, $O y_1$ senkrecht auf $O x_1$ und parallel mit der Ebene des Lokomotivrahmens ist, $O z_1$ auf der Ebene des Lokomotivrahmens senkrecht steht.

Es ist klar, dass diese drei Axen entweder ganz genau, oder doch sehr nahe mit den Hauptaxen der Trägheitsmomente zusammenfallen.

Nennt man nun:

A B C die Trägheitsmomente (als Massen ausgedrückt) des auf den Federn liegenden Baues in Bezug auf die Axen $O x_1$ $O y_1$ $O x_1$;

x_1 y_1 z_1 die Winkelgeschwindigkeiten, mit welchen sich das System in einem bestimmten Zeitaugenblick t um die drei Axen $O x_1$ $O y_1$ $O z_1$ dreht;

X_1 Y_1 Z_1 die Summe der statischen Momente der zur Zeit t wirksamen Kräfte in Bezug auf die Axen $O x_1$ $O y_1$ $O z_1$;

$d x_1$ $d y_1$ $d z_1$ die Aenderungen dieser Winkelgeschwindigkeiten in dem auf t folgenden Zeitelement dt, so sind bekanntlich die Gleichungen der drehenden Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} C\frac{d z_1}{dt} + (B - A) x_1 y_1 &= \frac{1}{2} Z_1 \\ B\frac{d y_1}{dt} + (A - C) x_1 z_1 &= \frac{1}{2} Y_1 \\ A\frac{d x_1}{dt} + (C - B) y_1 z_1 &= \frac{1}{2} X_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Die Kräfte ΣX ΣY ΣZ, so wie auch die Momente X_1 Y_1 Z_1 haben in unserem Falle nicht constante Werthe, sondern sind periodische Funkti onen der Zeit. Die Bestimmung der gaukelnden Bewegung hängt also von der Integration eines sehr complizirten Systems von sechs Gleichungen ab, und es ist vorauszusehen, dass insbesondere die Integration der drei Gleichungen (2) nicht gelingen wird, denn die Werthe von x_1 y_1 z_1 werden selbst in dem günstigsten Falle, wenn X_1 Y_1 Z_1 verschwinden, durch ellyptische Funktionen ausgedrückt.

Glücklicherweise sind aber alle einzelnen Bewegungen, aus welchen das Gaukeln zusammengesetzt ist, sehr klein, denn die Federn sind sehr starr und müssen es sein, damit diese gaukelnde Bewegung nicht zu stark auftreten kann. Wegen dieser Kleinheit der drehenden Schwingungen können in den Gleichungen (2) der Glieder $(B - A) x_1 y_1$ $(A - C) x_1 z_1$ $(C - B) y_1 z_1$ gegen $C\frac{d z_1}{dt}$ $A\frac{d y_1}{dt}$ $A\frac{d x_1}{dt}$ vernachlässigt werden, wodurch die drei Gleichungen (2) eine wesentlich einfachere Form erhalten.

Ferner aber dürfen wir drei von den sechs Gleichungen (1) und (2) ganz weglassen. Die erste der Gleichungen (1) kann weggelassen werden, weil sie sich auf die horizontale Fortbewegung des Schwerpunktes bezieht, die wir schon früher behandelt haben. Die zweite der Gleichungen (1) kann weggelassen werden, weil parallel mit der Richtung der Axe $O y_1$ keine Kräfte wirken. Die erste der Gleichungen (2) kann endlich weggelassen werden, weil die früher genannten, das Wanken, Wogen und Nicken veranlassenden Kräfte keine Drehung um eine Vertikalaxe erregen. Da wir also die erste und zweite der Gleichungen (1) und die erste der Gleichungen (2) weglassen, und in der zweiten und dritten der Gleichungen (2) die Glieder $(A - C) x_1 z_1$ $(C - B) y_1 z_1$ vernachlässigen dürfen, so reduzirt sich unser Problem auf die Integration der folgenden drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \frac{1}{2} \frac{\Sigma Z}{M} \\ B \frac{d y_1}{dt} &= \frac{1}{2} Y_1 \\ A \frac{d x_1}{dt} &= \frac{1}{2} X_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Ausmittlung der Werthe von $\Sigma Z \; Y_1 \; X_1$.

Um das Verständniss der folgenden Untersuchung zu erleichtern, wollen wir derselben eine Lokomotive von ganz bestimmter und bekannter Bauart zu Grund legen. Wir wählen eine Stephenson'sche Personenzuglokomotive mit inneren Cylindern, innerem Rahmen und mit sechs nicht gekuppelten Rädern (Tab. XIII, Fig. 51, 52, 53, 54).

Der Erfahrung zufolge dürfen wir annehmen, dass die zum Zusammendrücken einer Feder erforderliche Kraft der Zusammendrückung proportional sei. Die Richtigkeit dieses Satzes werden wir in der Folge auch theoretisch nachweisen; er gilt jedoch nur für nicht zu starke Zusammendrückungen. Die Zahl, mit welcher man die Zusammendrückung einer Feder multipliziren muss, um die zusammendrückende Kraft zu erhalten, wollen wir den Starrheits-Coeffizienten der Feder heissen. Ist also f der Starrheits-Coeffizient einer Feder, x ihre Zusammendrückung, so ist $f.x$ die zusammendrückende Kraft.

Nennen wir nun, Tab. XIII, Fig. 51 bis Fig. 54,

- G das Gewicht des auf den Federn liegenden Baues, mit Einschluss des im Kessel enthaltenen Wassers;
- Δ_1 den Horizontalabstand des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues von der hinteren Laufaxe;
- Δ_2 den Horizontalabstand dieses Schwerpunktes von der mittleren Triebaxe:
- Δ_3 den Horizontalabstand dieses Schwerpunktes von der vorderen Laufaxe;
- 2ε die Entfernung der Federn an einer Seite der Lokomotive von den Federn der andern Seite;
- $f_1 \; f_2 \; f_3 \; f_4 \; f_5 \; f_6$ die Starrheits-Coeffizienten der in den Punkten 1 2 3 4 5 6 (Fig. 54) wirkenden Federn;
- $\zeta_1 \; \zeta_2 \ldots \zeta_6$ die Zusammendrückungen dieser Federn durch das Gewicht des Baues, wenn derselbe ruhig auf den Federn liegt und die Lokomotive ruhig auf der Bahn steht;

Dies vorausgesetzt, sind $f_1 \zeta_1 \quad f_2 \zeta_2 \quad \ldots \quad f_6 \zeta_6$ die Kräfte, mit welchen die Federn nach vertikaler Richtung auf den Bau aufwärts wirken, wenn die Lokomotive in vollkommen ruhigem Zustand auf der Bahn steht. Für den Gleichgewichtszustand der Federn im ruhenden Zustand des Baues bestehen demnach folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} G &= f_1 \zeta_1 + f_2 \zeta_2 + \ldots\ldots + f_6 \zeta_6 \\ \Delta_1 (f_1 \zeta_1 + f_4 \zeta_4) + \Delta_2 (f_2 \zeta^2 + f_5 \zeta_5) &= \Delta_3 (f_3 \zeta_3 + f_6 \zeta_6) \\ f_1 \zeta_1 + f_2 \zeta_2 + f_3 \zeta_3 &= f_4 \zeta_4 + f_5 \zeta_5 + f_6 \zeta_6 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Wir wollen diese Gleichung zunächst benützen um die Bedingungen ausfindig zu machen, bei deren Erfüllung alle Federn durch den auf denselben ruhig liegenden Bau um gleich viel zusammengedrückt werden, wollen aber voraussetzen, dass die auf eine und dieselbe Axe einwirkenden Federn gleich starr sind, dass also $f_1 = f_4 \quad f_2 = f_5 \quad f_3 = f_6$

und $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 \; . \; . \; . \; . \; \zeta_6 = z$ sei, wobei z die in allen Federn entstehende Zusammendrückung bedeutet. In diesem Falle werden die zwei ersten der Gleichungen (4)

$$\left.\begin{array}{l} G = 2\,z\,(f_1 + f_2 + f_3) \\ 0 = \varDelta_1 f_1 + \varDelta_2 f_2 - \varDelta_3 f_3 \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

und die dritte dieser Gleichungen wird identisch erfüllt.

Dies sind also die Bedingungen, bei deren Erfüllung alle Federn durch die Last des Baues um gleich viel zusammengepresst werden, vorausgesetzt, dass die auf eine Axe wirkenden Federn gleich starr sind. Wir werden in der Folge veranlasst sein, auf diese Bedingungen (5) zurückzukommen.

Wir denken uns nun, dass man den Bau aus der Gleichgewichtsposition, die durch die Gleichungen (4) charakterisirt wird, in eine andere Lage bringt, indem man den Bau parallel zu seiner Gleichgewichtslage um ζ hebt; sodann um eine durch den Schwerpunkt gehende Queraxe um einen Winkel φ (Fig 51) so dreht, dass der vordere Theil der Lokomotive höher zu stehen kommt, und endlich um eine durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe um einen kleinen Wink el ψ (Fig. 52, 53) so dreht, dass sich die rechte Seite der Lokomotive hebt, die linke aber senkt, so sind dann:

Die Zusammendrückungen der Federn	Die zusammendrückenden Kräfte
$\zeta_1 - \zeta + \varDelta_1 \varphi + \varepsilon \psi$	$f_1 (\zeta_1 - \zeta + \varDelta_1 \varphi + \varepsilon \psi)$
$\zeta_2 - \zeta + \varDelta_2 \varphi + \varepsilon \psi$	$f_2 (\zeta_2 - \zeta + \varDelta_2 \varphi + \varepsilon \psi)$
$\zeta_3 - \zeta - \varDelta_3 \varphi + \varepsilon \psi$	$f_3 (\zeta_3 - \zeta - \varDelta_3 \varphi + \varepsilon \psi)$
$\zeta_4 - \zeta + \varDelta_1 \varphi - \varepsilon \psi$	$f_4 (\zeta_4 - \zeta + \varDelta_1 \varphi - \varepsilon \psi)$
$\zeta_5 - \zeta + \varDelta_2 \varphi - \varepsilon \psi$	$f_5 (\zeta_5 - \zeta + \varDelta_2 \varphi - \varepsilon \psi)$
$\zeta_6 - \zeta - \varDelta_3 \varphi - \varepsilon \psi$	$f_6 (\zeta_6 - \zeta - \varDelta_3 \varphi - \varepsilon \psi)$

und es ist nun:

a) die Summe aller den Rahmenbau aufwärts drückenden Federkräfte

$$\begin{array}{l} f_1 \zeta_1 + f_2 \zeta_2 + f_3 \zeta_3 + f_4 \zeta_4 + f_5 \zeta_5 + f_6 \zeta_6 - \zeta \left[f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6\right] \\ \qquad + \varphi \left[\varDelta_1 (f_1 + f_4) + \varDelta_2 (f_2 + f_5) - \varDelta_3 (f_3 + f_6\right] \\ \qquad + \varepsilon \psi \left[f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6\right] \end{array}$$

b) die algebraische Summe der statischen Momente der Federkräfte in Bezug auf die Queraxe

$$\begin{array}{l} + \varDelta_3 \left[f_3 (\zeta_3 - \zeta - \varDelta_3 \varphi + \varepsilon \psi) + f_6 (\zeta_6 - \zeta - \varDelta_3 \varphi - \varepsilon \psi)\right] \\ - \varDelta_2 \left[f_2 (\zeta_2 - \zeta + \varDelta_2 \varphi + \varepsilon \psi) + f_5 (\zeta_5 - \zeta + \varDelta_2 \varphi - \varepsilon \psi)\right] \\ - \varDelta_1 \left[f_1 (\zeta_1 - \zeta + \varDelta_1 \varphi_1 + \varepsilon \psi) + f_4 (\zeta_4 - \zeta + \varDelta_1 \varphi - \varepsilon \psi)\right] \end{array}$$

c) die algebraische Summe der Momente der Federkräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe

$$\varepsilon \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{f}_4(\zeta_4 - \zeta + \Delta_1 \varphi - \varepsilon \psi) + \mathrm{f}_5(\zeta_5 - \zeta + \Delta_2 \varphi - \varepsilon \psi) + \mathrm{f}_6(\zeta_6 - \zeta - \Delta_3 \varphi - \varepsilon \psi) \\ - \mathrm{f}_1(\zeta_1 - \zeta + \Delta_1 \varphi + \varepsilon \psi) - \mathrm{f}_2(\zeta_2 - \zeta + \Delta_2 \varphi + \varepsilon \psi) - \mathrm{f}_3(\zeta_3 - \zeta - \Delta_3 \varphi + \zeta \psi \end{array} \right\}$$

Diese Ausdrücke werden sehr vereinfacht, wenn man berücksichtigt, dass in der Wirklichkeit die auf eine und dieselbe Axe wirkenden Federn gleich starr, und in ruhigem Zustande um gleich viel zusammengepresst sind. Wir können also nehmen

$$\mathrm{f}_1 = \mathrm{f}_4 \quad \mathrm{f}_2 = \mathrm{f}_5 \quad \mathrm{f}_3 = \mathrm{f}_6$$

$$\zeta^1 = \zeta_4 \quad \zeta_2 = \zeta_5 \quad \zeta_3 = \zeta_6$$

Führt man diese Werthe in die obigen Ausdrücke ein und berücksichtigt die Gleichgewichtsbedingungen (4), so erhält man folgende Resultate

a) Summe aller Federkraft

$$\mathrm{G} - 2\zeta(\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \mathrm{f}_3) + 2\varphi(\Delta_1 \mathrm{f}_1 + \Delta_2 \mathrm{f}_2 - \Delta_3 \mathrm{f}_3)$$

b) Summe der Momente in Bezug auf die Queraxe

$$+ 2\zeta(\Delta_1 \mathrm{f}_1 + \Delta_2 \mathrm{f}_2 - \Delta_3 \mathrm{f}_3) - 2\varphi(\mathrm{f}_1 \Delta_1^2 + \mathrm{f}_2 \Delta_2^2 + \mathrm{f}_3 \Delta_3^2)$$

c) Summe der Momente in Bezug auf die Längenaxe

$$- 2\varepsilon^2 \psi(\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \mathrm{f}_3)$$

Somit sind nun die von den Federkräften herrührenden Bestandtheile der Summe $\Sigma \mathrm{Z}$, Y_1, X_1 berechnet, und wir gehen nun zur Bestimmung derjenigen Glieder über, welche die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale liefern.

Nennen wir

P die Kraft, mit welcher der Kolben der vorderen Maschine getrieben wird.

P_1 die Kraft, mit welcher der Kolben der hinteren Maschine getrieben wird. Diese Kräfte P und P_1 haben zwar gleiche Intensitäten, es ist aber gleichwohl zweckmässiger, sie so in Rechnung zu bringen, als wären sie ungleich;

L die Länge einer Schubstange;

r den Halbmesser einer Kurbel.

e den Horizontalabstand der Axen der beiden Cylinder von der Längenaxe der Lokomotive (Fig. 54);

ω die Winkelgeschwindigkeit der Triebräder;

D den Durchmesser eines Triebrades;

α den Winkel, den die Kurbel der vorderen Maschine mit der Axe des Cylinders in dem Zeitmoment bildet, in welchem die Position des Baues durch die Grössen ζ, φ und ψ bestimmt wird.

$\frac{\pi}{2} - \alpha$ den Winkel, den gleichzeitig die Kurbel der hinteren Maschine mit der Richtung ihres Cylinders bildet. (Fig. 51);

Dies vorausgesetzt, sind, vermöge der Seite (138) gegebenen Erläuterungen, $\mathrm{P}\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{L}}\sin.\alpha$ $\mathrm{P}_1\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{L}}\cos.\alpha$ die Pressungen der Gleitstücke gegen die oberen Führungslineale, und sind ferner $\mathrm{r}\cos.\alpha + \mathrm{L} - \Delta_2$, $\mathrm{r}\sin.\alpha + \mathrm{L} - \Delta_2$ die Horizontalabstände der beiden Gleitstücke von der durch den Schwerpunkt des Baues gehenden Queraxe.

Die Momente dieser Pressungen sind demnach

d) in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Oueraxe

$$P \frac{r}{L} \sin. \alpha (r \cos. \alpha + L - \Delta_2) + P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha (r \sin. \alpha + L - \Delta_2)$$

oder

$$\frac{1}{2}(P + P_1) \frac{r}{L} \sin. 2\alpha + (L - \Delta_2) \frac{r}{L} (P \sin. \alpha + P_1 \operatorname{Cos}. \alpha)$$

e) in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe $o\,x_1$

$$P \frac{r}{L} \sin. \alpha\, e - P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha\, e$$

oder

$$\frac{r}{L} e (P \sin. \alpha - P_1 \cos. \alpha)$$

endlich ist die Summe der vertikal aufwärts wirkenden Pressungen

f) $$\frac{r}{L}(P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha)$$

Nun haben wir noch die auf den Rahmenbau einwirkenden Horizontalkräfte zu berücksichtigen.

Heissen wir K den numerischen Werth der Kraft, mit welcher ein Kolben getrieben wird (also die Differenz der Pressungen gegen die beiden Flächen eines Kolbens), so ist, wie schon früher gezeigt wurde, der Widerstand des ganzen Trains $2\,K \frac{2\,l}{D\,\pi}$, wobei l die Länge des Kolbenschubes bezeichnet. Nennen wir h_1 die Höhe des Schwerpunktes des Baues über dem Zusammenhängungspunkt der Lokomotive mit dem Tender, so ist das Moment dieses Zuges in Begug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe

g) $$-h_1 \,.\, 2\,K \frac{2\,l}{D\,\pi}$$

Streng genommen ist der Zug in der Zusammenhängung der Lokomotive mit dem Tender nicht constant gleich dem mittleren Widerstand des Trains, sondern bei einem etwas unruhigen Lauf der Lokomotive periodisch veränderlich.

Wenn die Kurbeln der beiden Maschinen die in Fig. (51) dargestellte Stellung haben, wird, beim Vorwärtslaufen der Lokomotive, der vordere Kolben vorwärts, der Kolben der hinteren Maschine dagegen rückwärts getrieben; wird demnach der Cylinder der vorderen Maschine mit einer Kraft P zurück, der Cylinder der hinteren Maschine mit einer Kraft P_1 nach vorwärts getrieben. Nennen wir h die Höhe des Schwerpunktes über der Axe des Triebrades, so ist

h) $$h(P_1 - P)$$

das Moment in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe.

Nun haben wir noch das Moment der Pressungen zu bestimmen, welche die Triebaxe gegen die Axengabeln ausübt. Dabei wollen wir uns aber erlauben, die Umdrehungsgeschwindigkeit der Triebaxe als constant anzunehmen, und die hin- und hergehenden Massen der Schubstangen, Kolbenstangen und Kolben zu vernachlässigen, oder, mit andern Worten, wir wollen die Pressungen der Triebaxe gegen die Axengabeln nach statischen Gesetzen berechnen; der Fehler, den wir dadurch begehen, ist von keinem Belang.

Zerlegt man die Pressungen der Schubstangen gegen die Kurbelzapfen in horizontale und vertikale Kräfte, so sind die ersteren P und P_1, die letzteren dagegen $P \frac{r}{L} \sin. \alpha$, $P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha$.

Wir setzen voraus, dass die Triebräder auf der Bahn nicht glitschen, sondern nur rollen, dann können wir das Radwerk als einen Hebel ansehen, der im Berührungspunkte seinen Drehungspunkt hat. Nennen wir für einen Augenblick $\mathfrak{K}$ den numerischen Werth des Druckes der Triebaxe gegen die Axenhalter, so haben wir zur Bestimmmg desselben die Gleichung

$$\mathfrak{K} \frac{D}{2} = P\left(\frac{D}{2} + r \sin. \alpha\right) - P_1 \left(\frac{D}{2} - r \cos. \alpha\right) + P \frac{r}{L} \sin. \alpha \; r \cos. \alpha + P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha \; r \sin. \alpha$$

und hieraus folgt:

$$\mathfrak{K} = P - P_1 + \frac{2r}{D}(P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) + \frac{r^2}{LD}(P + P_1) \sin. 2\alpha$$

Das Moment dieses Druckes in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe ist:

$$i) \qquad + \mathfrak{K} h = + h \left[P - P_1 + \frac{2r}{D}(P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) + \frac{r^2}{LD}(P + P_1) \sin. 2\alpha\right]$$

Hiemit sind nun endlich alle Bestandtheile der zu berechnenden Summe bestimmt; wir dürfen jedoch nicht übersehen, dass in der Summe der Vertikalkräfte auch das Gewicht des Baues aufgenommen werden muss. Fassen wir sämmtliche Resultate a b c d e f g h i zusammen und berücksichtigen das Gewicht G des Baues, so finden wir nun:

$$\Sigma Z = -2\zeta(f_1 + f_2 + f_3) + 2\varphi(\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3) + \frac{r}{L}(P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha)$$

$$Y_1 = \left\{\begin{array}{l} 2\zeta(\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3) - 2\varphi(f_1 \Delta_1^2 + f_2 \Delta_2^2 + f_3 \Delta_3^2) \\ + \frac{1}{2}(P + P_1)\frac{r^2}{L} \sin. 2\alpha + (L - \Delta_2)\frac{r}{L}(P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \\ - h_1 \, 2K \frac{2l}{D\pi} + h(P_1 - P) + h(P - P_1) \\ + h(P + P_1)\frac{r^2}{DL} \sin. 2\alpha + \frac{2r}{D} h(P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \end{array}\right\}$$

$$X_1 = -2\varepsilon^2 \psi(f_1 + f_2 + f_3) + \frac{r}{L} e(P \sin. \alpha - P_1 \cos. \alpha)$$

oder auch, wenn man in Y_1 zusammengehörige Glieder vereiniget:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma Z &= -2\zeta(f_1+f_2+f_3)+2\varphi(\varDelta_1 f_1+\varDelta_2 f_2-\varDelta_3 f_3)+\frac{r}{L}(P\sin.\alpha+P_1\cos.\alpha)\\
Y_1 &= -h_1 2K\frac{2l}{D\pi}+2\zeta(\varDelta_1 f_1+\varDelta_2 f_2-\varDelta_3 f_3)-2\varphi(f_1\varDelta_1^2+f_2\varDelta_2^2+f_3\varDelta_3^2)\\
&+\frac{1}{2}(P+P_1)\frac{r^2}{L}\left(1+\frac{2h}{D}\right)\sin.2\alpha+\left[(L-\varDelta_2)\frac{r}{L}+\frac{2rh}{D}\right](P\sin.\alpha+P_1\cos.\alpha)\\
X_1 &= -2\varepsilon^2\psi(f_1+f_2+f_3)+\frac{r}{L}e(P\sin.\alpha-P_1\cos.\alpha)
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Rechnen wir die Zeit t von einem Augenblick des Beharrungszustandes an, in welchem die Kurbel der vorderen Maschine mit der Richtung ihrer Kolbenstange einen Winkel α_0 bildete, so können wir in den Gleichungen (6), die für die Zeit t gelten $\alpha=\alpha_0-\omega t$ setzen. Dies setzt jedoch voraus, dass α_0 gleich oder kleiner als 90^0 ist, indem die Gleichungen (6) zunächst nur gelten, so lange α zwischen 0 und 90^0 liegt.

Hiedurch erhalten wir nun:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma Z &= -2\zeta(f_1+f_2+f_3)+2\varphi(\varDelta_1 f_1+\varDelta_2 f_2-\varDelta_3 f_3)+\frac{r}{L}\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right]\\
Y_1 &= \left\{\begin{aligned}
&-h_1 2K\frac{2l}{D\pi}+2\zeta(\varDelta_1 f_1+\varDelta_2 f_2-\varDelta_3 f_3)-2\varphi(f_1\varDelta_1^2+f_2\varDelta_2^2+f_3\varDelta_3^2)\\
&+\frac{1}{2}(P+P_1)\frac{r^2}{L}\left(1+\frac{2h}{D}\right)\sin.2(\alpha_0-\omega t)\\
&+\left[(L-\varDelta_2)\frac{r}{L}+\frac{2rh}{D}\right]\left[P\sin.(a_0-\omega t)+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right]
\end{aligned}\right\}\\
X_1 &= -2\varepsilon^2\psi(f_1+f_2+f_3)+\frac{r}{L}e\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.\alpha_0-\omega t)\right]
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Aus diesen Werthen von ΣZ Y_1 X_1 könnte man bereits sehr viel wichtige Schlüsse ziehen, allein da eine vollständige Kenntniss der Bewegungszustände doch nur durch die Integrale der Bewegungsgleichungen erlangt werden kann, so wollen wir uns hier nicht länger aufhalten, sondern machen sogleich die Vorbereitungen zur Fortsetzung der Untersuchung.

Differenzialgleichungen, welche die gaukelnde Bewegung bestimmen.

Diese Differenzialgleichungen ergeben sich, wenn man in die Gleichungen (3) die so eben für ΣZ Y_1 und X_1 gefundenen Werthe substituirt und ferner noch berichtiget, dass man hat:

$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}\qquad\frac{dx_1}{dt}=\frac{d^2\psi}{dt^2}$$

Macht man diese Substitution und setzt sodann zur Abkürzung der Rechnungen:

$$\left.\begin{array}{lll}
m = \dfrac{f_1 + f_2 + f_3}{M} & m_1 = \dfrac{\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3}{B} & m_2 = \dfrac{e^2 (f_1 + f_2 + f_3)}{A} \\[2ex]
n = \dfrac{\Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3}{M} & n_1 = \dfrac{\Delta_1^2 f_1 + \Delta_2^2 f_2 + \Delta_3^2 f_3}{B} & \\[2ex]
p = \dfrac{r}{2 L M} & p_1 = (L - \Delta_2) \dfrac{r}{2 L B} + \dfrac{r h}{B D} & p_2 = \dfrac{r e}{2 A_L} \\[2ex]
c = \dfrac{2 l h_1 K}{B D \pi} & q_1 = \dfrac{r^2}{2 L B} \left(1 + \dfrac{2 h}{D}\right) &
\end{array}\right\} \quad (8)$$

so erscheinen die Gleichungen (3) unter nachstehender Form;

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d^2 \zeta}{dt^2} = - m \zeta + n \varphi + p \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right] \\[2ex]
\dfrac{d^2 \varphi}{dt^2} = - c + m_1 \zeta - n_1 \varphi + \dfrac{1}{2} (P + P_1) q_1 \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) \\[2ex]
\qquad + p_1 \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right] \\[2ex]
\dfrac{d^2 \psi}{dt^2} = - m_2 \psi + p_2 \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right]
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (9)$$

Setzen wir:

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi = \varphi_1 + c \dfrac{m}{m_1 n - n_1 m} \\[2ex]
\zeta = \zeta_1 + c \dfrac{n}{m_1 n - n_1 m}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

so bedeuten φ_1 und ζ_1 zwei neue Variable, die von φ und ζ nur um constante Werthe verschieden sind.

Durch Einführung dieser Werthe von φ und ζ in die Gleichungen (9) nehmen dieselben folgende Form an:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d^2 \zeta_1}{dt^2} = - m \zeta_1 + n \varphi + p \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right] \\[2ex]
\dfrac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = + m_1 \zeta_1 - n_1 \varphi_1 + p_1 \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right] \\[2ex]
\qquad + \dfrac{1}{2} (P + P_1) q_1 \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) \\[2ex]
\dfrac{d^2 \psi}{dt^2} = - m_2 \psi + p e \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right]
\end{array}\right\} \quad \ldots (11)$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den Gleichungen (9) dadurch, dass in ihnen kein absolut constantes Glied vorkommt. Integrirt man die Gleichungen (11) und setzt sodann die für ζ_1 und φ_1 sich ergebenden Ausdrücke in (10), so erhält man die zu berechnenden Werthe von φ und ζ.

Es ist in Erinnerung zu bringen, dass diese Gleichungen (9) und (11) zunächst nur gelten, so lange $\alpha_0 - \omega t$ nicht ausserhalb 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, d. h. nur für die Zeit gelten,

in der die Kurbel der vordern Maschine den Quadranten I, Fig. (51) durchläuft. Die Differenzialgleichungen für die Bewegung der Kurbel durch die übrigen Quadranten erhält man, wenn man in den Gleichungen (11) für P und P_1 diejenigen Werthe setzt, welche in folgendem Schema zusammengestellt sind:

Wenn $\pi_0 - \omega t$ liegt im Quadranten Fig. (51)	sind die Werthe von		
	P	P_1	$P + P_1$
I.	$+K$	$+K$	$2K$
II.	$+K$	$-K$	0
III.	$-K$	$-K$	$-2K$
IV.	$-K$	$+K$	0

wobei K den numerischen Werth der Kraft bedeutet, mit welcher ein Kolben getrieben wird. Die numerischen Werthe von P und P_1 bleiben nämlich der Voraussetzung gemäss nun gleich k, die Zeichen von P und P_1 ändern sich dagegen in der Art, dass die Produkte $P \sin.(\alpha_0 - \omega t)$ $P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)$ stets positiv bleiben.

Die dritte der Gleichungen (11) kann unabhängig von den beiden andern integrirt werden, weil sie die beiden andern Variabeln ζ_1 und φ_1 nicht enthält. Die beiden erstern der Gleichungen (11) müssen dagegen gleichzeitig integrirt werden, weil in jeder derselben sowohl ζ_1 als auch φ_1 vorkommt. Mit den Integrationen dieser Gleichungen werden wir uns nun beschäftigen.

Integration der Differenzialgleichung, welche das Wanken bestimmt.

Die wankende Bewegung wird durch die dritte der Gleichungen (10) also durch

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = - m_2 \psi + p_2 [P \sin.(\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

bestimmt. Das Integrale dieser Gleichung kann nach der von Lagrange gelehrten Methode der Variation der Constanten integrirt werden. Dieser Weg führt jedoch zu weitläufigen Rechnungen, die man sich ersparen kann, indem die Form disses Integrales errathen werden kann. Es ist nämlich die Vermuthung eine sehr nahe liegende, dass alle einzelnen Schwingungen, aus welchen das Gaukeln besteht, nach ähnlichen Gesetzen erfolgen, wie die Schwingungen der Saiten oder elastischen Körper. Es ist daher wahrscheinlich, dass wir der Gleichung (1) genügen werden, wenn wir setzen

$$\psi = \mathfrak{A} \sin. kt + \mathfrak{B} \cos. kt + \mathfrak{M} \sin.(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{N} \cos.(\alpha_0 - \omega t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Wenn diese Annahme eine richtige ist, so muss die Gleichung (1) durch Einführung dieses Werthes von ψ eine identische werden.

Aus (2) folgt durch zweimaliges Differenziren nach t.

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = - k^2 (\mathfrak{A} \sin. kt + \mathfrak{B} \cos. kt) - \mathfrak{M} \omega^2 \sin.(\alpha_0 - \omega t) - \mathfrak{N} \omega^2 \cos.(\alpha_0 - \omega t) \quad . \; . \; . \; (3)$$

Substituirt man diese Werthe von ψ und $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ in (1) so findet man:

$$-k^2(\mathfrak{A}\sin.kt+\mathfrak{B}\,\alpha\cos.kt)-\mathfrak{M}\,\omega^2\cos.^2\sin.(\alpha_0-\omega t)-\mathfrak{N}\,\omega^2\cos.(\alpha_0-\omega t)=$$

$$-m_2(\mathfrak{A}\sin.kt.+\mathfrak{B}\cos.kt)-\mathfrak{M}\,m_2\sin.(\alpha_0-\omega t)-\mathfrak{N}\,m_2\cos.(\alpha_0-\omega t)$$

$$+p_2 P\sin.(\alpha_0-\omega t)-p_2 P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)$$

Diese Gleichung wird, wenn ω^2 nicht gleich m_2 ist, eine identische, wenn man setzt

$$k^2=m_2 \qquad -\mathfrak{M}\,\omega^2=-\mathfrak{M}\,m_2+p_2 P \qquad -\mathfrak{N}\,\omega^2=\mathfrak{N}\,m_2-p_2 P_1$$

d. h. wenn

$$\left.\begin{aligned} K&=\sqrt{m_2}\\ \mathfrak{M}&=\frac{p_2 P}{m_2-\omega^2}\\ \mathfrak{N}&=-\frac{p_2 P_1}{m_2-\omega^2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

genommen wird.

Setzt man die Werthe in (2), so findet man für das Integrale der Gleichung (1), wenn ω^2 nicht gleich m_2 ist folgenden Ausdruck:

$$\psi=\mathfrak{A}\sin.\sqrt{m_2}\,t+\mathfrak{B}\cos.\sqrt{m_2}\,t+\frac{p_2}{m_2-\omega^2}\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)-P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right] \quad \ldots \quad (5)$$

in welchem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die beiden Constanten des Integrals bezeichnen. Den besonderen Fall, wen $\omega^2=m_2$ ist, werden wir in der Folge ins Auge fassen.

Die Gleichung (5) zeigt, dass die wankende Bewegung aus vier periodisch wiederkehrenden Schwingungen besteht. Die von ω, P und P_1 unabhängigen Schwingungen $\mathfrak{A}\sin.\sqrt{m_2}\,t$, $\mathfrak{B}\cos.\sqrt{m_2}\,t$, wollen wir Grundschwingungen nennen. Diese bleiben sich gleich, es mag die Lokomotive schnell oder langsam laufen, stark oder schwach getrieben werden. Sie treten allein auf, wenn man die Wirkung des Dampfes auf die Maschine aufhebt, und die Lokomotive nur durch die Trägheit ihrer Massen auf der Bahn fortläuft.

Wenn die Zeit t um $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ wächst, kehrt die Lokomotive in die Lage zurück, in welcher sie sich zur Zeit t befand, $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ ist daher die Zeit T eine Grundschwingung. Setzt man für m_2 seinen Werth, so findet man:

$$T=\frac{2\pi}{\varepsilon}\sqrt{\frac{A}{f_1+f_2+f_3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Diese Zeit fällt klein aus, oder die Grundschwingungen folgen schnell aufeinander, 1) wenn $f_1+f_2+f_3$ gross, d. h. wenn die Federn starr sind, 2) wenn A klein, d. h. wenn das Trägheitsmoment des beweglichen Baues in Bezug auf die Längenaxe klein ist, 3) wenn ε gross ist, d. h. wenn die Federn möglichst weit aussen am Baue angebracht sind.

Das Glied

$$\frac{p_2}{m_2 - \omega^2}\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right]$$

bestimmt die Schwingungen, welche durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale veranlasst werden, wenn die Kolben durch Dampf getrieben werden. Diese Schwingungen richten sich genau nach den Kurbelbewegungen, wir wollen sie desshalb Kurbelschwingungen nennen. Die Dauer einer solchen Schwingung, d. h. die Zeit, in welcher die Lokomotive in Folge dieser Schwingungsweise in eine gewisse Lage zurückkehrt, ist $\frac{2\pi}{\omega}$ und stimmt genau mit der Umdrehung der Treibaxe überein Je nachdem also die Lokomotive schnell oder langsam läuft, folgen diese Kurbelschwingungen schnell oder langsam aufeinander. Die grösste Ablenkung von der Ruheposition, welche in Folge dieser Schwingung eintritt, beträgt $\frac{p_2 P}{m_2 - \omega^2}$ oder wenn wir für p_2 und m_2 ihren Werth setzen:

$$\frac{P r e}{2 L A} \frac{1}{\frac{\varepsilon^2 (f_1 + f_2 + f_3)}{A} - \omega^2}$$

oder auch

$$\frac{P r e}{2 L} \frac{1}{\varepsilon^2 (f_1 + f_2 + f_3) - \omega^2 A} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

Das durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale verursachte Wanken wird demnach bedenklich 1) wenn P gross ist, d. h. wenn die Maschinen kräftig wirken; 2) wenn e gross ist, d. h. wenn die Horizontaldistanz der Cylinder gross ist; 3) wenn $\frac{r}{L}$ gross ist, d. h. wenn die Schubstangen im Verhältniss zum Kurbelhalbmesser eine geringe Länge haben; 4) wenn ε klein ist, d. h. wenn die Federn eng gestellt sind; 5) wenn $f_1 + f_2 + f_3$ klein ist, d. h. wenn die Federn weich sind; 6) wenn die Geschwindigkeit der Lokomotive demjenigen Werth nahe kommt, für welchen

$$\omega = \varepsilon \sqrt{\frac{f_1 + f_2 + f_3}{A}}$$

wird, d. h. wenn die Umdrehungszeit der Triebaxe mit der Zeit einer Grundschwingung nahe übereinstimmt. Es gibt also für jede Lokomotive eine Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe, bei welcher ein heftiges Wanken des beweglichen Baues eintreten muss.

Denkt man sich, dass eine Lokomotive ganz allmälig aus einem langsamen Bewegungszustand in einen extravagant schnellen übergeht, so wird anfänglich nur ein schwaches, dann ein stärkeres, hierauf ein sehr heftiges Wanken eintreten; hat man aber diesen gefährlichen Moment glücklich überstanden, so nimmt das Wanken bei noch weiter zunehmender Geschwindigkeit mehr und mehr ab, und würde bei einer grenzenlosen Geschwindigkeit so verschwinden, dass sich die Lokomotive ganz aufrecht stehend hielte.

Wir können auch die Einwirkungen der Unvollkommenheit der Bahn auf das Wanken der Lokomotive durch Rechnung verfolgen, wenn wir annehmen, dass diese Einwirkungen durch periodisch wiederkehrende Funktionen der Zeit ausgedrückt werden dürfen. Durch die Unebenheiten der Bahn werden die Räder, insbesondere an den Schienen-Verbindungen in die Höhe gestossen, werden ferner die Räder zwischen den Schienen hin und her geschoben. Durch diese Einwirkungen entstehen gewisse Drehungsmomente und wir wollen annehmen, dass dieselben durch

$$\varepsilon \mathfrak{B} (\sin. \lambda t + \cos. \gamma t) \text{ und } h \mathfrak{H} (\sin. \mu t + \cos. \mu t)$$

ausgedrückt werden dürfen, wobei 2ε der horizontale Abstand der rechtseitigen Federn von den linkseitigen und h die Höhe des Schwerpunktes des beweglichen Baues über den Axen der Räder bezeichnet. Ferner $\mathfrak{B}$ λ $\mathfrak{H}$ μ gewisse von dem Bau der Bahn und der Räder abhängige Constante sind.

Wir erhalten nun statt der Gleichung (1) die folgende

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = - m_2 \psi + p_2 [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] + \frac{\varepsilon \mathfrak{B}}{2 A} (\sin. \lambda t + \cos. \lambda t) + \frac{h \mathfrak{H}}{2 A} (\sin. \mu t + \cos. \mu t)$$

Vorausgesezt dass m_2 weder gleich ω^2 noch gleich λ^2 und auch nicht gleich μ^2 ist, findet man für das Integrale dieser Gleichung folgenden Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} \psi = \mathfrak{A} \sin. \sqrt{m_2}\, t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{m_2}\, t + \frac{p_2}{m_2 - \omega^2} [P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)] \\ + \frac{\varepsilon \mathfrak{B}}{2 A (m_2 - \lambda^2)} (\sin. \lambda t + \cos. \lambda t) \\ + \frac{h \mathfrak{H}}{2 A (m_2 - \mu^2)} (\sin. \mu t + \cos. \mu t) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Da sowohl $\sin. \lambda t + \cos. \lambda t$ als auch $\sin. \mu t + \cos. \mu t$ nicht grösser als $\sqrt{2}$ werden kann, so ist die grösste Neigung, die durch das Aufspringen der Räder verursacht werden kann,

$$\sqrt{2} \frac{\varepsilon \mathfrak{B}}{2 A (m_2 - \lambda^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \frac{\varepsilon \mathfrak{B}}{\varepsilon^2 (f_1 + f_2 + f_3) - \lambda^2 A}$$

und die gröste Neigung, die aus der Hin- uüd Herbewegung der Räder zwischen den Schienen entstehen kann

$$\sqrt{2} \frac{h \mathfrak{H}}{2 A (m_2 - \mu^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \frac{h \mathfrak{H}}{\varepsilon^2 (f_1 + f_2 + f_3) - \mu A}$$

Hieraus sieht man, dass die Einwirkung der Bahn auf das Wanken der Lokomotive gross ausfällt: 1) wenn sich der Schwerpunkt des beweglichen Baues in einer beträchtlichen Höhe über den Axen der Räder befindet, 2) wenn m_2 nahe gleich λ^2 oder nahe gleich μ^2 wird. Diess ist aber dann der Fall, wenn die Zeit $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ einer Grundschwingung nahe gleich ist der Zeit $\frac{2\pi}{\lambda}$ von einem Radaufsprung bis zum nächsten, oder nahe gleich ist der Zeit $\frac{2\pi}{\mu}$ des Hin- und Herganges der Räder zwischen dem Geleise. Da die störenden Einwirkungen der Bahn vorzugsweise an den Schienenstössen stattfinden, so werden wir der Wahrheit ziemlich nahe kommen, wenn wir diese Zeiten $\frac{2\pi}{\lambda}$ und $\frac{2\pi}{\mu}$ gleich setzen der Zeit, in der die Lokomotive über eine Schienenlänge läuft; diese Zeit ist aber wenn wir die Laufgeschwindigkeit der Lokomotive mit v und die Länge einer Schiene mit s bezeichnen $\frac{s}{v}$. Durch die Einwirkung einer aus gleich langen Schienen bestehenden Bahn kann also das Wanken bedeutend werden, wenn annähernd

$$\frac{s}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{m_2}} = \frac{2\pi}{\varepsilon} \sqrt{\frac{A}{f_1 + f_2 + f_3}}$$

oder annähernd

$$v = \frac{S\varepsilon}{2\pi}\sqrt{\frac{f_1 + f_2 + f_3}{A}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

wird. Denkt man sich, dass eine Lokomotive aus einem sehr langsamen Beharrungszustand allmählig in einen extravagant raschen übergeht, so wird die Bahn anfangs nur ein schwaches, dann ein stärkeres, zuletzt aber, wenn die Geschwindigkeit sehr gross geworden ist, nur noch ein äusserst schwaches Wanken verursachen. Es gibt also auch hinsichtlich der Einwirkung der Bahn auf das Wanken eine gefährliche Geschwindigkeit; auch ist aus dem Gesagten klar, dass man sich durch ungleich lange Schienen gegen die Einwirkung der Bahn theilweise schützen könnte.

Gehen wir nun zur Behandlung der Ausnahmsfälle über, in welchen der Ausdruck (9) das Integrale der Differenzialgleichung (8) nicht mehr darstellen kann.

Ausnahmsfälle, in welchen die für das Wanken aufgefundenen Ausdrücke unrichtig sind.

Es gibt drei Fälle, in welchen die Gleichung (9) den wahren Werth von ψ nicht mehr richtig darstellt. Diese Fälle treten ein, wenn m_2 entweder gleich ω^2 oder gleich λ^2 oder endlich gleich μ^2 ist, d. h. wenn die Dauer $\frac{2\pi}{\sqrt{m_2}}$ entweder gleich ist der Umdrehungszeit $\frac{2\pi}{\omega}$ der Triebaxe oder gleich ist einer der Perioden $\frac{2\pi}{\lambda}$ $\frac{2\pi}{\mu}$ der Bahneinwirkungen. Die analytische Praxis lässt vermuthen, dass in einem dieser drei Fälle das wahre Integrale der Gleichung (8) ein mit der Zeit t multiplizirtes Glied enthalten müsse. Prüft man diese Vermuthung, so findet man, dass der Differenzialgleichung (8) in der That durch folgende Ausdrücke entsprochen wird:

1. Wenn $\omega^2 = m_2$ ist:

$$\psi = \mathfrak{A}\sin.\omega t + \mathfrak{B}\cos.\omega t + \frac{p_2}{2\sqrt{m_2}}\left[P\sin.(\alpha_0 - \omega t) + P_1\cos.(\alpha_0 - \omega t)\right]t$$

$$+ \frac{\varepsilon\mathfrak{B}}{2A(m_2 - \lambda^2)}(\sin.\lambda t + \cos.\lambda t)$$

$$+ \frac{h\mathfrak{H}}{2A(m_2 - \mu^2)}(\sin.\mu t + \cos.\mu t)$$

2. Wenn $\lambda^2 = m_2$ ist

$$\psi = \mathfrak{A}\sin.\sqrt{m_2}\,t + \mathfrak{B}\cos.\sqrt{m_2}\,t + \frac{p_2}{m_2 - \omega^2}\left[P\sin.(\alpha_0 - \omega t) - P_1\cos.(\alpha_0 - \omega t)\right]$$

$$+ \frac{\varepsilon\mathfrak{B}}{4A\sqrt{m_2}}(\sin.\sqrt{m_2}\,t - \cos.\sqrt{m_2}\,t)\,t$$

$$+ \frac{h\mathfrak{H}}{2A(m_2 - \mu^2)}(\sin.\mu t + \cos.\mu t)$$

Wenn $\mu^2 = m_2$ ist:

$$\psi = \mathfrak{A} \sin. \sqrt{m_2}\, t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{m_2}\, t + \frac{p_2}{m_2 - \omega^2} \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) - P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \right]$$

$$+ \frac{\varepsilon \mathfrak{B}}{2 A (m_2 - \lambda^2)} (\sin. \lambda t + \cos \lambda t)$$

$$+ \frac{h \mathfrak{H}}{4 A \sqrt{m_2}} (\sin. \sqrt{m_2}\, t - \cos. \sqrt{m_2}\, t)\, t$$

Wäre gleichzeitig $\omega^2 = m_2$ und $\lambda^2 = m_2$ oder $\omega^2 = m_2$ und $\mu^2 = m_2$ oder endlich $\lambda^2 = m_2$ und $\mu^2 = m_2$, so würden in dem Ausdruck für ψ zwei mit der Zeit t multiplizirte Glieder vorkommen. Wäre gleichzeitig $m_2 = \omega^2 = \lambda^2 = \mu^2$ so würden in ψ drei mit t multiplizirte Glieder vorkommen.

In allen diesen Fällen wird das Wanken der Lokomotive mit der Zeit immer stärker und stärker, kann demnach mit der Zeit sehr drohend werden. Es ist daher von praktischem Interesse zu erfahren, was zu thun ist, damit in der Wirklichkeit diese gefährlichen Gleichheiten: $\omega^2 = m_2$ $\lambda^2 = m_2$ $\mu^2 = m_2$ nicht eintreten können.

Wenn die gefährliche Gleichheit $\omega^2 = m_2$ nicht eintreten soll, muss die grösste Winkelgeschwindigkeit, die in der Benutzung einer Lokomotive eintreten kann, kleiner sein als $\sqrt{m_2}$. Nennen wir V die grösste Laufgeschwindigkeit, bis zu welcher hin man eine Lokomotive laufen lassen will, D den Durchmesser eines Triebrades, so ist der grösste Werth von $\omega = 2 \frac{V}{D}$. Die gefährliche Gleichheit $\omega^2 = m_2$ wird also bei keiner der Geschwindigkeiten, mit welcher man die Lokomotive laufen lassen will, eintreten, wenn

$$2 \frac{V}{D} < \sqrt{m_2}$$

oder wenn

$$D > \frac{2 V}{\sqrt{m_2}}$$

oder wenn

$$D > 2 \frac{V}{\varepsilon} \sqrt{\frac{A}{f_1 + f_2 + f_3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Diesem Ausdrucke kann man eine mehr sprechende Form geben. Das Federwerk einer Lokomotive soll, wie wir in der Folge sehen werden, immer so angeordnet werden, dass in unbewegtem Zustande der Lokomotive alle Federn gleich stark zusammengedrückt sind. Dieser Anforderung wird, wie Seite 142, Gleichung (5) erklärt wurde entsprochen, wenn

$$\left.\begin{aligned} f_1 \Delta_1 + f_2 \Delta_2 - f_3 \Delta_3 &= 0 \\ f_1 + f_2 + f_3 &= \frac{G}{2 s} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$s = z$ gesetzt ist, wobei s die Zusammendrückung jeder Feder bedeutet. Wir wollen annehmen, das Federwerk der Lokomotive entspreche dieser Anforderung.

Um das Trägheitsmoment A des beweglichen Baues in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe auszudrücken, sei d_4 der Durchmesser eines Cylinders,

dessen Gewicht gleich G und dessen Trägheitsmoment (als Masse ausgedrückt) in Bezug auf seine geometrische Axe gleich A ist, so hat man

$$A = \frac{G}{2g} \frac{d_1^2}{8} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Vermittelst dieses Werthes von A und des Werthes, den die zweite der Bedingungen (2) für $f_1 + f_2 + f_3$ darbietet, wird die Beziehung (1)

$$D > \frac{1}{2} \frac{d_1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2s}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Die Zusammendrückung s der Federn durch das Gewicht des beweglichen Baues beträgt gewöhnlich 0·05 Meter, $\frac{d_1}{\varepsilon}$ ist für die Lokomotive von *Crampton* annähernd gleich 2·5, $g = 9{\cdot}808$. Die grösste, bei Personenschnellzügen vorkommende Geschwindigkeit V kann zu 16 Meter angenommen werden. Mit diesen Daten findet man aus (4)

$$D > 2 \text{ Meter}.$$

Diese numerische Rechnung ist nun allerdings nicht ganz zuverlässig, weil das Verhältniss $\frac{d_1}{\varepsilon}$ nur nach einer ungefähren Schätzung genommen wurde, aber jedenfalls werden wir durch den Ausdruck (4) belehrt, dass weiche Federn (für welche s gross ist) und eine grosse Fahrgeschwindigkeit V grosse Triebräder erfordern, damit das Wanken nicht zu stark wird.

Untersuchen wir nun ferner, unter welchen Bedingungen die gefährlichen Gleichheiten $\lambda^2 = n_2$ und $\mu^2 = m_2$ vermieden werden können.

Die störenden Einwirkungen der Bahn auf die Bewegung der Lokomotive geschehen vorzugsweise an den Schienenverbindungen; es ist daher der Natur der Sache angemessen, wenn wir die Perioden $\frac{2\pi}{\mu}$ und $\frac{2\pi}{\lambda}$ gleich setzen der Zeit, in welcher die Lokomotive eine Schienenlänge durchläuft. Nennen wir also S eine Schienenlänge, V die Laufgeschwindigkeit der Lokomotive, so ist $\frac{S}{V}$ die Zeit, in der die Lokomotive eine Schienenlänge zurücklegt. Wir setzen daher

$$\frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{S}{V}$$

oder

$$\lambda = \mu = 2\pi \frac{V}{S} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Damit nun bei keiner von den Geschwindigkeiten, die in der Wirklichkeit vorkommen, die gefährliche Gleichheit $\lambda^2 = m_2$ eintritt, muss, selbst für den grössten Werth von V, $\lambda < \sqrt{m_2}$ sein. Wir erhalten daher die Bedingung

$$2\pi \frac{V}{S} < \varepsilon \sqrt{\frac{f_1 + f_2 + f_3}{A}}$$

oder

$$S > 2\,\pi \frac{V}{\varepsilon} \sqrt{\frac{A}{f_1 + f_2 + f_3}}$$

oder endlich wenn wir für A und $f_1 + f_2 + f_3$ die Werthe setzen, welchen die Gleichungen (2) und (3) darbieten

$$S > \frac{\pi}{2} \frac{d_1}{\varepsilon} V \sqrt{\frac{2\,s}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Weiche Federn (für welche s gross ist), eine grosse Fahrgeschwindigkeit und eine kleine Federdistanz ε erfordern also lange Schienen.

Setzen wir auch hier $\frac{d_1}{\varepsilon} = 2{\cdot}5$, $V = 16$, $s = 0{\cdot}05$, $g = 9{\cdot}81$, so folgt aus (5)

$$S > 6{\cdot}28 \text{ Meter.}$$

Diese Schienenlänge stimmt mit den gegenwärtig üblichen Schienenlängen beinahe überein.

Für den ersten Augenblick wird es wohl Jedermann befremdend finden, dass gewisse, beinahe mässige Fahrgeschwindigkeiten gefährlicher sein können als extravagante Geschwindigkeiten, und ich muss gestehen, dass mir dieses Ergebniss der Analysis anfänglich mit der Natur der Sache so sehr im Widerspruche zu sein schien, dass ich irgend einen Rechnungsfehler begangen zu haben vermuthete. Lange suchte ich vergeblich nach diesem vermeintlichen Fehler, bewerkstelligte die Integration der Differenzialgleichung (1) Seite 148 durch verschiedene Methoden, kam aber immer zu dem gleichen Endresultate. Endlich wurde es mir klar, dass die Rechnung recht habe, dass sich das Ergebniss mit der Natur der Sache sehr wohl vertrage, und dass ähnliche Erscheinungen in sehr vielen Fällen vorkommen. Es ist nämlich nicht schwer einzusehen, dass eine vorhandene periodisch schwingende Bewegung immer heftiger und heftiger werden muss, wenn dieselbe in Zeitintervallen, die der Schwingungsperiode gleich kommen, auf gleiche Weise gestört wird. Wenn z. B. auf ein schwingendes Pendel nach jedem Schwung ein wenn auch nur schwacher Schlag ausgeübt wird, so müssen die Schwingungen zuletzt immer grösser und grösser werden. Oder wenn gegen ein im Wasser schwankendes Schiff Wellenschläge einwirken, die in Zeitintervallen aufeinander folgen, welche der Schwingungszeit des Schiffes gleich sind, so muss nothwendig das Schwanken des Schiffes zuletzt immer stärker und stärker werden. Auch in der Astronomie kommt ein merkwürdiges Beispiel vor, das hier angeführt zu werden verdient.

La Place hat zuerst gezeigt, dass die Störung, welche in der Bewegung eines Planeten A durch einen Planeten B eintritt, wesentlich von dem Verhältniss der Umlaufszeiten dieser Planeten abhängt, und dass diese Störung fort und fort zunehmen muss, wenn die Umlaufszeit des einen Planeten ein Vielfaches von der Umlaufszeit des anderen Planeten ist.

In der später folgenden Untersuchung über das Nicken und Wogen werden wir ebenfalls der Erscheinung begegnen, dass sich unter gewissen Umständen die störenden Bewegungen immer mehr und mehr anhäufen können, und es ist meine Ueberzeugung, dass darin manche in den Bewegungen der Lokomotive vorkommende Erscheinungen ihren Grund haben, und dass namentlich oftmals Axenbrüche durch Ansammlung von störenden Bewegungen geschehen mögen.

Bedingungen, bei deren Erfüllung die wankenden Bewegungen einer Lokomotive nur in einem schwachen Grade eintreten.

Aus dieser Untersuchung über die wankenden Bewegungen geht hervor, dass diese störenden Bewegungen nur in einem schwachen Grade eintreten werden, wenn folgenden Bedingungen entsprochen wird.

A) Die wankenden Bewegungen, welche die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale verursachen, fallen vermöge des Ausdruckes (7) Seite 150 klein aus:

1. Wenn die Lokomotive nur mit schwacher Kraft getrieben wird, oder nur einen verhältnissmässig kleinen Widerstand zu überwinden hat.
2. Wenn die Schubstangen im Verhältniss zum Kurbelhalbmesser sehr lang sind.
3. Wenn die Cylinder der beiden Maschinen möglichst nah neben einander liegen. Innen liegende Cylinder sind also hinsichtlich des Wankens den aussen liegenden vorzuziehen.
4. Wenn die Federn einen hohen Grad von Starrheit besitzen.
5. Wenn die parallel mit den Axen der Räder gemessene Horizontaldistanz der Federn gross ist. Hinsichtlich des Wankens ist es also besser, wenn die Federn nicht innerhalb, sondern wenn sie ausserhalb der Räder angebracht werden. Auch ist eine grosse Spurweite vortheilhaft.
6. Wenn die beim schnellsten Lauf der Lokomotive eintretende Umdrehungszeit der Triebräder kleiner ist als die Zeit einer Grundschwingung des auf den Federn liegenden Baues.

B) Die wankenden Bewegungen, welche aus den Einwirkungen der Bahn gegen die Räder entstehen, fallen klein aus.

7. Wenn der Schwerpunkt des Baues möglichst tief liegt.
8. Wenn die Federn, nach der Richtung der Triebaxe gemessen, weit auseinander angebracht sind.
9. Wenn die Federn starr sind, in welchem Fall jedoch harte Stösse eintreten, die noch nachtheiliger sind, als schwankende Bewegungen.
10. Wenn die Schienen der Bahn sehr lang sind, so dass die Zeit, welche die Lokomotive braucht, um über eine Schiene zu laufen, beträchtlich grösser ist, als die Zeit einer Grundschwingung des Baues.

Die hinsichtlich des Wankens vortheilhaften Bedingungen sind also, wenn man sie in kurzen Worten zusammenfasst: Mässige Anstrengung der Lokomotive, lange Schubstangen, kleine Kurbelhalbmesser, innen liegende Cylinder, starre aussen liegende Federn, grosse Triebräder, tief liegender Schwerpunkt, lange Bahnschienen, grosse Spurweite.

Diese Untersuchung über das Wanken hat eine reichere Ausbeute geliefert, als das Studium über das Zucken und Schlingern; noch reicher ist die Ausbeute, welche die Untersuchung über das Wogen und Nicken liefert

Bestimmung des hinsichtlich des Wankens vortheilhaftesten Durchmessers der Triebräder.

Der Ausdruck (7) Seite 150, welcher die Grösse des Wankens bestimmt, kann in eine Form gebracht werden, die über den Einfluss des Durchmessers der Triebräder auf das Wanken Aufschluss gibt.

Nennt man W den totalen Widerstand des Trains mit Einschluss des Widerstandes

der Lokomotive. D den Durchmesser eines Triebrades. V die Fahrgeschwindigkeit der Lokomotive, so ist

$$Pr = \frac{\pi}{8} D W \qquad \omega = \frac{2 V}{D}$$

Vermittelst dieser Werthe wird der Ausdruck (7), wenn man denselben zur Abkürzang mit X bezeichnet und $f_1 + f_2 + f_3 = F_1$ setzt:

$$X = \frac{\pi}{16} W \frac{e}{L} \frac{D^3}{\varepsilon^2 D^2 F_1 - 4 V^2 A} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Es entsteht nun die Frage, wie gross für eine neu zu erbauende Lokomotive, die mit einer gewissen Geschwindigkeit V zu laufen bestimmt ist, der Durchmesser D genommen werden soll, damit das Wanken X so klein als möglich ausfällt. Der Ausdruck (1) zeigt, dass X verschwindet, wenn $D = 0$ ist. Dass aber X sowohl für $D = \infty$ als auch für $D = 2 \frac{V}{\varepsilon} \sqrt{\frac{A}{F_1}}$ unendlich gross ausfällt; es muss also zwischen diesen Werthen von D ein Werth von D liegen, für welchen X ein relatives Minimum wird, d. h. es gibt einen hinsichtlich des Wankens vortheilhaftesten Durchmesser der Triebräder. Wir finden denselben, wenn wir den Differenzialquotienten $\frac{dX}{dD}$ suchen und gleich Null setzen.

Es ist nun

$$\frac{dX}{dD} = \frac{\pi}{16} W \frac{e}{L} \frac{(\varepsilon^2 D^2 F_1 - 4 V^2 A) 3 D^2 - 2 D^4 \varepsilon^2 F_1}{(\varepsilon^2 D^2 F_1 - 4 V^2 A)^2}$$

Der Zähler dieses Ausdruckes verschwindet, wenn $D = 0$, so wie auch wenn

$$D = \frac{V}{\varepsilon} \sqrt{12 \frac{A}{F_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

ist, und dies ist der hinsichtlich des Wankens vortheilhafteste Raddurchmesser. Führt man diesen Werth von D in (1) ein, so erhält man

$$X_{\text{min.}} = \frac{3 \pi}{3 2} W \frac{e V}{\varepsilon^3 F_1 L} \sqrt{\frac{12 A}{F_1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Setzt man in diese Ausdrücke (2) und (3) für A und $F_1 = f_2 + f_2 + f_3$ die Werthe, welche die Gleichungen (2) und (3) Seite 153 und 154 darbieten, so wird:

$$D = V \frac{d_1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

$$X_{\text{min.}} = \frac{6 \pi}{3 2} \frac{W}{G} \frac{e V s d_1}{\varepsilon^3 L} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

für die Lokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe ist annähernd: $s = 0 05, g = 9 \cdot 81, \frac{d_1}{\varepsilon} = 2 \cdot 5.,$ $\varepsilon = 0.7$, $e = 0 \cdot 9$ Meter, $L = 2 \cdot 2, \frac{W}{G} = \frac{1}{20}$. Für diese Werthe findet man:

$$\left.\begin{array}{l} D = 0.22\,V \\ \\ X_{\text{min.}} = \dfrac{V}{3750} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Dieser Durchmesser ist sehr gross, denn er wird schon für die sehr mässige Fahrgeschwindigkeit von 10 Meter 2·2 Meter. Allein man sieht auch aus dem Werth von X, dass dieses schwächste Wanken verschwindend klein ist.

Wir wollen sehen, wie stark das Wanken wird, wenn der Durchmesser der Triebräder von dem vortheilhaftesten Werth abweicht.

Nehmen wir

$$D = m\frac{V}{\varepsilon}\sqrt{12\frac{A}{F_1}} = m\,V\frac{d_1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{s}{g}} \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wobei m irgend eine beliebige Zahl bezeichnet. Setzt man $m = 1$, so gibt (7) den vortheilhaftesten Durchmesser.

Der das Wanken messende allgemeine Werth von X wird für diesen Werth von D

$$\left.\begin{array}{l} X = \dfrac{3\pi}{16}\dfrac{W\,e\,V}{L\,\varepsilon^3 F_1}\sqrt{12\dfrac{A}{F_1}}\,\dfrac{m^3}{3\,m^2-1} \\ \\ \text{oder} \\ \\ X = \dfrac{6\pi}{16}\dfrac{W}{G}\dfrac{e\,V\,s\,d_1}{\varepsilon^3 L}\sqrt{\dfrac{3}{2}\dfrac{s}{g}}\,\dfrac{m^3}{3\,m^2-1} \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (8)$$

Setzen wir auch hier $s = 0·05$ $g = 9·81$ $\frac{d_1}{\varepsilon} = 2·5$ $\varepsilon = 0·7$ $e = 0·9$ $L = 2·2$ $\frac{W}{G} = \frac{1}{20}$ so findet man:

$$D = 0·22\,m\,V$$

$$x = \frac{V}{1875}\,\frac{m^3}{3\,m^2-1}$$

Für	$m = 1$	0·9	0·8	0·7	0·6	$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0·577$	
wird	$\frac{D}{V} = 0·22$	0·20	0·176	0·154	0·132	0·127	
und	$\frac{m^3}{3\,m^2-1} = 0·50$	0·51	0·56	0·73	2·7	∞	

Hieraus sieht man, dass ein bedenkliches Wanken erst dann eintritt, wenn der Durchmesser des Triebrades derjenigen Grenze ganz nahe kommt, bei welcher die Umdrehungszeit des Rades mit der Zeit einer Grundschwingung zusammen trifft. Für $m = 0.6$ wird $D = 0·132\,V$ und $X = \frac{V}{694}$ und dieser Werth von X wird selbst für eine sehr grosse Geschwindigkeit von $V = 20$ nur $\frac{20}{694} = \frac{1}{34}$ d. h. die Lokomotive wankt dann nur im Winkel von 2° hin und her.

Das Wogen und Nicken.

Integration der Differenzialgleichungen, welche das Wogen und Nicken bestimmen.

Diese Differenzialgleichungen sind die beiden ersteren der Gleichungen (11) Seite 147 nämlich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} &= -m\,\zeta_1 + n\,\varphi_1 + p\,[P\sin.(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)]\\ \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} &= +m_1\,\zeta_1 - n_1\,\varphi_1 + p_1\,[P\sin(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)]\\ &\quad + \frac{1}{2}(P+P_1)\,q_1\sin.2(\alpha_0-\omega t)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(1)$$

Sowohl aus der Form dieser Gleichungen, als auch aus der Natur der Sache kann man vermuthen, dass diese Bewegungen des Nickens und Wogens aus Schwingungen bestehen werden, von denen jede einzelne entweder ein Gesetz von der Form $\mathfrak{M}\sin.\,kt$ oder ein Gesetz von der Form $\mathfrak{N}\cos.\,kt$ befolgt. Wir versuchen daher den Gleichungen (1) zu genügen, indem wir setzen:

$$\left.\begin{aligned}\zeta_1 &= \mathfrak{A}\sin.at + \mathfrak{B}\cos.at + \mathfrak{P}\sin.2(\alpha_0-\omega t) + \mathfrak{Q}\sin.(\alpha_0-\omega t) + \mathfrak{R}\cos.(\alpha_0-\omega t)\\ \varphi_1 &= \mathfrak{C}\sin.at + \mathfrak{D}\cos.at + \mathfrak{P}_1\sin.2(\alpha_0-\omega t) + \mathfrak{Q}_1\sin.(\alpha_0-\omega t) + \mathfrak{R}_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\end{aligned}\right\}\;.\;(2)$$

und es kommt nun darauf an, die Constanten $\mathfrak{A}\;\mathfrak{B}\;\mathfrak{C}\;\mathfrak{D}\;a\;\mathfrak{P}\;\mathfrak{Q}\;\mathfrak{R}\;\mathfrak{P}_1\;\mathfrak{Q}_1\;\mathfrak{R}_1$ so zu bestimmen, dass die Ausdrücke (2) die Integralien von (1) in der That darstellen können.

Differenzirt man die Ausdrücke (2) zweimal nach t und substituirt sodann die sich ergebenden Werthe von $\frac{d^2\zeta_1}{dt^2}$ $\frac{d\varphi_1}{dt^2}$, sowie auch die Werthe von ζ_1 und φ_1 in die Gleichungen (1), so erhält man folgende Beziehungen

$$\begin{aligned}&-a^2(\mathfrak{A}\sin.at+\mathfrak{B}\cos.at) - 4\,\omega^2\,\mathfrak{P}\sin.2(\alpha_0-\omega t) - \omega^2\,\mathfrak{Q}\sin.(\alpha_0-\omega t) - \omega_2\,\mathfrak{R}\cos.(\alpha_0-\omega t) =\\ &-m(\mathfrak{A}\sin.at+\mathfrak{B}\cos.at) - m\,\mathfrak{P}\sin.2(\alpha_0-\omega t) - m\,\mathfrak{Q}\sin.(\alpha_0-\omega t) - m\,\mathfrak{R}\cos.(\alpha_0-\omega t)\\ &+n(\mathfrak{C}\sin.at+\mathfrak{D}\cos.at) + n\,\mathfrak{P}_1\sin.2(\alpha_0-\omega t) + n\,\mathfrak{Q}_1\sin.(\alpha_0-\omega t) + n\,\mathfrak{R}_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\\ &\qquad + p\,P\sin.(\alpha_0-\omega t) + p\,P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\alpha^2(\mathfrak{C}\sin.at+\mathfrak{D}\cos at) - 4\,\omega^2\,\mathfrak{P}_1\sin.2(\alpha_0-\omega t) - \omega^2\,\mathfrak{Q}_1\sin.(\alpha_0-\omega t) - \omega^2\,\mathfrak{R}_1\cos.(\alpha_0-\omega t) =\\ &+m_1(\mathfrak{A}\sin.at+\mathfrak{B}\cos.at) + n_1\,\mathfrak{P}\sin.2(\alpha_0-\omega t) + m_1\,\mathfrak{Q}\sin.(\alpha_0-\omega t) + m_1\,\mathfrak{R}\cos.(\alpha_0+\omega t)\\ &-n_1(\mathfrak{C}\sin.at+\mathfrak{D}\cos.at) - n_1\,\mathfrak{P}_1\sin.2(\alpha_0-\omega t) - n_1\,\mathfrak{Q}_1\sin.(\alpha_0-\omega t) - n_1\,\mathfrak{R}_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\\ &\qquad + \frac{1}{2}\,q_1\,(P+P_1)\sin.2(\alpha_0-\omega t) + p_1\,P\sin.(\alpha_0-\omega t) + p_1\,P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\end{aligned}$$

Damit die Ausdrücke (2) die Integrale von (1) darstellen können, müssen die so eben

angeschriebenen Beziehungen für jeden Werth von t richtig sein. Diess ist der Fall, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} a^2\mathfrak{A} &= m\mathfrak{A} - n\,\mathfrak{E} \\ a^2\mathfrak{B} &= m\mathfrak{B} - n\,\mathfrak{D} \\ a^2\mathfrak{E} &= n_1\mathfrak{E} - m_1\mathfrak{A} \\ a^2\mathfrak{D} &= n_1\mathfrak{D} - m_1\mathfrak{B} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3($$

$$\left.\begin{aligned} 4\,\omega\;\mathfrak{P} &= m\,\mathfrak{P} - n\,\mathfrak{P}_1 \\ 4\,\omega^2\mathfrak{P}_1 &= n_1\mathfrak{P}_1 - m_1\mathfrak{P} - \frac{1}{2}q_1(P + P_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega^2\mathfrak{Q} &= m\,\mathfrak{Q} - n\,\mathfrak{Q}_1 - p\;P \\ \omega^2\mathfrak{Q}_1 &= n_1\mathfrak{Q}_1 - m_1\mathfrak{Q} - p_1 P \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega^2\mathfrak{R} &= m\,\mathfrak{R} - n\,\mathfrak{R}_1 - p\;P_1 \\ \omega^2\mathfrak{R}_1 &= n_1\mathfrak{R}_1 - m_1\mathfrak{R} - p_1 P_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Aus den Gleichungen (3) folgt zunächst:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} = \frac{n}{m - a^2} = \frac{n_1 - a^2}{m_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Aus der Gleichheit $\frac{n}{m - a^2} = \frac{n_1 - a^2}{m_1}$ folgt ferner:

$$a = \pm\sqrt{\frac{m + n_1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(m + n_1)^2 + n\,m_1 - m\,n_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Wir erhalten demnach für a, und wegen (7) auch für $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$, vier verschiedene Werthe, durch welche den Bedingungen (3) enthprochen werden kann. Setzen wir:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= +\sqrt{\frac{1}{2}(m + n_1) + \sqrt{\frac{1}{4}(m + n_1) + n\,m_1 - m\,n_1}} \\ a_1 &= +\sqrt{\frac{1}{2}(m + n_1) - \sqrt{\frac{1}{4}(m + n_1)^2 + n\,m_1 - m\,n_1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

so sind die vier Werthe von a:

$$+\,a_1 \quad -\,a_1 \quad +\,a_2 \quad -\,a_2$$

und es ist klar, dass den Gleichungen (1) auch dann Genüge geleistet wird, wenn man in (2) statt $\mathfrak{A}$ sin. at $+\ \mathfrak{B}$ sin. at und $\mathfrak{E}$ sin. at $+\ \mathfrak{D}$ cos. at $\Sigma(\mathfrak{A} +$ sin. at $\mathfrak{B}$ cos. at) und Σ ($\mathfrak{E}$ sin. at $+\ \mathfrak{D}$ cos. at) setzt, wobei sich Σ auf alle vier Wurzeln von a bezieht.

Bezeichnet man die Werthe der Constanten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{E}\ \mathfrak{D}$, welche den individuellen Wur-

zeln entsprechen dadurch, dass man denselben diese Wurzeln beifügt, so dass z. B. $\binom{\mathfrak{A}}{+\alpha_1}$ denjenigen Werth von $\mathfrak{A}$ bedeutet, welcher der Wurzel $+\alpha_1$ entspricht, so hat man:

$$\Sigma(\mathfrak{A}\sin.at + \mathfrak{B}\cos.at) = \binom{A}{a_1}\sin.a_1 t + \binom{\mathfrak{B}}{a_1}\cos.a_1 t + \binom{\mathfrak{A}}{a_2}\sin.a_2 t + \binom{\mathfrak{B}}{a_2}\cos.a_2 t$$

$$-\binom{\mathfrak{A}}{-a_1}\sin.a_1 t + \binom{\mathfrak{B}}{-a_1}\cos.a_1 t - \binom{\mathfrak{A}}{-a_2}\sin.\alpha_2 t + \binom{\mathfrak{B}}{-a_2}\cos.a_2 t$$

$$\Sigma(\mathfrak{C}\sin.at + \mathfrak{D}\cos.at) = \binom{\mathfrak{C}}{a_1}\sin.a_1 t + \binom{\mathfrak{D}}{a_1}\cos.a_1 t + \binom{\mathfrak{C}}{a_2}\sin.a_2 t + \binom{\mathfrak{B}}{a_2}\cos.a_2 t$$

$$-\binom{\mathfrak{C}}{-a_1}\sin.a_1 t + \binom{\mathfrak{D}}{-a_1}\cos.a_1 t - \binom{\mathfrak{C}}{-a_2}\sin.a_2 t + \binom{\mathfrak{D}}{-a_2}\cos.a_2 t$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
\binom{\mathfrak{A}}{a_1} - \binom{\mathfrak{A}}{a_1} &= \mathfrak{G}_1 \\
\binom{\mathfrak{B}}{a_1} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_1} &= \mathfrak{H}_1 \\
\binom{\mathfrak{A}}{a_2} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_2} &= \mathfrak{G}_2 \\
\binom{\mathfrak{B}}{a_2} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_2} &= \mathfrak{H}_2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

so findet man mit Berücksichtigung der Gleichung (7)

$$\left.\begin{aligned}
\binom{\mathfrak{C}}{a_1} - \binom{\mathfrak{C}}{-a_1} &= \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{A}}{a_1} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_1}\right] = \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1}\,\mathfrak{G}_1 \\
\binom{\mathfrak{C}}{a_2} - \binom{\mathfrak{C}}{-a_2} &= \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{A}}{a_2} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_2}\right] = \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}\,\mathfrak{G}_2 \\
\binom{\mathfrak{D}}{a_1} + \binom{\mathfrak{D}}{-a_1} &= \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{B}}{a_1} - \binom{\mathfrak{B}}{-a_1}\right] = \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1}\,\mathfrak{H}_1 \\
\binom{\mathfrak{D}}{a_2} + \binom{\mathfrak{D}}{-a_2} &= \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{B}}{a_2} - \binom{\mathfrak{B}}{-a_2}\right] = \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}\,\mathfrak{H}_2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (11)$$

Führt man diese Werthe in obige Summen ein, so erhält man

$$\Sigma(\mathfrak{A}\sin.a\,t + \mathfrak{B}\,a\sin.at) = (\mathfrak{G}_1\sin.a_1 t + \mathfrak{H}_1\cos.a_1 t) + (\mathfrak{G}_2\sin.a_2 t + \mathfrak{H}_2\cos.a_2 t)$$

$$\Sigma(\mathfrak{C}\sin.a\,t + \mathfrak{D}\cos.a\,t) = \frac{-m_1}{a_1^2 - m_1}(\mathfrak{G}_1\sin.a_1 t + \mathfrak{H}_1\cos.a_1 t) + \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}(\mathfrak{G}_2\sin.a_2 t + \mathfrak{H}_2\cos.a_2 t)$$

Diese Summenwerthe sind nun statt $\mathfrak{A}$ sin. at + $\mathfrak{B}$ sin at und statt $\mathfrak{C}$ sin. at + $\mathfrak{D}$ cos. at in die Gleichungen (2) zu setzen, und dadurch werden dieselben

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 = & (\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) + (\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t) \\ & + \mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q} \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R} \cos. (\alpha_0 - \omega t) \\ \varphi_1 = & \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1} (\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) + \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1} (\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t) \\ & + \mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (12)$$

Aus den Gleichungen (4) findet man ferner

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= - \frac{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) n}{m_1 n - (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1)} \\ \mathfrak{P}_1 &= - \frac{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1)(4\omega^2 - m)}{m_1 n - (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

sodann folgt aus den Gleichungen (5)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Q} &= P \frac{p(\omega^2 - n_1) - p_1 n}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \\ \mathfrak{Q}_1 &= P \frac{p_1 (\omega^2 - m) - p m_1}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

endlich geben die Gleichungen (6)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R} &= P_1 \frac{p(\omega^2 - n_1) - p_1 n}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \\ \mathfrak{R}_1 &= P_1 \frac{p_1 (\omega^2 - m) - p m_1}{m_1 n - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Die Werthe dieser Constanten können noch in anderer Weise ausgedrückt werden. Setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} f_1 + f_2 + f_3 &= F_1 \\ \Delta_1 f_1 + \Delta_2 f_2 - \Delta_3 f_3 &= F_2 \\ \Delta_1^2 f_1 + \Delta_2^2 f_2 + \Delta_3^2 f_3 &= F_3 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

so werden die Seite (147) zusammengestellten Werthe wie $m \; n \; p \; m_1 \; n_1 \; p_1 \; q_1$

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{F_1}{M} \\ n &= \frac{F_2}{M} \\ p &= \frac{r}{2LM} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{F_2}{B} \\ n_1 &= \frac{F_3}{B} \\ p_1 &= (L - \varDelta_2)\frac{r}{2LB} + \frac{rh}{BD} \\ q_1 &= \frac{r^2}{2LB}\left(1 + \frac{2h}{D}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

führt man diese Werthe in (13), (14), (15) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= -\frac{1}{4}(P + P_1)\left(\frac{r}{L}\right)^2\left(1 + \frac{2h}{D}\right)\frac{F_2 L}{F_2^2 - (4\omega^2 M - F_1)(4\omega^2 B - F_3)} \\ \mathfrak{P}_1 &= +\frac{1}{4}(P + P_1)\left(\frac{r}{L}\right)^2\left(1 + \frac{2h}{D}\right)\frac{L(4\omega^2 M - F_1)}{F_2^2 - (4\omega^2 M - F_1)(4\omega^2 B - F_3)} \\ \mathfrak{Q} &= \frac{1}{2} P \frac{r}{L} \frac{(\omega^2 B - F_3) - \left[(L - \varDelta_2) + 2h\frac{L}{D}\right]F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)} \\ \mathfrak{Q}_1 &= \frac{1}{2} P \frac{r}{L} \frac{\left[(L - \varDelta_2) + 2h\frac{L}{D}\right](\omega^2 M - F_1) - F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)} \\ \mathfrak{R} &= \frac{1}{2} P_1 \frac{r}{L} \frac{(\omega^2 B - F_3) - \left[(L - \varDelta_2) + 2h\frac{L}{D}\right]F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)} \\ \mathfrak{R}_1 &= \frac{1}{2} P_1 \frac{r}{L} \frac{\left[(L - \varDelta_2) + 2h\frac{L}{D}\right](\omega^2 M - F_1) - F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (19)$$

führt man die Werthe (17) und (18) auch in die Wurzelwerthe (9) ein, so werden dieselben

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{MB}}} \\ a_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{MB}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (20)$$

Hiemit sind nun alle nicht willkürlichen Constanten der Integrale bestimmt. Setzt man in die Ausdrücke (10), Seite 147 für φ_1 und ζ_1 die Werthe (12) und für m n m_1 n_1 die Werthe (17) und (18), so erhalten wir schliesslich für ζ und φ folgende Ausdrücke:

$$\zeta = \frac{2\,l\,h_1\,K}{D\,\pi}\,\frac{F_2}{F_2^2 - F_1\,F_3} + \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{G}_1 \sin a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos . a_1 t + \mathfrak{G}_2 \sin . a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos . a_2 t \\ + \mathfrak{P} \sin . 2\,(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q} \sin . (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R} \cos . (\alpha_0 - \omega t) \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (21)$$

$$\varphi = \frac{2\,l\,h_1\,K}{D\,\pi}\,\frac{F_1}{F_2^2 - F_1\,F_3} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1} (\mathfrak{G}_1 \sin . a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos . a_1 t) + \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1} (\mathfrak{G}_2 \sin . a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos . a_2 t) \\ + \mathfrak{P}_1 \sin . 2\,(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q}_1 \sin . (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R}_1 \cos . (\alpha_0 - \omega t) \end{array} \right\} \quad (22)$$

In diesen Ausdrücken sind $\mathfrak{G}_1$ $\mathfrak{H}_1$ $\mathfrak{G}_2$ $\mathfrak{H}_2$ die vier willkürlichen Constanten, welche die Integrale zweier Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung erfordern.

Die Ausdrücke (21) und (22) stellen die Integrale der Gleichungen (1) nur in den Fällen richtig dar, in welchen der Werth von $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{R}_1$ endlich sind, d. h. wenn die Nenner der Ausdrücke (19) nicht verschwinden. Allein die Nenner von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ verschwinden, wenn

$$F_2^2 - (4\,\omega^2 M - F_1)\,(4\,\omega^2 B - F_3) = 0$$

ist, d. h. wenn ω entweder gleich:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{MB}}}$$

oder wenn ω gleich

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{BM}}}$$

d. h. die Nenner von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ verschwinden, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω entweder gleich $\frac{a_1}{2}$ oder gleich $\frac{a_2}{2}$ ist. Die Nenner von $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{R}_1$ verschwinden dagegen, wenn

$$F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)\,(\omega^2 M - F_3) = 0$$

ist, d. h. wenn ω entweder gleich:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{MB}}}$$

oder wenn die Winkelgeschwindigkeit ω gleich

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{M} + \frac{F_3}{B}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{F_1}{M} - \frac{F_3}{B}\right)^2 + \frac{F_2^2}{MB}}}$$

d. h. wenn die Winkelgeschwindigkeit ω entweder gleich a_1 oder gleich a_2 ist.

Die Gleichungen (21) und (22) stellen also nur dann die Integrale der Differenzial-Gleichungen (1) dar, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω mit keinem der vier Werthe

$$\frac{1}{2}\,a_1 \qquad \frac{1}{2}\,a_2 \qquad a_1 \qquad a_2$$

zusammentrifft. Es gibt also hinsichtlich des Nickens und Wogens vier Ausnahmsfälle, in welchen die hypothetischen Annahmen (2) nicht mehr zulässig sind. Wenn wir diese Ausnahmsfälle vollständig analytisch behandeln wollten, so müssten wir uns neuerdings in ein Gewühle von Formeln stürzen. Diese Arbeit können wir uns aber ersparen, denn es ist mit Sicherheit anzunehmen, dass in den Integralen, welche die Bewegungen φ und ζ in jedem dieser vier Ausnahmsfälle darstellen, Glieder von der Form

$$t\left[\mathfrak{M} \sin.(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{N} \cos.\alpha_0 - \omega t\right]$$

vorkommen würden. Dass also in jedem dieser vier Ausnahmsfälle Schwingungen eintreten, die mit der Zeit t immer grösser und grösser werden müssten.

Interpretation der Integrale (21) (22). Die Gesetze des Wogens und Nickens.

Vorausgesetzt, dass die Winkelgeschwindigkeit ω der Triebaxe mit keinem der vier Werthe a_1 a_2 $\frac{1}{2} a_1$ $\frac{1}{2} a_2$ übereinstimmt, besteht, wie aus den Gleichungen (21) und (22) zu ersehen ist, sowohl das Wogen als auch das Nicken aus sieben einfachen periodisch wiederkehrenden Schwingungen, wie sie durch Kurbelmechanismen hervorgebracht werden können, und die ganze totale Bewegung bleibt stets innerhalb gewisser Grenzen. Da die Werthe von t, welche gleiche Werthe von ζ geben, mit den Werthen von t, die gleiche Werthe von φ geben, nicht übereinstimmen, so kommen in der ganzen Bewegungsdauer der Lokomotive zwei gleiche Lagerungen oder zwei gleiche Bewegungszustände nicht vor. Jede einzelne von den vier Elementarschwingungen erreicht ihren numerisch grössten oder kleinsten Werth, wenn der ihr entsprechende Sinus oder Cosinus + oder — Eins wird. Die Schwingungslängen der einzelnen Elementarschwingungen sind:

$$2\,\mathfrak{G}_1 \quad 2\,\mathfrak{H}_1 \quad 2\,\mathfrak{G}_2 \quad 2\,\mathfrak{H}_2 \quad 2\,\mathfrak{P} \quad 2\,\mathfrak{Q} \quad 2\,\mathfrak{R}$$

$$2\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\mathfrak{G}_1 \qquad 2\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\mathfrak{H}_1 \qquad 2\frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\mathfrak{G}_2 \qquad 2\frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\mathfrak{H}_2$$

$$2\,\mathfrak{P}_1 \qquad 2\,\mathfrak{Q}_1 \qquad 2\,\mathfrak{R}_1$$

Die Schwingungszeiten sind

$$\frac{2\pi}{a_1} \quad \frac{2\pi}{a_2} \quad \frac{2\pi}{\omega} \quad \frac{\pi}{\omega}$$

Diese 14 Elementarschwingungen können in 2 Klassen eingetheilt werden, die wir Grundschwingungen und Kurbelschwingungen nennen wollen.

Die Grundschwingungen werden durch die Glieder

$$\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t \qquad \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t \qquad \mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t \qquad \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t$$

$$\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t \qquad \frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t \qquad \frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t \qquad \frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t$$

bestimmt. Sie sind, weil ω in den Ausdrücken (20) für a_1 und a_2 nicht vorkommt, un-

abhängig von der Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe, erfolgen also immer in der gleichen Weise wie auch die Geschwindigkeit der Lokomotive sein mag, und richten sich nun allein nach den Werthen von F_1 F_2 F_3 M und B, d. h. nach der Anordnung des Feder-Systems und nach der Grösse und Vertheilung der Massen des Baues. Diese Grundschwingungen treten allein auf, wenn die Lokomotive, ohne vom Dampf getrieben zu werden, bloss durch ihre Trägheit auf der Bahn fortläuft. Ueber die Schwingungslängen dieser Grundschwingungen kann uns leider unsere Theorie keinen Aufschluss geben. Die durchgeführten Rechnungen gelten nur allein für den Beharrungszustand der Bewegung, denn wir haben die Integrationen nur für den Fall, dass ω constant ist, bewerkstelliget. Die Werthe der vier Constanten $\mathfrak{G}_1$ $\mathfrak{H}_1$ $\mathfrak{G}_2$ $\mathfrak{H}_2$ könnten aber nur dann bestimmt werden, wenn man die Rechnung für die Periode des Anlaufes anlegte, was nicht geschehen ist, weil die Bewegungen während des Anlaufes so komplizirt sind, dass sie nur durch ein wahres Gewühl von Formeln ausgedrückt werden könnten.

Die Kurbelschwingungen, welche durch die Glieder

$$\mathfrak{P} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \qquad \mathfrak{Q} \sin. (\alpha_0 - \omega t) \qquad \mathfrak{R} \cos. (\alpha_0 - \omega t)$$

$$\mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \qquad \mathfrak{Q}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) \qquad \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)$$

ausgedrückt werden, entstehen durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale und durch die auf den Rahmenbau einwirkenden Horizontalkräfte. Ihre Schwingungsgrössen $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}_1$ hängen, wie die Ausdrücke (19) zeigen, von allen wesentlichern Construktionsverhältnissen der Lokomotive, sowie auch von der Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe ab. Die Schwingungszeiten dieser Schwingungen richten sich aber nur allein nach der Winkelgeschwindigkeit der Triebaxe. Wenn diese Schwingungen allein vorhanden wären, würde die Lokomotive nach jeder Umdrehung der Triebaxe in die gleiche Lage und auch in den gleichen Bewegungszustand zurückkehren. Läuft eine Lokomotive schnell und hat sie kleine Triebräder, so folgen diese Schwingungen schnell auf einander. Läuft eine Lokomotive langsam und hat sie grosse Triebräder, so folgen diese Schwingungen langsam aufeinander, während die Grundschwingungen immer in gleicher Weise fortgehen, wie auch die Lokomotive laufen mag.

In der Weise, wie so eben dargestellt wurde, erfolgt aber die Bewegung der Lokomotive nur dann, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω keinem der vier Werthe a_1 a_2 $\frac{1}{2} a_1$ $\frac{1}{2} a_2$ gleich kommt, d. h. nur dann, wenn die Umdrehungszeit $\frac{2\pi}{\omega}$ verschieden ist von den Schwingungszeiten $\frac{2\pi}{a_1}$ $\frac{2\pi}{a_2}$ $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}a_1}$ $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}a_2}$ der Grundschwingungen. Stimmt dagegen die Umdrehungszeit der Triebaxe mit der Schwingungszeit von einer oder von der andern der vier Grundschwingungen überein, so wird das Wogen und Nicken nicht mehr durch die Gleichungen (21) (22) Seite 164, sondern durch Gleichungen ausgedrückt, in welchen Glieder vorkommen, die die Zeit t als Faktor enthalten. Der Bewegungszustand bleibt daher in diesem Falle nicht innerhalb gewisser Grenzen, sondern er nimmt mit der Zeit immer mehr und mehr zu, so dass zuletzt ein äusserst drohender Zustand eintreten kann. Es gibt also hinsichtlich des Wogens und Nickens vier gefährliche Geschwindigkeiten, bei welchen ein stets wachsendes Ansammeln der Schwingungen eintritt. Diese vier gefährlichen Winkelgeschwindigkeiten sind:

$$a_1 \qquad a_2 \qquad \frac{1}{2} a_1 \qquad \frac{1}{2} a_2$$

Damit also bei keiner von den Winkelgeschwindigkeiten, mit denen man eine Lo-

komotive laufen lassen will, ein gefährlicher Zustand eintreten könne, muss der kleinste von den vier Werthen $\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{a}_2$ $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_1$ $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_2$ grösser sein, als die grössten der Winkelgeschwindigkeiten, mit der man die Lokomotive noch laufen lassen will. Nennt man $\mathfrak{a}_0$ den kleinsten der vier Werthe $\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{a}_2$ $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_1$ $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_2$ V die grösste Laufgeschwindigkeit der Lokomotive, D den Durchmesser des Triebrads, so ist $\frac{V}{\frac{1}{2}D} = \frac{2V}{D}$ die grösste Winkelgeschwindigkeit. Damit also die Lokomotive ohne Gefahr mit jeder Geschwindigkeit, die zwischen o und V liegt, laufen kann, muss:

$$\mathfrak{a}_0 > 2\frac{V}{D}$$

oder

$$D > 2\frac{V}{\mathfrak{a}_0}$$

sein. Und umgekehrt kann eine Lokomotive, deren Triebräder einen Durchmesser D haben, ohne Gefahr mit jeder Geschwindigkeit laufen, die kleiner als $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_0 D$ ist.

Die grösste von den gefährlichen Winkelgeschwindigkeiten ist $\mathfrak{a}_1$. Denken wir uns, dass eine Lokomotive durch einen äusserst energischen Antrieb glücklich die grösste von den gefährlichen Geschwindigkeiten überschritten habe, und dass von da an ihre Geschwindigkeit noch fort und fort wachse, so zeigen die Ausdrücke (19), dass das Wogen und Nicken fort und fort schwächer wird und zuletzt bei einer ganz rasenden Geschwindigkeit beinahe verschwindet, denn betrachten wir ω als eine beinahe unendlich grosse Grösse, so nähern sich die Werthe der Ausdrücke immer mehr und mehr folgenden Werthen:

$$\mathfrak{P} = +\frac{1}{4}(P+P_1)\left(\frac{r}{L}\right)^2 \frac{L F_2}{16\,\omega^4 M B}$$

$$\mathfrak{P}_1 = -\frac{1}{4}(P+P_1)\left(\frac{r}{L}\right)^2 \frac{L}{4\,\omega^2 B}\left(1+\frac{2h}{D}\right)$$

$$\mathfrak{Q} = -\frac{1}{2}P\left(\frac{r}{L}\right)\frac{1}{\omega^2 M}$$

$$\mathfrak{Q}_1 = -\frac{1}{2}P\left(\frac{r}{L}\right)\frac{L-\varDelta_2+2h\frac{L}{D}}{\omega^2 B}$$

$$\mathfrak{R} = -\frac{1}{2}P_1\left(\frac{r}{L}\right)\frac{1}{\omega^2 M}$$

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{1}{2}P_1\left(\frac{r}{L}\right)\frac{(L-\varDelta_2)+2h\frac{L}{D}}{\omega^2 B}$$

die mit dem Wachsen von ω immer mehr und mehr abnehmen und für unendliche Werthe von ω ganz verschwinden. Es wird demnach jede Lokomotive, wie sie auch

gebaut sein mag, bei extravaganter Geschwindigkeit weder ein Wanken noch ein Nicken noch ein Wogen zeigen, sondern sie wird starr aufrecht stehend fortrasen. Wenn sich also eine Lokomotive bei extravaganter Geschwindigkeit starrsinnig verhält, so darf man daraus nicht folgern, dass ihre Bauart eine stabile sei. Bei Probefahrten, die man in England mit *Crampton*'schen Lokomotiven angestellt hat, ist man mit Geschwindigkeiten von 120 Kilometer per 1 Stunde oder mit 33 Meter in der Sekunde, also ungefähr 3 mal so schnell als ein schneller Güterzug gefahren, und dabei war ein Wanken, Wogen oder Nicken kaum zu bemerken oder zu spüren. Die englischen Ingenieure zogen aus diesem Verhalten der Lokomotive den Schluss, dass ihre Bauart eine bewundernswürdige Stabilität gewähre. Dieser Schluss ist ein Fehlschluss, spricht aber dessen ungeachtet eine Wahrheit aus. Er ist ein Fehlschluss, weil sich ein so günstiges Verhalten bei einer Geschwindigkeit, die (wie sich in der Folge zeigen wird) beträchtlich grösser ist, als die grösste von den gefährlichen Geschwindigkeiten, auch bei einer hinsichtlich der Stabilität der Bewegung ganz verfehlt erbauten Lokomotive zeigen würde. Er spricht eine Wahrheit aus, weil diese Lokomotive von *Crampton*, wie wir in der Folge sehen werden, in der That in Bezug auf Stabilität vortrefflich angeordnet ist. Hätte man bei den Probefahrten durch längere Zeit eine Geschwindigkeit von nur 16 Meter eintreten lassen, so würde die Maschine so unruhige Bewegungen gezeigt haben, dass die Herren Ingenieure das Urtheil gefällt hätten: dass diese Lokomotive keine Stabilität besitze

Schwächung und Aufhebung der Bewegungen des Nickens und Wogens.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass die Kenntniss der Bedingungen, bei deren Erfüllung die störenden Bewegungen entweder gar nicht oder nur in einem schwachen Grad eintreten, für den Lokomotivbau von grösster Wichtigkeit ist. Dies weiss auch die Praxis, und das Bestreben der Construkteure ist gegenwärtig vorzugsweise dahin gerichtet, die Lokomotive in solcher Weise zu bauen, dass sie sicher und ruhig über das Geleise hinrollen, denn von der Erreichung dieses Zieles wird es abhängen, in welchem Maasse die Fahrgeschwindigkeiten auf Eisenbahnen gesteigert werden können. Ueber diesen wichtigen Gegenstand geben uns die durch das Studium über das Wogen und Nicken gewonnenen Resultate die wünschenswerthesten Aufschlüsse.

Wenn es möglich wäre, die störenden Kurbelschwingungen ganz aufzuheben, so würden auch die Grundschwingungen verschwinden, und es würden dann die Werthe von ζ und φ entweder constant oder gleich Null sein. Allein diese Kurbelschwingungen können nicht alle aufgehoben werden, weil es nicht möglich ist, die Zähler sämmtlicher Brüche der Ausdrücke (19) Seite 163 zum Verschwinden zu bringen, und gleichzeitig die Nenner gegen das Nullwerden zu schützen. Eine vollständige Vertilgung dieser Schwingungen ist daher nicht möglich; man muss sich also mit dem Erreichbaren begnügen, d. h. man muss suchen die Werthe von ζ und φ [Gleichungen (21) und (22) Seite 164] möglichs klein zu machen.

Die von der Zeit unabhängigen Glieder der Ausdrücke 21 und 22 werden klein, wenn h_1 klein ist. Damit die periodischen Glieder dieser Ausdrücke möglichst kleine numerische Werthe erhalten, müssen die Werthe von $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{S}_1$ $\mathfrak{R}_1$ möglichst geschwächt werden. Zu diesem Zwecke nehmen wir zunächst an

$$F_2 = 0 \qquad L - \Delta_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dann werden die Ausdrücke (19) Seite 163

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= 0 \\
\mathfrak{Q} &= +\frac{1}{2}\,P\left(\frac{r}{L}\right)\frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
\mathfrak{R} &= +\frac{1}{2}\,P_1\left(\frac{r}{L}\right)\frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
\mathfrak{P}_1 &= +\frac{1}{4}(P + P_1)\left(\frac{r}{L}\right)^2\left(1 + \frac{2h}{D}\right)\frac{L}{-4\omega^2 B + F_3} \\
\mathfrak{Q}_1 &= +P\,\frac{r}{D}\,\frac{h}{-\omega^2 B + F_3} \\
\mathfrak{R}_1 &= +P_1\,\frac{r}{D}\,\frac{h}{-\omega^2 B + F_3}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Den Werth von $\mathfrak{P}_1$ können wir füglich von nun an ganz unberücksichtigt lassen; denn für die Bewegung durch die Quadranten, in welchen die Richtungen der Kolbenbewegungen übereinstimmen, ist, wie schon Seite (148) bemerkt wurde, $P + P_1$ gleich Null; verschwindet also $\mathfrak{P}_1$ gänzlich, und für die beiden andern Quadranten ist $\mathfrak{P}_1$ sehr klein, weil es, wie man sieht, dem Quadrat von $\frac{r}{L}$ proportional ist. Wir wollen also $\mathfrak{P}_1$ von nun an ganz unberücksichtigt lassen.

Nennen wir W den totalen Widerstand des Trains, so ist im Beharrungszustand der Bewegung

$$P = P_1 = \frac{\pi}{8}\,W\,\frac{D}{r}$$

durch Einführung dieser Werthe von P und P_1 in (2) werden diese Ausdrücke für $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}_1$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{Q} &= +\frac{\pi}{16}\,W\,\frac{D}{L}\,\frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
\mathfrak{R} &= +\frac{\pi}{16}\,W\,\frac{D}{L}\,\frac{1}{-\omega^2 M + F_1} \\
\mathfrak{Q}_1 &= +\frac{\pi}{8}\,W\,\frac{h}{-\omega^2 B + F_3} \\
\mathfrak{R}_1 &= +\frac{\pi}{8}\,W\,\frac{h}{-\omega^2 B + F_3}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Aus diesen Ausdrücken kann man nun leicht herauslesen, was zu thun ist, um die Werthe von $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}_1$ noch weiter zu schwächen, als es schon durch die Annahmen (1) geschehen ist. Die numerischen Werthe der Ausdrücke (2) und (3) fallen klein aus, 1) wenn W klein ist, d. h. wenn die Lokomotive nur einen geringen Widerstand zu überwinden hat; 2) wenn $\frac{D}{L}$ klein ist, d. h. wenn die Schubstangen im Verhältniss zum

Durchmssser der Triebräder lang sind; 3) wenn sowohl der absolute Werth von h als auch das Verhältniss $\frac{2h}{D}$ klein ist, d. h. wenn die Höhe des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues über der Axe des Triebrades klein ist und wenn überdies diese Höhe im Verhältniss zum Durchmesser des Triebrades einen kleinen Werth hat; 4) wenn F_1 so gross ist, dass die Differenz $F_1 - \omega^2 M$ selbst für die grössten zulässigen Werthe von ω gross ausfällt; 5) wenn F_3 so gross ist, dass die Differenz $F_3 - \omega^2 B_1$ selbst für die grössten noch zulässigen Werthe von ω sehr gross ausfällt. Diese 5 Bedingungen und die zuerst angegebenen, dass 6) h_1 klein, dass 7) $F_2 = 0$ und dass 8) $L - \varDelta_2 = 0$ sein soll, müssen also erfüllt werden, damit das Nicken und Wogen nur in einem schwachen Grade eintritt.

Wir wollen diese acht Bedingungen näher betrachten, um ihre Bedeutung vollständig kennen zu lernen.

Die Bedingung 1) dass W klein sein soll, sagt aus, dass jede Lokomotive nur ein schwaches Nicken und Wogen zeigen wird, wenn sie nur einen kleinen Widerstand zu überwinden hat. Diess ist auch leicht einzusehen, denn wenn der Widerstand W klein ist, werden auch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale und die Pressungen der Triebaxe gegen die Axengabeln kleine Werthe haben; diese Pressungen sind es aber vorzugsweise, welche das Nicken und Wogen verursachen.

Die Bedingung 2) dass nämlich $\frac{D}{L}$ klein sein soll, sagt aus, dass die Schubstangen im Verhältniss zu dem Durchmesser der Triebräder lang sein sollen. Dieser Anforderung könnte man allerdings auch durch kleine Triebräder entsprechen, allein wir werden bald sehen, dass kleine Triebräder gefährlich sind, das Verhältniss $\frac{D}{L}$ soll also selbst für die durchaus nothwendigen grossen Triebräder klein ausfallen, was nur durch verhältnissmässig lange Schubstangen möglich ist.

Die Bedingungen 3) und 6) dass nämlich h und h_1 möglichst klein, d. h. wo möglich gleich Null sein sollen, sagen aus, dass der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues, die Triebaxe und die Zusammenhängung der Lokomotive mit dem Tender in einer und derselben horizontalen Ebene liegen sollen, oder mit andern Worten, dass der Schwerpunkt des Baues und der Zusammenhängungspunkt in der Höhe der Axe der Triebräder liegen soll. Dass diese Bedingung eine wesentliche ist, kann man leicht einsehen, denn wenn dieselbe erfüllt ist, liegen alle auf den Rahmenbau einwirkenden Horizontalkräfte in der durch den Schwerpunkt des Baues gehenden Horizontalebene, können also nur eine Fortbewegung, aber keine Drehung um die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe hervorbringen, oder die Horizontalkräfte verursachen keine nickende Bewegung, wenn h und h_1 gleich Null sind. Die Mehrzahl der Construkteure hat sich bereits für eine niedrige Lage des Schwerpunktes ausgesprochen, allein dieser Ausspruch ist insofern ein unbestimmter, als damit nicht bestimmt gesagt ist, ob die Höhe des Schwerpunktes über der Bahn, oder die Höhe des Schwerpunktes über der Triebaxe gemeint ist. Unsere trocknen Formeln sagen aber aus, dass es hinsichtlich des Nickens nicht auf die Höhe des Schwerpunktes über der Bahn, sondern nur allein auf die Höhe des Schwerpunktes über der Triebaxe ankommt.

Die Bedingung 4) dass F_1 möglichst gross sein soll, kann leicht durch Worte ausgesprochen werden. Es ist nämlich $F_1 = f_1 + f_2 + f_3$ Seite (162), woraus hervorgeht, dass die Federn sehr starr sein sollen. Die Aufhebung oder Schwächung der störenden Schwingungen durch Anwendnng von starren Federn ist aber ein fehlerhaftes Mittel, weil dadurch harte erschütternde Einwirkungen der Bahn hervorgerufen werden, gegen welche man sich durch die Federn schützen will. Eine Lokomotive hat nur dann einen zweck-

mässig angeordneten Bau, wenn sie selbst mit verhältnissmässig weichen Federn keine gaukelnden Bewegungen zeigt.

Die Bedingung 7) dass $F_2 = 0$ sein soll, kann auch leicht mit Worten ausgedrückt werden. Es ist nämlich Seite (162) $F_2 = f_1 \Delta_1 + f_2 \Delta_2 - f_3 \Delta_3$ gesetzt worden. Es soll also $f_1 \Delta_1 + f_2 \Delta_2 - f_3 \Delta_3 = 0$ sein. Diese Beziehung sagt aber aus, wie schon Seite (142) erklärt wurde, dass im ruhenden Zustand der Lokomotive alle Federn durch den auf denselben liegenden Bau um gleich viel zusammengedrückt sein sollen.

Nennt man $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{P}_3$ die Belastungen der drei Axen der Lokomotive, s die Zusammendrückung jeder der sechs Federn, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P}_1 = 2 f_1 s \qquad \mathfrak{P}_2 = 2 f_2 s \qquad \mathfrak{P}_3 = 2 f_3 s \\ G = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Multiplizirt man die Gleichung $f_1 \Delta_1 + f_2 \Delta_2 - f_3 \Delta_3 = 0$ mit $2s$ und berücksichtiget die Werthe (4) so kann dieselbe auch geschrieben werden wie folgt:

$$\mathfrak{P}_1 \Delta_1 + \mathfrak{P}_2 \Delta_2 - \mathfrak{P}_3 \Delta_3 = 0 \qquad (5)$$

Diese Gleichungen (4) und (5) leisten für die Anordnung der Axenstellung und der Federnwerke wesentliche Dienste.

Wenn ein Lokomotivbau angeordnet werden soll, wird anzugeben sein: 1) $\mathfrak{G}$ das Gewicht des auf den Axen liegenden Baues; 2) die Pressung $\mathfrak{P}_1$ auf die Vorderaxe; 3) die Pressung auf die Triebaxe; 4) die Zusammendrückung s der Federn im ruhigen Zustand der Lokomotive. Mit diesen Daten findet man zunächst aus (4) die Starrheits-Coeffizienten der Federn, nämlich:

$$f_1 = \frac{G - \mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_3}{2 s} \qquad f_2 = \frac{\mathfrak{P}_2}{2 s} \qquad f_3 = \frac{\mathfrak{P}_3}{2 s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

und die Gleichung (5) liefert dann eine Beziehung, durch welche die Position eine der drei Axen gegen den Schwerpunkt bestimmt werden kann, wenn die Position der beiden andern Axen gegeben sind.

Die Bedingung 5) dass F_3 möglichst gross sein soll, kann ebenfalls mit Worten ausgedrückt werden. Es ist nämlich $F_3 = f_1 \Delta_1^2 + f_2 \Delta_2^2 + f_3 \Delta_3^2 \cdot$ Setzen wir voraus, dass im ruhenden Zustand der Lokomotive alle Federn gleich stark zusammengedrückt sind, so ist vermöge (4)

$$F_1 = \frac{\mathfrak{P}_1}{2s} \qquad F_2 = \frac{\mathfrak{P}_2}{2s} \qquad F_3 = \frac{\mathfrak{P}_3}{2s}$$

der Werth von F_3 wird demnach

$$F_3 = \frac{\mathfrak{P}_1 \Delta_1^2 + \mathfrak{P}_2 \Delta_2^2 + \mathfrak{P}_3 \Delta_3^2}{2s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Der Werth von F_3 fällt also, wie man aus diesem Ausdruck ersieht, möglichst gross aus, wenn sowohl die vordere als auch die hintere Axe möglichst weit vom Schwerpunkt entfernt gestellt wird, und wenn diese zwei Axen möglichst stark belastet werden. Am besten ist es also in dieser Hinsicht, in der Mitte der Lokomotive gar keine Axe anzu-

bringen, und die Vorder- und Hinteraxe weit auseinander zu stellen, oder kurz gesagt: Weite Radstellung, keine Mittelaxe! oder jedenfalls nur eine schwach belastete Mittelaxe.

Bei Personenlokomotiven sollen also die Triebräder, welche jederzeit eine ansehnliche Belastung erfordern, niemals in der Mitte, sondern an den Enden angebracht werden. Allein da die Triebräder immer eine bedeutende Grösse erhalten müssen, und grosse Vorderräder leicht ausgleisen, so sollen die Triebräder der Personenlokomotive nur an der hinteren Axe der Lokomotive angebracht werden.

Die Bedingung 8) dass $L - \Delta_2 = 0$ oder dass $L = \Delta_2$ sein solle, ist von grosser Wichtigkeit, denn sie bestimmt die richtige Position der Dampfcylinder. Es ist Δ_2 der Horizontalabstand des Schwerpunktes von der Triebaxe, L die Länge der Schubstange. $L = \Delta_2$ sagt demnach aus, dass die mittlere Position der Gleitstücke (d. h. diejenige Position der Gleitstücke, in welcher sie sich befinden, wenn die Kolben auf halbem Schub stehen) in die Vertikalebene fallen sollen, die quer durch den Schwerpunkt des Baues gelegt werden kann. Es ist also, wie man sieht, nicht gleichgiltig, wo man die Cylinder anbringt, sondern es wird ihnen durch unsere trocknen Formeln eine ganz bestimmte Position angewiesen; und diess ist auch sehr natürlich. Denn offenbar werden die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale ein möglichst schwaches Nicken veranlassen, wenn sich die Gleitstücke so wenig als möglich von der quer durch den Schwerpunkt gehenden Vertikalebene entfernen, diess ist aber dann der Fall, wenn die mittlere Position der Gleitstücke in diese Schwerpunktsebene fällt.

Untersuchen wir nun ferner noch, unter welchen Umständen $F_1 > \omega^2 M$ und $F_3 > \omega^2 B$ wird.

Nennen wir V die Fahrgeschwindigkeit, D den Durchmesser eines Triebrades, so ist $\omega = 2\frac{V}{D}$. Es soll daher:

$$F_1 > \left(2\frac{V}{D}\right)^2 M \quad \text{und} \quad F_3 > \left(2\frac{V}{D}\right)^2 B$$

oder

$$D > 2V\sqrt{\frac{M}{F_1}} \quad \text{und} \quad D > 2V\sqrt{\frac{B}{F_3}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (8)$$

sein.

Setzen wir voraus, dass im ruhenden Zustand der Lokomotive alle Federn gleich stark zusammengedrückt sind, so ist:

$$F_1 = \frac{\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3}{2s} = \frac{G}{2s}$$

$$F_3 = \frac{\Delta_1^2\,\mathfrak{P}_1 + \Delta_2^2\,\mathfrak{P}_2 + \Delta_3^2\,\mathfrak{P}_3}{2s}$$

$$F_2 = \frac{\Delta_1\,\mathfrak{P}_1 + \Delta_2\,\mathfrak{P}_2 - \Delta_3\,\mathfrak{P}_3}{2s} = 0$$

Aus diesen Ausdrücken findet man:

$$F_3 = \frac{1}{2s}\left[G\,\Delta_1\,\Delta_3 + \mathfrak{P}_2\,\frac{\Delta_1\,\Delta_2\,(\Delta_2 - \Delta_1) - \Delta_1\,\Delta_3\,(\Delta_1 + \Delta_3) + \Delta_2\,\Delta_3\,(\Delta_2 + \Delta_3)}{\Delta_1 + \Delta_3}\right]$$

Die Bedingungen (8) können demnach geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} D &> 2V\sqrt{2s\frac{M}{G}} \\ D &> 2V\sqrt{2s\frac{B(\Delta_1+\Delta_3)}{(G-\mathfrak{P}_2)(\Delta_1+\Delta_3)\Delta_1\Delta_3+\mathfrak{P}_2(\Delta_2-\Delta_1)\Delta_1\Delta_2+\mathfrak{P}_2(\Delta_2+\Delta_3)\Delta_2\Delta_3}} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Für numerische Berechnungen ist es nothwendig, das als Masse ausgedrückte Trägheitsmoment B des Baues zu bestimmen. Denken wir uus, dass man in einem parallelepipedischen Raum die Masse $\frac{G}{2g}$ ganz gleichförmig vertheile, so ist es immer möglich, die Dimensionen dieses Parallelepipeds so zu wählen, dass das Trägheitsmoment desselben mit dem wahren Trägheitsmoment B genau übereinstimmt. Nennen wir h_2 die Höhe, l_2 die mit der Längenrichtung der Lokomotive parallele Dimension des Parallelepipeds, so ist bekanntlich das Trägheitsmoment desselben $\frac{G}{2g}\frac{1}{12}(l_2^2+h_2^2)$ Wir können daher schreiben:

$$B = \frac{G}{2g}\frac{1}{12}(l_2^2+h_2^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Wäre B und G bekannt, so würde man vermittelst dieses Ausdruckes die Dimensionen l_2 und h_2 leicht so bestimmen können, dass das Trägheitsmoment des Parallelepipeds mit dem Trägheitsmoment des wirklichen Baues übereinstimmt. Allein B ist eben nicht bekannt, sondern nur G, und es handelt sich darum, l_2 und h_2 so zu wählen, dass $\frac{G}{2g}\frac{1}{12}(l_2^2+h_2^2)$ dem wahren Trägheitsmoment B gleich wird. Wir werden wohl keinen erheblichen Fehler begehen, wenn wir für l_2 die totale Länge des Kessels, und für h_2 den Durchmesser des Röhrenkessels in Rechnung bringen.

Setzt man in den ersten der Ausdrücke (9) für M seinen Werth $\frac{G}{2g}$ und in den zweiten für B obigen Werth (10) so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} D &> 2V\sqrt{\frac{s}{g}} \\ D &> 2V\sqrt{\frac{s}{g}\cdot\frac{1}{12}\frac{(l_2^2+h_2^2)(\Delta_1+\Delta_3)G}{(G-\mathfrak{P}_2)(\Delta_1+\Delta_3)\Delta_1\Delta_3+\mathfrak{P}_2(\Delta_2-\Delta_1)\Delta_1\Delta_2+\mathfrak{P}_2(\Delta_2+\Delta_3)\Delta_2\Delta_3}} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Den Bedingungen $F_1 > \omega^2 M$ und $F_3 > 4\omega^2 B$ wird demnach entsprochen, wenn der Durchmesser eines Triebrades grösser genommen wird, als der grössere von den zwei Werthen, welche die Ausdrücke (11) bestimmen.

Wir wollen sehen, wie gross nach dieser Regel die Triebräder einer *Stephenson'shen* und einer *Crampton'schen* Lokomotive werden müsste.

Bei der Personenlokomotive von *Stephenson* liegt die Triebaxe immer nahe, bisweilen sogar ganz genau unter dem Schwerpunkt des Baues. Wir wollen das Letztere annehmen, setzen daher $\Delta_2 = 0$. Die Belastung $\mathfrak{P}_2$ der Triebräder beträgt bei dieser Lokomotive in der Regel 0.44 vom Gewicht des Baues. Wir setzen daher $\mathfrak{P}_2 = 0.44\,G$. Der Durchmesser des Röhrenkessels ist ungefähr um $\frac{1}{5}$ von der totalen Länge, es ist also h_2 ungefähr $\frac{1}{5}l_2$ und h_2^2 gleich $\frac{1}{25}l_2^2$, wir dürfen

uns also erlauben h_2^2 gegen l_2^2 zu vernachlässigen. Die beiden Tragaxen sind vom Schwerpunkt nahe gleich weit entfernt. Wir dürfen also $\Delta_1 = \Delta_3 = \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2}$ setzen. Mit dieser die Personenlokomotive von *Stephenson* charakterisirenden Annahmen werden die Ausdrücke (11)

$$\left.\begin{aligned} D &> 2\,V\sqrt{\frac{s}{g}} \\ D &> 1{,}5\,V\frac{l_2}{\Delta_1+\Delta_3}\sqrt{\frac{s}{g}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Der Durchmesser des Triebrades muss also um so grösser sein, je grösser die grösste Fahrgeschwindigkeit und je kleiner der Radstand $\Delta_1 + \Delta_3$ im Verhältniss zur Länge des Baues ist.

Bei einer von *Stephenson* erbauten Lokomotive beträgt die Total-Kessellänge 6 Meter und der Radstand 3.55 Meter. Die Zusammendrückung s der Federn ist nie kleiner als 0.04 Meter. Mit diesen Daten gibt der erste der Ausdrücke (12)

$$D > 0{\cdot}13\,V \text{ und } V < 8\,D$$

gibt dagegen der zweite der Ausdrücke 12 (13)

$$D > 0.18\,V \text{ und } V < 5{\cdot}6\,D$$

Die grösste Fahrgeschwindigkeit dieser Lokomotive von *Stephenson* soll also nach dieser Rechnung kleiner als 5.6 D sein. Sie wird, wenn man Triebräder von D = 2 Meter Durchmesser annimmt, nun $2 \times 5{\cdot}6 = 11{\cdot}2$ Meter.

Für eine Personenzug-Lokomotive nach dem System von *Crampton* haben wir folgende Annahmen zu machen.

Wir haben unserer Untersuchung eine Lokomotive zu Grunde gelegt, bei welcher die Triebaxe um Δ_2 und eine Tragaxe um Δ_1 hinter dem Schwerpunkt, die zweite Trag-Axe dagegen um Δ_3 vor dem Schwerpunkte liegt. In der Lokomotive von *Crampton* sind die Entfernungen des Schwerpunktes von der hinter der Feuerbüchse angebrachten Trieb-Axe und von der vordersten Tragaxe gleich gross, wir müssen also $\Delta_2 = \Delta_3$ setzen. Hinter dem Schwerpunkt kommt keine Tragaxe vor, wohl ist aber eine solche genau unter dem Schwerpunkt angebracht; wir müssen also $\Delta_1 = 0$ setzen. Die Belastung der Triebaxe ist nahe 0·44 vom Gewichte des auf den Federn liegenden Baues; wir haben daher $\mathfrak{P}_2 = 0{\cdot}44\,G$. h_2^2 dürfen wir auch hier wie früher gegen l_2^2 vernachlässigen. Mit diesen Daten werden die Ausdrücke (11)

$$\left.\begin{aligned} D &> 2\,V\sqrt{\frac{s}{g}} \\ D &> 1{\cdot}23\,V\frac{l_2}{\Delta_2+\Delta_3}\sqrt{\frac{s}{g}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

An dieser Lokomotive ist aber der Radstand $\Delta_2 + \Delta_3$ so gross, als die totale Kessellänge ist, also $\frac{l_2}{\Delta_2 + \Delta_3} = 1$. Nehmen wir auch hier $s = 0{\cdot}04$ $g = 9{\cdot}81$, so erhalten wir

$$D > 0{\cdot}13\ V \text{ und } V < 8\,D$$

$$D > 0{\cdot}079\ V \text{ und } V < 12{\cdot}6\,D$$

Die grösste Fahrgeschwindigkeit dieser Lokomotive von *Crampton* soll also nach dieser Rechnung kleiner als $8\,D$ sein. Sie wird, wenn man Triebräder von 2·3 Meter Durchmesser annimmt, 18·4 Meter. Man kann also mit dieser Lokomotive ohne Gefahr bedeutend schneller fahren, als mit der von *Stephenson*.

Unsere Formeln (3) Seite (169) sagen uns nicht nur, wie gross die Triebräder nicht sein sollen, sie belehren uns auch, wie gross die Räder sein sollen, damit eine Lokomotive bei einer gewissen Geschwindigkeit, mit der sie zu laufen bestimmt ist, möglichst schwache Störungen verursacht.

Die Werthe von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ der Formeln (3) Seite (169), welche das Nicken bestimmen, werden bei einer unendlich kleinen Winkelgeschwindigkeit, also bei einem unendlich grossen Durchmesser der Triebräder am kleinsten. Anders verhält es sich mit den Werthen von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$, die das Wogen bestimmen. Diese werden für eine bestimmte endliche Grösse der Triebräder, nämlich für denjenigen Werth von D am kleinsten, für welchen

$$\frac{D}{F_1 - \omega^2 M}$$

den kleinsten Werth hat. Setzen wir diesen Ausdruck X und führen in denselben für ω seinen Werth $\frac{2V}{D}$ ein, so wird:

$$X = \frac{D^3}{F_1 D^2 - 4 V^2 M}$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $D = 0$ und wird unendlich, sowohl für $D = 2V\sqrt{\frac{M}{F_1}}$ als auch für $D = \infty$; zwischen diesen beiden Werthen von D liegt also nothwendig ein gewisser endlicher Werth, für welchen X ein Minimum wird, d. h. es gibt nebst dem nicht ausführbaren Werth $D = 0$ noch einen endlichen Werth von D, für welchen das Wogen möglichst schwach ausfällt. Für diesen vortheilhaftesten Werth von D muss $\frac{dX}{dD} = 0$ sein. Nun ist

$$\frac{dX}{dD} = \frac{D^2 (D^2 F_1 - 12 V^2 M)}{(F_1 D^2 - 4 V^2 M)^2}$$

Der diesen Ausdruck zum Verschwinden bringende vortheilhafteste Werth von D ist demnach

$$D = V\sqrt{12\frac{M}{F_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

oder auch weil $\sqrt{\frac{M}{F_1}} = \sqrt{\frac{s}{g}}$ ist

$$D = 2V\sqrt{3\frac{s}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

für $s = 0 \cdot 04$ Meter. $g = 9 \cdot 808$ wird

$$D = 0 \cdot 22\, V$$

Dieser Durchmesser ist aber sehr gross, denn er wird selbst für eine mässige Fahrgeschwindigkeit von 10 Meter bereits 2·2 Meter.

Bezeichnet man mit V_1 die gefährliche Geschwindigkeit einer Lokomotive, deren Triebräder einen Durchmesser D haben, so hat man zur Bestimmung derselben

$$D^2 F_1 = 4 V_1^2 M$$

Daraus folgt:

$$D = V_1 \sqrt{4 \frac{M}{F_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Aus (15) und (17) folgt aber:

$$V_1 = V \sqrt{3} = 1 \cdot 73\, V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Das Wogen einer Lokomotive, die mit einer Geschwindigkeit V zu fahren bestimmt ist, wird also möglichst schwach, wenn der Durchmesser der Triebräder so gross genommen wird, als der Ausdruck (16) bestimmt, und die gefährliche Geschwindigkeit ist dann 1·73 mal so gross als die Geschwindigkeit V.

Für den vortheilhaftesten Werth von D, den die Gleichung (15) darbietet, wird, wenn man berücksichtigt dass $M = \frac{G}{2g}$ $F_1 = \frac{G}{2s}$ ist

$$X = 6 \frac{V}{G} s \sqrt{3 \frac{s}{g}}$$

Die Werthe von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ der Ausdrücke (3) Seite 169 werden mithin:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{R} = \frac{6}{16} \pi \cdot \frac{W}{G} \cdot \frac{V}{L} \cdot s \sqrt{3 \frac{s}{g}}$$

$\frac{W}{G}$ ist für alle Lokomotive sehr nahe eine Constante, eben so auch die Zusammendrückung s der Federn. Damit also die Werthe von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ für alle Lokomotive gleich gross ausfallen, muss auch $\frac{V}{L}$ constant sein, oder es muss die Länge der Schubstange der Fahrgeschwindigkeit proportional genommen werden. Eine grosse Fahrgeschwindigkeit erfordert also nicht nur grosse Triebräder, sondern auch lange Schubstangen. Das erstere dieser Elemente ist jedoch viel wichtiger als das letztere, denn wenn der Durchmesser D genau oder annähernd so gross ist als die Gleichung (15) vorschreibt, fallen die Werthe von $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{Q}_1$ $\mathfrak{R}_1$ selbst bei einem mässigen Werth von L beinahe verschwindend klein aus.

Setzen wir z. B. $V = 12$ $s = 0 \cdot 05$ $\frac{W}{G} = \frac{1}{20}$ $g = 9.81$ $L = 2$, so wird der vortheilhafteste Werth von $D = 3$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R} = \frac{1}{453}$ Meter.

Diese numerischen Rechnungen sind nun freilich nicht ganz zuverlässig, indem das Trägheitsmoment B beinahe nur durch eine Schätzung in Rechnung gebracht wurde, allein so viel kann man doch daraus sehen, dass die wirklichen Fahrgeschwindigkeiten der Personenlokomotive den gefährlichen Geschwindigkeiten oftmals sehr nahe kommen dürften. Wenn aber auch diese numerischen Rechnungen nicht ganz verlässlich sind, so ist doch die Form der Ausdrücke (12) und (14) eine Wahrheit; wir sind also zu dem Ausspruch berechtiget, dass eine grosse Fahrgeschwindigkeit grosse Triebräder, starre Federn und eine im Verhältniss zur Länge des Lokomotivbaues weite Radstellung erfordert.

Diese Gesetze, welche uns die Untersuchung über das Wanken, Wogen und Nicken geliefert hat, gelten nicht nur für diese specielle Lokomotive, die wir der Untersuchung zu Grunde gelegt haben, sondern sie gelten auch für alle andern Anordnungen, die nicht mit Blindaxen versehen sind, vorausgesetzt, dass man sich an den Sinn dieser Gesetze und an den wörtlichen Ausdruck derselben, nicht aber an den Buchstaben der Formeln hält. Es gilt z. B. für alle Lokomotive das Gesetz, dass alle Federn im ruhenden Zustand der Lokomotive gleich stark zusammengepresst sein sollen, dass ferner die Gleitstücke in ihrer mittleren Position in die durch den Schwerpunkt gehende Querebene fallen sollen; dass die Federn starr sein sollen; dass die Summe der Produkte aus den Axenbelastungen in die Quadrate der Entfernungen der Axen von dem Schwerpunkt möglichst gross sein soll etc. Hält man sich also an den wahren Sinn dieser Gesetze, so darf man sie jederzeit anwenden.

Diese Gesetze sind als Grundgesetze anzusehen, die bei dem Bau einer jeden Lokomotive beobachtet werden müssen, und die man ungestraft nicht übertreten darf. Eine Lokomotive ist richtig oder fehlerhaft angeordnet je nachdem ihre Bauart diesen Gesetzen entspricht oder diese Gesetze verletzt. Einzelne dieser Gesetze sind zwar auch auf empirischem Wege aufgefunden oder durch das gesunde Gefühl errathen worden, allein im Allgemeinen fehlt es in der Praxis noch sehr an klarer Uebersicht, das Herumprobiren ist noch immer an der Tagesordnung und die Constructeurs sprechen sich noch immer dahin aus, dass es überhaupt nicht möglich sei, allgemein gültige Regeln für den Bau der Lokomotive aufzustellen. Hoffentlich wird man über den Lokomotivbau zu einer anderen Ansicht kommen, wenn sich einmal die hier aufgestellten Regeln in der Praxis verbreitet haben werden.

Die aufgefundenen Gesetze werden uns in der Folge zur Bestimmung der Dimensionen von neu zu erbauenden Lokomotiven wesentliche Dienste leisten, zunächst wollen wir uns derselben bedienen um die gegenwärtig am häufigsten im Gebrauch befindlichen Lokomotive hinsichtlich der Stabilität ihres Baues zu beurtheilen.

Beurtheilung verschiedener Lokomotive hinsichtlich der Stabilität ihres Baues.

1. Die Personenlokomotive von *Stephenson* mit innen liegenden Cylindern, die Triebaxe in der Mitte, die drei Axen zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer, innere Rahmen. (Tab. I, Fig. 3, 4.)

Obgleich die Construction dieser Lokomotive die am meisten verbreitete ist, so können wir doch von ihrer Stabilität nur wenig Gutes sagen. Die Cylinder liegen zwar nahe neben einander, allein die Schubstangen haben immer im Verhältniss zu den Kurbeln nur eine geringe Länge. Die Kurbeltriebaxe liegt unter dem Kessel, der Schwerpunkt des beweglichen Baues liegt also hoch. Die Maschine hat innere Rahmen, die Entfernung der Federn der einen Seite von den Federn der andern Seite der Lokomotive ist also

klein. Es ist mithin nur eine von den Bedingungen erfüllt, durch die man sich gegen das Wanken schützen kann. Noch ungünstiger ist diese Lokomotive hinsichtlich des Wogens und Nickens gebaut. Die Radstellung ist eine enge, denn alle Axen befinden sich zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer. Die jederzeit eine beträchtliche Belastung erfordernde Triebaxe ist in der Mitte ganz in der Nähe des Schwerpunktes angebracht, die Belastung der Vorder- und Hinterräder ist also zu schwach. Die Cylinder liegen viel zu weit vor dem Schwerpunkt des Baues, die Gleitstücke sollten in ihrer mittleren Position in der durch den Schwerpunkt gehenden Querebene liegen, befinden sich aber weit vorne, ungefähr über der Vorderaxe. Die Schubstangen sollten auch zur Schwächung des Wogens und Nickens eine beträchtliche Länge haben, was, wie schon gesagt wurde, nicht der Fall ist Es ist also an dieser Lokomotive hinsichtlich der Stabilität nichts zu loben, als dass die Cylinder nahe neben einander liegen. Man wird gut thun, wenn man diese Bauart ganz verlässt.

2. Die Personenlokomotive von *Stephenson* mit aussen, vorne neben der Rauchkammer liegenden Cylindern, die Triebaxe in der Mitte, die drei Axen zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer, innere Rahmen. (Tab. II, Fig. 5 und 6.)

An dieser Lokomotive ist keine von den Bedingungen erfüllt, die wir als Merkmale einer guten Construction aufgefunden haben. Die Schubstangen haben eine geringe Länge, die Cylinder liegen zu weit vorne, die mittlere Position der Gleitstücke fällt um ein Beträchtliches vor den Schwerpunkt des Baues. Durch die äussere Lage der Cylinder sind sie zu weit von einander entfernt, verursachen also Wanken. Die Triebräder sind in der Mitte und sollten hinten sein. Die Radstellung ist eine enge, weil alle Axen zwischen dem Feuerkasten und der Rauchkammer liegen. Der Schwerpunkt liegt hoch, insbesondere über den Axen der Tragräder. Es sind innere Rahmen vorhanden, die Federn sind daher zu nahe neben einander. Diese Lokomotive hat durch die Einfachheit ihres Baues ein „praktisches" Ansehen, ist aber so fehlerhaft als nur möglich angeordnet. Wenn die Federn nicht so starr wären, könnte man sie sicherlich gar nicht brauchen.

3. *Stephenson's* Personenzuglokomotive mit in der Mitte des Wagenbaues liegenden Cylindern, die Triebaxe in der Nähe der Feuerbüchse, jedoch vor derselben, innere Rahmen. (Tab. II, Fig. 7 und 8.)

Bei dieser Lokomotive sind mehrere von den von uns aufgestellten Bedingungen einer richtigen Bauart ganz gut erfüllt. Die hintere Axe ist hier Triebaxe, und die Gylinder haben eine solche Lage, dass die Gleitstücke in ihrer mittleren Position wenigstens nahe in die Vertikalebene fallen, die quer durch den Schwerpunkt des Baues geht. Allein der Radstand $(\Delta_2 + \Delta_3)$ ist zu klein und die Schubstangen sind auch wie bei allen *Stephenson*'schen Lokomotiven zu kurz, es sind also zwei von den Bedingungen, durch deren Erfüllung das Nicken und Wogen möglichst geschwächt werden kann, nicht realisirt. Hinsichtlich des Wankens ist diese Lokomotive sehr fehlerhaft angeordnet. Die Cylinder liegen aussen, die Schubstangen haben eine geringe Länge, es sind innere Rahmen angebracht oder die Federn liegen innerhalb der Räder, der Schwerpunkt des Baues liegt hoch, weil die Axe der grossen Triebräder unter dem Kessel durchgeht. Der lobenswerthen Eigenschaften hat also diese Lokomotive nur die zwei zuerst genannten.

4. Die Personenlokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe, mit aussen liegenden Cylindern und mit grossen Triebrädern, deren Axe hinter der Feuerbüchse liegt. (Tab. II, Fig 9 und 10.)

Ueber diese Maschine fällen auch unsere trocknen Formeln ein sehr günstiges Urtheil. Die Cylinder sind so gelegt, dass die mittlere Position der Gleitstücke in die durch den Schwerpunkt gehende vertikale Querebene fallen. Die Triebräder haben eine bedeutende

Grösse und ihre Axe liegt nicht in der Mitte, sondern hinter der Feuerbüchse. Der Radstand ist grösser, als bei irgend einer andern Personenlokomotive. Die Schubstangen haben eine sehr beträchtliche Länge. Werden die Federn hinreichend starr gemacht und in der Weise angeordnet, dass sie in ruhigem Zustand der Lokomotive um gleich viel zusammengedrückt sind, so entspricht diese Lokomotive vollkommen und vollständig den Bedingungen hinsichtlich des Wogens und Nickens. Aber auch gegen das Wanken ist diese Lokomotive in mehrfacher Hinsicht gut gebaut. Die Schubstangen haben, wie schon gesagt wurde, eine sehr beträchtliche Länge. Der Schwerpunkt des Baues liegt tiefer, als bei irgend einer andern Personenlokomotive, und es liegen wenigstens die vordern Federn ausserhalb der Räder. Nur allein der Umstand ist ein ungünstiger, dass die Cylinder ausserhalb liegen. Diese Lokomotive hat also nach dem Urtheile unserer Formeln nur eine einzige Unvollkommenheit; und sie würde zu dem wahren Vorbild aller Personenlokomotiven gemacht werden können, wenn man diese äussere Lage der Cylinder mit einer inneren Lage vertauschen könnte, ohne eine von den übrigen der wirklich realisirten Bedingungen zu verletzen.

Sucht man eine Construction in einer Hinsicht zu verbessern, so begegnet es gewöhnlich, dass man sie in einer andern Hinsicht verschlechtert. *Crampton* war glücklicher. Er wollte nur Eine Verbesserung machen, dieser folgten aber mehrere andere freiwillig nach. *Crampton* wollte grössere Räder anwenden, ohne den Schwerpunkt des Baues höher legen zu müssen, und hatte den glücklichen Gedanken, sie von der Mitte wegzunehmen und hinter die Feuerbüchse zu verlegen, dadurch konnte nun der Schwerpunkt tiefer gelegt werden, wurde der Radstand grösser, erhielten die Cylinder ihre richtige Längenposition und wurden die Schubstangen von selbst länger.

5. Die Lokomotive von *Norris* mit aussen liegenden Cylindern, mit vier gekuppelten Triebrädern und mit einem beweglichen vierrädrigen Laufwagen. (Tab. V, Fig. 17 und 18.)

Die Lage der Cylinder ist theils eine ungünstige, theils eine fehlerhafte; sie ist ungünstig, weil die Cylinder aussen liegen; fehlerhaft, weil sie zu weit vorne liegen. Bringt man die Cylinder in eine solche Lage, dass die mittlere Position der Gleitstücke in die durch den Schwerpunkt gehende Querebene fällt, so muss die hinter der Feuerbüchse befindliche Triebaxe von den Gleitstücken aus vermittelst Schubstangen getrieben werden, weil sonst die Schubstangen zu kurz würden. Die Radstellung ist eine richtige, allein der Schwerpunkt der Maschine kommt ziemlich hoch zu liegen, weil die vor dem Feuerkasten befindliche Triebaxe unter dem Kessel durchgeht. Beseitiget man die Fehler dieser Construction, so kommt man zur Lokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe.

Die Lokomotive von Crampton mit Blindaxe.

Die ganze frühere Untersuchung über das Wanken, Wogen und Nicken der Lokomotive bezieht sich nur allein auf solche Anordnungen, bei welchen die Kraft von den Gleitstücken aus direkt durch Schubstangen auf die Triebaxe übertragen wird. In dieser neueren Personenzuglokomotive von *Crampton* ist eine so direkte Uebertragung der Kraft nicht vorhanden, sondern die Kraft wird zunächst von den Gleitstücken aus vermittelst Schubstangen auf eine gegen den Rahmenbau unveränderlich gelagerte Kurbelaxe übertragen, und erst von dieser aus wird die hinter der Feuerbüchse befindliche Triebaxe vermittelst Kurbeln und Kupplungsstangen getrieben. Diese in dem Rahmenbau liegende, mit inneren Maschinenkurbeln und mit äusseren Kupplungskurbeln versehene Blindaxe wird, beim Vorwärtslaufen der Lokomotive, nach vertikaler Richtung abwärts gedrückt, und diese Pressung, in Verbindung mit allen übrigen auf den Rahmenbau einwirkenden

Horizontal- und Vertikalkräften, bewirkt in dieser Lokomotive das Wanken, Wogen und Nicken.

In der Maschine von *Crampton* liegt die Triebaxe höher als die Blindaxe und als die Gleitstücke, allein da die äusseren Kupplungsstangen im Verhältniss zur Höhe der Triebaxe über der Blindaxe sehr lang sind, so werden wir keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir annehmen, dass die Triebaxe, die Blindaxe und die Gleitstücke in einer und derselben horizontalen Ebene liegen, in welchem Falle die äusseren Kupplungsstangen stets eine horizontale Lage haben. Tab. XIV, Fig. 55 stellt den Mechanismus und das Kräftesystem der vordern Maschine dar, Fig. 56 den Mechanismus und das Kräftesystem der hintern Maschine. Fig. 57 ist eine ideale Darstellung des Rahmenbaues und der auf denselben einwirkenden Kräfte. ε ist der Verbindungspunkt des Tenders mit der Lokomotive. A die Triebaxe. B die Blindaxe. C D die Gleitstücke der beiden Maschinen. F die Punkte, in welchen die Cylinder mit dem Rahmen verbunden sind. H der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues. Die in Betrachtung zu ziehenden Kräfte sind folgende:

Das Gleitstück der vordern Maschine übt gegen das obere Führungslineal nach vertikaler Richtung aufwärts einen Druck $P\frac{r}{L}\sin.\alpha$ aus. Das Gleitstück der hintern Maschine übt gegen das Führungslineal nach vertikaler Richtung aufwärts einen Druck $P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha$ aus. Gegen den Zapfen der vorderen Maschinenkurbel wird nach horizontaler Richtung nach vorwärts ein Druck P, nach vertikaler Richtung abwärts ein Druck $P\frac{r}{L}\sin.\alpha$ ausgeübt. Gegen den Zapfen der hintern Maschine wird nach horizontaler Richtung nach rückwärts ein Druck P_1, nach vertikaler Richtung abwärts ein Druck $P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha$ ausgeübt. Gegen den Zapfen der vorderen Kupplungskurbel wirkt nach horizontaler Richtung nach vorwärts ein Druck P, nach vertikaler Richtung kein Druck. Gegen den Zapfen der hinteren Kupplungskurbel wirkt nach horizontaler Richtung, aber nach rückwärts zielend, eine Kraft P_1, nach vertikaler Richtung keine Kraft. Die Blindaxe zieht also den Rahmenbau nach horizontaler Richtung vorwärts mit einer Kraft 2 P, nach horizontaler Richtung rückwärts mit einer Kraft 2 P_1, nach vertikaler Richtung abwärts mit einer Kraft $P\frac{r}{L}\sin.\alpha + P_1\frac{r}{L}\cos.\alpha$.

Den in A (Fig. 57) nach horizontaler Richtung und nach vorwärts wirkenden Druck der Triebaxe gegen die Axengabeln $\mathfrak{H}$ genannt, so hat man zur Bestimmung derselben

$$\mathfrak{H}\frac{D}{2} = P_1\left(\frac{D}{2} + r\cos.\alpha\right) - P\left(\frac{D}{2} - r\sin.\alpha\right)$$

$$\mathfrak{H} = P_1 - P + \frac{2r}{D}(P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Um das Wanken, Wogen und Nicken der Maschine zu bestimmen, müssen wir bestimmen: 1) die Summe der Vertikalkräfte ΣZ, welche auf den Bau einwirken. 2) die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe. 3) Die Summe der Momente in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe.

Die Summe der Vertikalkräfte reduzirt sich aber hier einzig und allein auf die Summe der Federkräfte und das Gewicht G des Baues; denn die Summe der Kräfte, welche die Blindaxe abwärts pressen, ist genau so gross, als die Summe der Pressungen,

welche die Gleitstücke nach vertikaler Richtung aufwärts ausüben. Es ist demnach für diese Maschine

$$\Sigma Z = -2 \zeta F_1 + 2 \varphi F_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Summe der Momente in Bezug auf die Längenaxe reduzirt sich hier ebenfalls auf die Summe der Momente der Federkräfte, denn die Pressungen der Gleitstücke geben eine Momentensumme $e\left(P \frac{r}{L} \sin \alpha - P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha\right)$ und die Pressungen gegen die Zapfen der Maschinenkurbeln geben eine Momentensumme $e\left(P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha - P \frac{r}{L} \sin. \alpha\right)$. Der Gesammtbetrag dieser Summe ist demnach gleich Null.

Die Summe der Momente aller auf den Bau einwirkender Kräfte ist demnach vermöge c, Seite 143

$$X_1 = -2 \varepsilon^2 \psi F_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Nennt man $\varDelta$ den Horizontalabstand der Blindaxe von dem Schwerpunkt, h die Höhe dieses Schwerpunkts über der Horizontalebene, in der, der Voraussetzung gemäss, die Triebaxe, die Blindaxe und die Gleitstücke liegen. W den Widerstand des Trains, und berücksichtiget, dass die Horizontalabstände der Gleitstücke vom Schwerpunkt annähernd $r \cos. \alpha + L - \varDelta$ $r \sin. \alpha + L - \varDelta$ sind, so erhalten wir für die Summe der Momente aller Kräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe folgenden Ausdruck:

$$Y_1 = \left\{ \begin{array}{l} + 2 \zeta F_2 - 2 \varphi F_3 \\ h (P_1 - P + 2 P - 2 P_1 + \mathfrak{H} - W) \\ P \frac{r}{L} \sin. \alpha (r \cos. \alpha + L - \varDelta) + P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha (r \sin. \alpha + L - \varDelta) \\ \varDelta \left(P \frac{r}{L} \sin. \alpha + P_1 \frac{r}{L} \cos. \alpha\right) \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (4)$$

wobei die erste Zeile die Momente der Federkräfte (b Seite 143), die zweite Zeile die Momente der Horizontalkräfte, die dritte Zeile die Momente der Pressungen der Gleitstücke, die vierte Zeile die Momente der Pressungen der Blindaxe ausdrückt.

Führt man in diesen Ausdruck für $\mathfrak{H}$ seinen Werth aus (1) ein und berücksichtiget, dass im Beharrungszustand der Bewegung

$$W = 2 K \frac{2l}{D \pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

ist, so findet man nach einigen einfachen Reductionen:

$$\left. \begin{array}{l} Y_1 = -h\, 2 K \frac{2l}{D \pi} + 2 \zeta F_2 - 2 \varphi F_3 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{L} (P + P_1) \sin. 2 \alpha \\ \qquad + r \left(1 + \frac{2h}{D}\right) (P \sin. \alpha + P_1 \cos. \alpha) \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Diese Werthe ΣZ X_1 Y_1 sind unabhängig: 1) von der Horizontalentfernung der

Axen der Maschinen, 2) von der Länge der äusseren Kupplungsstangen, 3) von dem Horizontalabstand Δ der Blindaxe von dem Schwerpunkt. Es ist demnach ganz gleichgültig, ob die Cylinder bei dieser Lokomotive innen, oder ob sie aussen liegend angebracht werden, und nach wohin man die Blindaxe in horizontalem Sinne verlegt. Da ferner, wie wir gesehen haben, die Triebkräfte P und P_1 weder in der Summe ΣZ, noch in der Summe X_1 erscheinen, so kann in dieser Lokomotive, abgesehen von den Einwirkungen der Bahn, weder ein Wogen noch ein Wanken, sondern einzig und allein ein Nicken eintreten. Wir wollen nun sehen, ob dieses Nicken stärker oder schwächer ist, als bei einer gewöhnlichen Lokomotive ohne Blindaxe.

Vermöge des Ausdruckes (6) Seite 146 ist der Werth von Y_1 für eine Lokomotive ohne Blindaxe

$$\left.\begin{aligned} Y_1 = -h_1 2K\frac{2l}{D\pi} + 2\zeta F_2 - 2\varphi F_3 + \frac{1}{2}(P+P_1)\frac{r^2}{L}\left(1+\frac{2h}{D}\right)\sin. 2\alpha \\ + \left[(L-\Delta_2)\frac{r}{L}+\frac{2rh}{D}\right](P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (7)$$

Machen wir, um die Vergleichung dieses Ausdruckes mit (6) zu erleichtern, die günstige Voraussetzung, dass in beiden Maschinen $h = h_1 = 0$ seie, so werden die Werthe von Y_1

A) Für die Maschine von *Crampton mit* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_3 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{L}(P+P_1)\sin. 2\alpha + r(P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

B) Für die Maschine *ohne* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_3 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{L}(P+P_1)\sin. 2\alpha + r\frac{L-\Delta_2}{L}(P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \quad . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Diesen letzteren Ausdruck können wir noch weiter spezialisiren. Es ist nämlich Δ_2 für die Personenlokomotive von *Stephenson* ohne Blindaxe nahe gleich Null, und für die Personenlokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe gleich L. Die Werthe von Y_1 sind daher:

C) Für die Personenlokomotive von *Stephenson ohne* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{L}\right)(P+P_1)\sin. 2\alpha + r(P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \quad . \; . \; . \; . \quad (10)$$

D) Für die Personenlokomotive von *Crampton ohne* Blindaxe:

$$2\zeta F_2 - 2\varphi F_3 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{L}(P+P_1)\sin. 2\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Vergleicht man diese Ausdrücke (10) und (11) mit (8) so folgt, dass die Maschine von *Crampton mit* Blindaxe 1) gerade so stark nickt, als die Personenlokomotive von *Stephenson ohne* Blindaxe, 2) weit stärker nickt, als die Personenlokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass die Werthe von F_3 für alle drei Maschinen übereinstimmen

Kurz angedeutet ist also das Urtheil unserer Untersuchung:

Stephenson: innere Cylinder	schwaches Wanken	starkes Wogen	starkes Nicken.
Crampton: ohne Blindaxe	starkes Wanken	kein Wogen	kein Nicken.
Crampton: mit Blindaxe	kein Wanken	kein Wogen	starkes Nicken.

Schliesslich wollen wir noch die Werthe von ζ φ und ψ für die Lokomotive von *Crampton* mit Blindaxe aufstellen. Die Differenzialgleichungen (3) Seite 141 der gaukelnden Bewegungen werden vermittelst der Werthe (2), (3), (6)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -m\zeta + n\varphi \\
\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -c + m_1\zeta - n_1\varphi + \frac{1}{2}(P + P_1)\,q_1 \sin.2(\alpha_0 - \omega t) \\
&\quad + p_1\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \\
\frac{d^2\psi}{dt^2} &= -m_2\psi
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (12)$$

wobei die Coeffizienten $m\ n\ m_1\ n_1\ m_2\ p_1\ q_1$ folgende Werthe haben.

$$\left.\begin{aligned}
m &= \frac{f_1 + f_2 + f_3}{M} = \frac{F_1}{M} & m_1 &= \frac{\varDelta_1 f_1 + \varDelta_2 f_2 - \varDelta_3 f_3}{B} = \frac{F^2}{B} \\
n &= \frac{\varDelta_1 f_1 + \varDelta_2 f_2 - \varDelta_3 f_3}{M} = \frac{F_2}{M} & n_1 &= \frac{\varDelta_1^2 f_1 + \varDelta_2^2 f_2 + \varDelta_3^2 f_3}{B} = \frac{F_3}{B} \\
c &= \frac{2 l h K}{B D \pi} & q_1 &= \frac{r^2}{2 L B} \\
m_2 &= \frac{\varepsilon^2 (f_1 + f_2 + f_3)}{A} = \frac{\varepsilon^2 F_1}{A} & p_1 &= \frac{r}{2B}\left(1 + \frac{2h}{D}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Da die Gleichungen (12) der Form nach mit den Gleichungen (9) Seite 147 übereinstimmen, so werden wir die Integrale der Gleichungen (12) erhalten, wenn wir in die Gleichung (5) Seite 149 und in die Gleichungen (13), (14), (15), Seite 162, so wie endlich in die Gleichungen (21), (22), Seite 164 für $m\ n\ e\ m_1\ n_1\ m_2\ p_1\ q_1$ die so eben zusammengestellten Werthe (13) setzen und ferner noch $p = 0$ und $p_2 = 0$ schreiben.

Wir erhalten somit für die Integrale der Gleichungen (12) folgende Ausdrücke:

$$\psi = \mathfrak{A} \sin.\sqrt{m_2}\,t + \mathfrak{B} \cos.\sqrt{m_2}\,t$$

$$\zeta = \frac{2 l h}{D \pi} K \frac{F_2}{F_2^2 - F_1 F_3} + \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{G}_1 \sin.a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos.a_1 t + \mathfrak{G}_2 \sin.a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos.a_2 t \\ &+ \mathfrak{P} \sin.2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q} \sin.(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R} \cos.(\alpha_0 - \omega t) \end{aligned}\right\}$$

$$\varphi = \frac{2\,l\,h\,K}{D\,\pi}\,\frac{F_1}{F_2^2 - F_1 F_3} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{-m_1}{a_1^2 - n_1}(\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) + \frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}(\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t) \\ + \mathfrak{P}_1 \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{Q}_1 \sin. (\alpha_0 - \omega t) + \mathfrak{R}_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{P} = -\frac{1}{4}\,\frac{r^2}{L}(P + P_1)\,\frac{F_2}{F_2^2 - (4\,\omega^2 M - F_1)(4\,\omega^2 B - F_3)}$$

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{1}{4}\,\frac{r^2}{L}(P + P_1)\,\frac{4\,\omega^2 M - F_1}{F_2^2 - (4\,\omega^2 M - F_1)(4\,\omega^2 B - F_3)}$$

$$\mathfrak{Q} = -\frac{1}{2}\,r\left(1 + \frac{2h}{D}\right)P\,\frac{F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)}$$

$$\mathfrak{Q}_1 = +\frac{1}{2}\,r\left(1 + \frac{2h}{D}\right)P\,\frac{\omega^2 M - F_1}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)}$$

$$\mathfrak{R} = -\frac{1}{2}\,r\left(1 + \frac{2h}{D}\right)P_1\,\frac{F_2}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)}$$

$$\mathfrak{R}_1 = +\frac{1}{2}\,r\left(1 + \frac{2h}{D}\right)P_1\,\frac{(\omega^2 M - F_1)}{F_2^2 - (\omega^2 M - F_1)(\omega^2 B - F_3)}$$

Ist $F_2 = 0$, d. h. sind die Federn so construirt, dass sie im ruhigen Zustand der Lokomotive gleich stark zusammengedrückt sind, so werden diese Ausdrücke bedeutend einfacher, denn unter dieser Voraussetzung wird zunächst:

$$\mathfrak{P} = 0 \qquad \mathfrak{Q} = 0 \qquad \mathfrak{R} = 0$$

$$\mathfrak{P}_1 = -\frac{1}{4}\,\frac{r_2}{L}(P + P_1)\,\frac{1}{4\,\omega^2 B - F_3} \qquad \mathfrak{Q}_1 = -\frac{r}{2}\left(1 + \frac{2h}{D}\right)P\,\frac{1}{\omega^2 B - F_3}$$

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{r}{2}\left(1 + \frac{2h}{D}\right)P_1\,\frac{1}{\omega^2 B - F_3}$$

Allein weil wir von den Einwirkungen der Bahn absehen, so muss $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = 0$ sein und weil auch $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{R} = 0$ ist, so muss noch überdies $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{H}_2 = 0$ sein; denn Grundschwingungen können, wenn die Bahn keine Einwirkungen hervorbringt, nur durch Kurbelschwingungen hervorgerufen werden; in dem Ausdruck für ψ erscheint aber überhaupt keine Kurbelschwingung, und in dem Ausdruck für ζ verschwinden die Kurbelschwingungen, wenn $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{R} = 0$ ist; es müssen also nothwendig sowohl in ψ als in ζ die Grundschwingungen verschwinden, d. h. es muss $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{H}_2 = 0$ sein. Dann aber reduzirt sich der totale Bewegungszustand bloss auf eine nickende Bewegung, die durch folgenden Ausdruck bestimmt wird:

$$\varphi = -\frac{2\,l\,h\,K}{D\,\pi\,F_3} + \frac{1}{4}\,\frac{r^2}{L}(P + P_1)\,\frac{\sin. 2(\alpha_0 - \omega t)}{F_3 - 4\,\omega^2 B} + \frac{\frac{r}{2}\left(1 + \frac{2h}{D}\right)}{F_3 - \omega^2 B}\left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right]$$

Lokomotive mit Schleifenbewegung.

Es ist mir der Gedanke gekommen, dass man vielleicht den Schubstangen-Mechanismus durch die Schleifenbewegung mit Vortheil ersetzen könnte. Tab. VIII, Fig. 31 und 32 und Tab. XV, 59, 60, 61. Die Cylinder liegen aussen und sind an den Rahmenbau befestiget. Zur Uebertragung der Kraft von den Kolben aus auf die Kurbeln der Triebaxe dienen die Schleifen. Der Stiel einer Schleife bewegt sich in zwei an dem Rahmenbau angebrachten Führungen b c und an jeden Kurbelzapfen ist ein Gleitstück gesteckt, das mit dem Kurbelzapfen herumgehet und gleichzeitig in der Schleife auf- und abgleitet. Wir wollen vorläufig von den Schwierigkeiten einer soliden Ausführung dieser Anordnung ganz absehen, und nur zunächst untersuchen, wie sich eine solche Lokomotive hinsichtlich des Wankens, Wogens und Nickens verhält.

Die nach horizontaler Richtung und nach rückwärts zielende Pressung P des Gleitstückes der vordern Maschine gegen ihre Schleife sucht den ganzen Körper der Schleife zu drehen, und dadurch wird die Führung b nach abwärts, die Führung c nach aufwärts gepresst. Diese beiden Pressungen sind gleich gross und der numerische Werth jeder derselben ist $P\frac{r}{\Delta}\sin.\alpha$, wobei Δ die Entfernung der Punkte b und c bedeutet. Die Kraft P_1 der hintern Maschine sucht die Schleife der hintern Maschine zu drehen, und zwar in dem gleichen Sinne, in welchem das Schleifenstück der vordern Maschine zur Drehung angeregt wird. Dadurch erleidet der Führungspunkt b der hintern Maschine einen Druck $P\frac{r}{\Delta}\cos.\alpha$ nach abwärts und der Führungspunkt c der hintern Maschine einen Druck $P\frac{r}{\Delta}\cos.\alpha$ nach aufwärts.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{l} P\frac{r}{\Delta}\sin.\alpha = \mathfrak{B} \\ P_1\frac{r}{\Delta}\cos.\alpha = \mathfrak{B}_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und nennen ferner: W den Widerstand des Trains, $\mathfrak{H}$ den Druck der Triebaxe gegen die Axengabeln, h die Höhe des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues über der Axe der Triebräder, so hat man zunächst zur Bestimmung von $\mathfrak{H}$ die Gleichung

$$\mathfrak{H}\frac{D}{2} = P\left(\frac{D}{2} + r\sin.\alpha\right) - P_1\left(\frac{D}{2} - r\cos.\alpha\right)$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{H} = P - P_1 + \frac{2r}{D}(P\sin.\alpha + P_1\cos.\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

In Figur 61 ist das auf den Bau einwirkende Kräftensystem angegeben, a ist der Angriffspunkt des Widerstandes W, b und c sind die Führungspunkte der Schleifenstiele. Am vordern Punkt c wirkt eine Kräftensumme $\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1$ vertikal aufwärts, am hintern Punkt b wirkt eine eben so grosse Kräftensumme vertikal abwärts, d ist der Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{H}$, e ist der Stopfbüchsendeckel des Cylinders der vordern Maschine,

gegen welchen der Druck P wirkt; e_1 der Bodendeckel des Cylinders der hinteren Maschine, gegen welchen der Druck P_1 wirkt. H der Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues, Δ_1 die Horizontaldistanz des Schwerpunktes von der Triebaxe. Hieraus folgt nun:

1. Dass die algebraische Summe der Vertikalkräfte gleich Null ist. Ein Wogen wird mithin durch die auf den Bau einwirkenden Kräfte nicht angeregt;
2. dass die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Längenaxe ebenfalls gleich Null ist. Ein Wanken wird also durch diese Kräfte ebenfalls nicht angeregt;
3. dass die Kräfte W $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{B}_1$ P P_1 den auf den Federn liegenden Bau um eine durch den Schwerpunkt gehende Queraxe mit einem Moment

$$h(-W+\mathfrak{H}+P_1-P)+(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)\left(\Delta_1+\frac{1}{2}\Delta\right)-(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)\left(\Delta_1-\frac{1}{2}\Delta\right) \quad . \ . \ . \ . \quad (3)$$

zur Bewegung anregen, und zwar in dem Sinn, dass der vordere Theil des Lokomotivbaues gehoben wird.

Setzt man für $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{H}$ die bereits berechneten Werthe (1) und (2), so wird das Moment (3)

$$-hW+r\left(1+\frac{2h}{D}\right)(P\sin.\alpha+P_1\cos.\alpha) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

Die Lokomotive wird also ein dem Werthe dieses Momentes entsprechendes Nicken zeigen müssen.

Der vollständige Werth von Y_1, d. h. die vollständige Summe der Momente aller auf den Bau einwirkenden Kräfte in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Queraxe ist nun

$$Y_1=-h\,2K\frac{2l}{D\pi}+2\zeta F_2-2\varphi F_3+r\left(1+\frac{2h}{D}\right)(P\sin.\alpha+P_1\cos.\alpha) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (5)$$

Vergleichen wir diesen Werth von Y_1 mit jenem, den wir Seite 181, für die *Crampton*'sche Lokomotive mit Blindaxe gefunden haben, so sieht man, dass sie sich nur durch das Glied

$$\frac{1}{2}\frac{r^2}{L}(P+P^1)\sin.2\alpha$$

unterscheiden. Dieses Glied ist aber von keinem Belang, denn wenn die Kolben der beiden Maschinen nach einerlei Richtung gehen, verschwindet es ganz, weil dann $(P+P_1)$ gleich Null ist, (Siehe Seite 148), und wenn die Kolben nach entgegengesetzten Richtungen gehen, hat es immer nur einen kleinen, bald positiven, bald negativen Werth. Im Mittel genommen, kann man also sagen, dass diese Lokomotive mit Schleifenbewegung hinsichtlich des Nickens gerade so gut, oder um ein Unbedeutendes besser ist, als die Lokomotive von *Crampton* mit Blindaxe. Beide Anordnungen haben aber die vortreffliche Eigenschaft, dass sie weder Wanken noch Wogen verursachen.

Wenn $F_2=0$ ist, d. h. wenn die Federn so angeordnet sind, dass sie im ruhenden Zustand der Lokomotive um gleich viel zusammengepresst sind, wird die Differenzialgleichung der nickenden Bewegung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{hW}{2B} + \frac{r\left(1+\frac{2h}{D}\right)}{2B}(P \sin.\alpha + P_1 \cos.\alpha) - \frac{F_3}{B}\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

oder wenn man $\alpha = \alpha_0 - \omega t$ setzt

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{hW}{2B} + \frac{r\left(1+\frac{2h}{D}\right)}{2B}\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] - \frac{F_3}{B}\varphi \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Für das Integrale dieser Gleichung findet man leicht direkt folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned}\varphi = -\frac{hW}{2F_3} + \left(\mathfrak{A} \sin.\sqrt{\frac{F_3}{B}}\,t + \mathfrak{B} \cos.\sqrt{\frac{F_3}{B}}\,t\right) + \frac{\frac{r}{2}\left(1+\frac{2h}{D}\right)}{F_3 - \omega^2 B}&\left[P \sin.(\alpha_0 - \omega t)\right. \\ &\left. + P_1 \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right]\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

in welchem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die willkürlichen Constanten bedeuten.

Die numerischen Werthe von P und P_1 sind für jede Stellung der Kurbeln. $\frac{\pi}{8} W \frac{D}{r}$

Nennt man V die Fahrgeschwindigkeit, welche der Winkelgeschwindigkeit ω entspricht, so ist $\omega = \frac{2V}{D}$; der Ausdruck für φ wird daher auch:

$$\left.\begin{aligned}\varphi = -\frac{hW}{2F_3} + \left(\mathfrak{A} \sin.\sqrt{\frac{F_3}{B}}\,t + \mathfrak{B} \cos.\sqrt{\frac{F_3}{B}}\,t\right) + \frac{\pi}{16} W \frac{D^2(D+2h)}{F_3 D^2 - 4V^2 B} \times& \\ \left[\pm \sin.(\alpha_0 - \omega t) \pm \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right]&\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

dabei sind die Zeichen so zu wählen, dass $\pm \sin.(\alpha_0 - \omega t)$ und $\pm \cos.(\alpha_0 - \omega t)$ stets positiv bleiben.

Der Ausdruck $\frac{D^2(D+2h)}{F_3 D^2 - 4V^2 B}$ verschwindet für $D = 0$, wird unendlich für $F_3 D^2 - 4V^2 B = 0$ oder für $D = 2V\sqrt{\frac{B}{F_3}}$, wird auch unendlich für $D = \infty$. Zwischen diesen beiden letzteren Werthen von D liegt also nothwendig ein Werth, für welchen jener Ausdruck ein Minimum wird, und diesen wollen wir suchen. Setzen wir für einen Augenblick:

$$X = \frac{D^2(D+2h)}{F_3 D^2 - 4V^2 B} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Differenziren wir diesen Ausdruck in Bezug auf D, so wird:

$$\frac{dX}{dD} = \frac{D F_3}{(D^2 F_3 - 4V^2 B)^2}\left(D^3 - \frac{12 V^2 B D}{F_3} - 16\frac{V^2 B h}{F_3}\right)$$

Für denjenigen Werth von D, welcher X zu einem Minimum macht, muss $\frac{dX}{dD}$ verschwinden, diess ist der Fall für $D = 0$ und für denjenigen reellen Werth von D, für welchen wird

$$D^3 - \frac{12 V^2 B D}{F_3} - \frac{16 V^2 B h}{F_3} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Da h im Vergleich zu $\frac{3}{4}$ D immer sehr klein ist, so kann man $\frac{16 V^2 B h}{F_3}$ gegen $\frac{12 V^2 B D}{F_3}$ vernachlässigen und dann folgt aus dieser kubischen Gleichung

$$D^2 = \frac{12 V^2 B}{F_3}$$

oder

$$D = 2 V \sqrt{\frac{3 B}{F_3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Für diesen Werth von D wird der Werth von X, wenn man in demselben ebenfalls 2h gegen D vernachlässigt.

$$X = \frac{3}{2} \frac{V}{F_3} \sqrt{12 \frac{B}{F_3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Das Nicken wird also bei dieser Lokomotive am schwächsten, wenn der Durchmesser der Triebräder so gross genommen wird, als der Ausdruck (12) gibt, und dieses Nicken beträgt dann:

$$\varphi = \mathfrak{A} \sin. \sqrt{\frac{F_3}{B}}\, t + \mathfrak{B} \cos. \sqrt{\frac{F_3}{B}}\, t + \frac{3 \pi W V}{32 F_3} \sqrt{12 \frac{B}{F_3}} \left[\pm \sin. (\alpha_0 - \omega t) \pm \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right] \quad . \quad (14)$$

Für die Lokomotive von *Crampton* ist $\sqrt{\frac{B}{F_3}}$ nahe gleich 0.039 ist. Für diesen Werth gibt die Gleichung (12)

$$D = 0{\cdot}135\, V$$

Dieser Durchmesser wird selbst für eine Geschwindigkeit V von 16 Meter nur 2.1 Meter, ist also sehr wohl ausführbar.

Nennt man V_1 die gefährliche Fahrgeschwindigkeit, d. h. diejenige Geschwindigkeit, für welche der Nenner des Ausdruckes (10) verschwindet, so hat man zur Bestimmung derselben die Gleichung:

$$F_3 D^2 - 4 V_1^2 B - 0$$

woraus folgt:

$$V_1 = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{F_3}{B}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Aus dieser und aus der Gleichung (13) folgt:

$$V_1 = \sqrt{3}\, V = 1{\cdot}73\, V$$

Wenn wir die soeben gefundenen Resultate in Worte fassen, so können wir Folgendes aussprechen:

Wenn man den Durchmesser D der Triebräder einer Lokomotive, die bestimmt ist im Maximum mit einer Geschwindigkeit V zu laufen, so gross nimmt, als die Gleichung

(12) angibt, so tritt bei dieser Geschwindigkeit V das schwächste Nicken ein, nnd die gefährliche Geschwindigkeit V_1 ist dann 1.73mal so gross, als diese grösste Geschwindigkeit V. Ist $\sqrt{\frac{B}{F_3}} = 0.039$. $V = 16$, so wird $D = 2\cdot16$ und $V_1 = 28$ Meter.

Wir wollen noch berechnen, wie stark das Nicken in dem allgemeinen Falle wird, wenn der Durchmesser des Triebrades von dem einer gewissen Fahrgeschwindigkeit entsprechenden vortheilhaftesten Werthe abweicht. Setzen wir:

$$D = m\,2\,V\sqrt{3\,\frac{B}{F_3}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (16)$$

wobei m irgend eine positive Zahl bedeutet, die für den vortheilhaftesten Durchmesser gleich eins ist, vernachlässigen in dem Ausdruck (9) $2h$ gegen D und setzen zur Abkürzung:

$$Y = \frac{\pi}{16}\,W\,\frac{D^3}{F_3\,D^2 - 4\,V^2\,B} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (17)$$

Führen wir in diesen Ausdruck, nach welchem das Nicken zu beurtheilen ist, den obigen Werth von D ein, so wird derselbe

$$Y = \frac{6\,\pi}{16}\,W\,\frac{V}{F_3}\sqrt{3\,\frac{B}{F_3}}\;\frac{m^3}{3\,m^2 - 1} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (18)$$

Für B können wir, wie bisher immer geschehen ist, setzen:

$$B = \frac{G}{2\,g}\,\frac{(l_2^2 + h_2^2)}{12} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (19)$$

Um F_4 näher zu bestimmen, wollen wir annehmen, dass die Lokomotive mit 2 Triebrädern und mit einem vierrädrigen vordern Laufwerk versehen, also in der Weise angeordnet sei, wie Fig. (31) zeigt. Nennen wir Δ_2 den Horizontalabstand des Schwerpunktes von der hinter der Feuerbüchse befindlichen Triebaxe, Δ_3 den Horizontalabstand des Schwerpunktes von dem Mittelpunkt des Laufwerkes, $\mathfrak{P}_2$ die Belastung der Triebaxe, $\mathfrak{P}_3$ die Belastung des Laufwerkes, s die Zusammendrückung der Federn im unbewegten Zustand der Lokomotive, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 &= G \\ \mathfrak{P}_2\,\Delta_2 &= \mathfrak{P}_3\,\Delta_3 \\ F_3 &= \frac{\mathfrak{P}_2\,\Delta_2^2 + \mathfrak{P}_3\,\Delta_3^2}{2\,s} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (20)$$

Hieraus findet man leicht durch Elimination von Δ_3 und $\mathfrak{P}_3$:

$$= \mathfrak{P}_2\,\Delta_2^2\,\frac{G}{2\,s\,(G - \mathfrak{P}_2)} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (21)$$

Führt man die Werthe von B und F_3, welche die Ausdrücke (19) und (20) darbieten, in (16) und (18) ein, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$Y = \frac{6\pi}{16} \frac{W}{G} \frac{s\, l_2\, V}{\Delta_2^3} \sqrt{\frac{s}{g}} \left(\frac{G}{\mathfrak{P}_2} - 1\right) \sqrt{\left[1 + \left(\frac{h_2}{l_2}\right)^2\right] \left(\frac{G}{\mathfrak{P}_2} - 1\right)} \frac{m^3}{3\, m^2 - 1} \quad . \; . \; . \quad (22)$$

$$D = m\, V \frac{l_2}{\Delta_2} \sqrt{\frac{s}{g}} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{h_2}{l_2}\right)^2\right] \left(\frac{G}{\mathfrak{P}_2} - 1\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Wenn wir im Wesentlichen die Verhältnisse der *Crampton*'schen Lokomotive annehmen, dürfen wir setzen:

$$\frac{W}{G} = \frac{1}{20} \qquad \frac{G}{\mathfrak{P}_2} = \frac{G}{0{\cdot}44\, G} = 2{\cdot}3 \qquad s = 0{\cdot}05 \qquad l_2 = 6 \qquad h_2 = 1{\cdot}2 \qquad \Delta_2 = 2{\cdot}5 \qquad g = 0{\cdot}808 \text{ Meter}$$

und dann wird

$$\left.\begin{aligned} D &= 0{\cdot}2\, m\, V \\ Y &= \frac{1}{8178} \frac{m^3}{3\, m^2 - 1} V \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Dieser Werth von Y fällt selbst für einen sehr beträchtlichen Werth von V beinahe verschwindend klein aus, wenn m nur etwas verschieden von demjenigen Werth genommen wird, für welchen $3\, m^2 - 1 = 0$ ist, d. h. wenn m nicht gleich $\frac{1}{\sqrt{3}}$ also nicht gleich $0{\cdot}577$ genommen wird. Wenn also der Durchmesser D um etwas grösser als $0{\cdot}577 \times 0{\cdot}2\, V = 0{\cdot}1154\, V$ genommen wird, so fällt bereits das Nicken schon so schwach aus, dass es in praktischer Hinsicht gar nicht mehr zu beachten ist.

Diese numerische Rechnung ist nur insofern, als das Trägheitsmoment B nur annähernd bestimmt wurde, etwas unzuverlässig. Mit vollkommener Schärfe würde man das Trägheitsmoment des auf den Federn liegenden Baues durch Versuche bestimmen können, und dann liesse sich der einer gewissen Geschwindigkeit entsprechende vortheilhafteste, so wie auch der einer gewissen Geschwindigkeit entsprechende gefährliche Durchmesser ganz scharf durch Rechnung bestimmen. Nennen wir n die Anzahl der Umdrehungen der Triebaxe in einer Sekunde, so ist:

$$n = \frac{1}{\pi} \frac{V}{D}$$

oder wenn wir $D = 0{\cdot}2\, m\, V$ setzen

$$n = \frac{1{\cdot}6}{m}$$

Setzen wir $m = 1$, so wird $D = 0{\cdot}2\, V$ und $n = 1{\cdot}6$, d. h. wenn eine Lokomotive bestimmt ist, mit einer Geschwindigkeit V zu laufen, so ist es am vortheilhaftesten, den Triebrädern einen Durchmesser $0.2\, V$ zu geben, und diese besten Triebräder machen bei der Fahrgeschwindigkeit V in jeder Sekunde 1·6 Umdrehungen.

Setzen wir $m = 0.577$, so wird $D = 0{\cdot}1154\, V$ und $n = 2{\cdot}8$, d. h. wenn man den Triebrädern einer Lokomotive, die bestimmt ist, mit einer Geschwindigkeit V zu laufen einen Durchmesser $D = 0{\cdot}1154\, V$ gibt, so würden die Räder in jeder Sekunde $2{\cdot}8$ Umdrehungen machen, und dabei würde ein heftiges Nicken eintreten.

Aus den Gleichungen (20) folgt $\frac{G}{\mathfrak{P}_2} - 1 = \frac{\varDelta_2}{\varDelta_3}$ Führt man diesen Werth in (23) ein, so erhält man:

$$D = m\, V\, l_2 \sqrt{\frac{s}{g}} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{h_2}{l_2}\right)^2\right] \frac{1}{\varDelta_2\, \varDelta_3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Bezeichnet man mit δ den Radstand, setzt also $\varDelta_2 + \varDelta_3 = \delta$, so wird $\varDelta_2\, \varDelta_3 = \varDelta_2\, (\delta - \varDelta_2)$. Dieses Produkt wird am grössten, wenn $\varDelta_3 = \frac{\delta}{2}$ ist und wird dann $\frac{\delta}{2}\, \frac{\delta}{2} = \frac{\delta^2}{4}$. Der Durchmesser der Triebräder fällt also am kleinsten aus, wenn die Axe der Triebräder und der Mittelpunkt des Laufwerks gleich weit vom Schwerpunkt entfernt sind. Ist dieser Bedingung entsprochen, so wird:

$$D = 2\, m\, V\, \frac{l_2}{\delta} \sqrt{1 + \left(\frac{h_2}{l_2}\right)^2} \sqrt{\frac{s}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

und dann ist der Durchmesser der Triebräder der Fahrgeschwindigkeit V und der Länge des Baues direkt, dagegen dem Radstand verkehrt proportional.

Integration der Differenzialgleichungen, welche das Wogen und Nicken bestimmen, nach der Methode der Variation der Constanten.

Die Kenntniss der Gesetze der störenden Bewegungen ist von so bedeutender praktischer Wichtigkeit, dass es mir, um ganz sicher zu gehen, angemessen zu sein schien, die Integration der Differenzialgleichungen, aus welchen diese Gesetze hergeleitet werden können, auch nach der Methode der Variation der Constanten durchzuführen.

Diese Differenzialgleichungen sind die Gleichungen (1) Seite 159, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= -\, m\, \zeta + n\, \varphi + p\, K \left[\frac{P}{K} \sin.(\alpha_0 - \omega t) + \frac{P_1}{K} \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= +\, m_1\, \zeta - n_1\, \varphi + q_1\, K\, \frac{\frac{1}{2}(P + P_1)}{K} \sin.2(\alpha_0 - \omega t) + p_1\, K \left[\frac{P}{K} \sin.(\alpha_0 - \omega t) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{P_1}{K} \cos.(\alpha_0 - \omega t)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Um diese Gleichungen nach der Methode der Variationen der Constanten zu integriren, lassen wir zunächst die Glieder, welche trigonometrische Funktionen enthalten, weg und suchen die Integrale der einfacheren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} &= -\, m\, \zeta_1 + n\, \varphi_1 \\ \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= +\, m_1\, \zeta_1 - n_1\, \varphi_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Versuchen wir, ob diesen Gleichungen entsprochen werden kann, wenn man setzt:

$$\left.\begin{array}{l}\zeta_1 = \mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at \\ \varphi_1 = \mathfrak{C} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Setzt man diese Werthe von ζ und φ, so wie auch die durch zweimaliges Differenziren sich ergebenden Werthe von $\frac{d^2 \zeta_1}{dt^2}$ und $\frac{d^2 \varphi_1}{dt^2}$ in die Gleichungen (2), so werden dieselben:

$$\left.\begin{array}{l} - a^2 (\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) = - m (\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) + n. (\mathfrak{C} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at) \\ - \alpha^2 (\mathfrak{C} \sin. at + \mathfrak{D} \cos at) = + m_1 (\mathfrak{A} \sin. at + \mathfrak{B} \cos. at) - n_1 (\mathfrak{C} \sin. at + \mathfrak{D} \cos. at)\end{array}\right| \quad \ldots \quad (4)$$

Damit diese Gleichungen für jeden Werth von t bestehen können, muss sein:

$$- a^2 \mathfrak{A} = - m \mathfrak{A} + n \mathfrak{C} \qquad - a^2 \mathfrak{B} = - m \mathfrak{B} + n \mathfrak{D}$$

$$- a^2 \mathfrak{C} = + m_1 \mathfrak{A} - n_1 \mathfrak{C} \qquad - a^2 \mathfrak{D} = + m_1 \mathfrak{B} - n_1 \mathfrak{D}$$

Aus diesen vier Gleichheiten folgt:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} = \frac{-n}{a^2 - m} = \frac{a^2 - n_1}{-m_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

folglich auch

$$a = \pm \sqrt{\frac{m + n_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(m + n_1)^2}{4} + n m_1 - m n_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Wir erhalten also für a vier verschiedene Werthe und eben so auch für $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$. Es gibt demnach vier verschiedene Werthe von a und von $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$, durch welche die Gleichungen (3) den Gleichungen (2) genügen.

Setzt man

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \sqrt{\frac{m + n_1}{2} + \sqrt{\frac{(m + n_1)^2}{4} + n m_1 - m n_1}} \\ a_2 = \sqrt{\frac{m + n_1}{2} - \sqrt{\frac{(m + n_1)^2}{4} + n m_1 - m n_1}}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

so sind die vier Werthe von a:

$$+ a_1 \qquad - a_1 \qquad + a_2 \qquad - a_2$$

Wegen der linearen Form der Gleichungen (2) genügt denselben auch die Summe aller partikularen Integrale, die den vier Wurzelwerthen von a entsprechen. Bezeichnet man die Werthe von $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{D}$, welche den einzelnen Werthen von a entsprechen, dadurch,

dass man die Wurzelwerthe als Zeichen darunter schreibt, so sind die allgemeinen aus den vier partikularen Integralien zusammengesetzten Integrale der Gleichungen (2):

$$
\left.\begin{aligned}
\zeta_1 &= \left\{\begin{array}{l} \binom{\mathfrak{A}}{a_1}\sin.a_1 t + \binom{\mathfrak{B}}{a_1}\cos.a_1 t \\ -\binom{\mathfrak{A}}{-a_1}\sin.a_1 t + \binom{\mathfrak{B}}{-a_1}\cos.a_1 t \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} \binom{\mathfrak{A}}{a_2}\sin\,a_2 t + \binom{\mathfrak{B}}{a_2}\cos.a_2 t \\ -\binom{\mathfrak{A}}{a_2}\sin.a_2 t + \binom{\mathfrak{B}}{-a_2}\cos.a_2 t \end{array}\right\} \\
\varphi_1 &= \left\{\begin{array}{l} \binom{\mathfrak{C}}{a_1}\sin.a_1 t + \binom{\mathfrak{D}}{a_1}\cos.a_1 t \\ -\binom{\mathfrak{C}}{-a_1}\sin.a_1 t + \binom{\mathfrak{D}}{-a_1}\cos.a_1 t \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} \binom{\mathfrak{C}}{a_2}\sin.a_2 t + \binom{\mathfrak{D}}{a_2}\cos.a_2 t \\ -\binom{\mathfrak{C}}{a_2}\sin.a_2 t + \binom{\mathfrak{D}}{-a_2}\cos.a_2 t \end{array}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (8)
$$

Setzt man

$$\binom{\mathfrak{A}}{a_1} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_1} = \mathfrak{G}_1$$

$$\binom{\mathfrak{B}}{a_1} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_1} = \mathfrak{H}_1$$

$$\binom{\mathfrak{A}}{a_2} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_2} = \mathfrak{G}_2$$

$$\binom{\mathfrak{B}}{a_2} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_2} = \mathfrak{H}_2$$

und berücksichtiget, dass wegen (5):

$$\binom{\mathfrak{C}}{a_1} - \binom{\mathfrak{C}}{-a_1} = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{A}}{a_1} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_1}\right] = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\,\mathfrak{G}_1$$

$$\binom{\mathfrak{C}}{a_2} - \binom{\mathfrak{C}}{-a_2} = -\frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{A}}{a_2} - \binom{\mathfrak{A}}{-a_2}\right] = -\frac{-m_1}{a_2^2 - n_1}\,\mathfrak{G}_2$$

$$\binom{\mathfrak{D}}{a_1} + \binom{\mathfrak{D}}{-a_1} = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{B}}{a_1} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_1}\right] = -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\,\mathfrak{H}_1$$

$$\binom{\mathfrak{D}}{a_2} + \binom{\mathfrak{D}}{-a_2} = -\frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\left[\binom{\mathfrak{B}}{a_2} + \binom{\mathfrak{B}}{-a_2}\right] = -\frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\,\mathfrak{H}_2$$

ist, so können die Integrale (8) geschrieben werden, wie folgt:

$$
\left.\begin{aligned}
\zeta_1 &= \mathfrak{G}_1\sin.a_1 t + \mathfrak{H}_1\cos.a_1 t + \mathfrak{G}_2\sin.a_2 t + \mathfrak{H}_2\cos a_2 t \\
\varphi_1 &= -\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}(\mathfrak{G}_1\sin.a_1 t + \mathfrak{H}_1\cos.a_1 t) - \frac{m_1}{a_2^2 - n_1}(\mathfrak{G}_2\sin\,a_2 t + \mathfrak{H}_2\cos.a_2 t)
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (9)
$$

Dies sind also die Integrale der Gleichungen (2) und $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_1\ \mathfrak{H}_2$ sind die vier Constanten der Integration, welche diese zwei Gleichungen des zweiten Grades erfordern.

Um nun die Gleichungen (1) zu integriren, wenden wir die von *Lagrange* erfundene Methode der Variation der Constanten an. Diese Methode besteht darin, dass man $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_1\ \mathfrak{H}_2$ als solche Funktionen von t zu bestimmen sucht, dass die Ausdrücke (9) auch den Gleichungen (1) genügen müssen.

Nennt man für einen Augenblick φ_1 und ζ_1 die Differenzialquotienten von φ und ζ, insofern man $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{H}_1\ \mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_2$ als constante Grössen ansieht und $\varphi_2\ \zeta_2$ die Differenzialquotienten von φ und ζ nach t, insofern man nur allein $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{H}_1\ \mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_2$ als veränderlich betrachtet, so ist:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \zeta_1 + \zeta_2 \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_1 + \varphi_2 \qquad \text{. (10)}$$

Damit aber die Werthe von φ und ζ, welche die Gleichungen (9) darbieten, sowohl den Gleichungen (2), als auch den Gleichungen (1) genügen können, wenn man $\mathfrak{G}_1\ \mathfrak{H}_1\ \mathfrak{G}_2\ \mathfrak{H}_2$ als Funktionen von t ansieht, muss:

$$\zeta_2 = 0 \qquad \varphi_2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\zeta}{dt} = \zeta_1 \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_1$$

sein.

Man erhält demnach aus (9):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} + \cos. a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt} + \sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} + \cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt} \\ 0 &= \frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\left(\sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} + \cos. a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt}\right) + \frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\left(\sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} + \cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \text{. . (11)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= a_1 (\mathfrak{G}_1 \cos. a_1 t - \mathfrak{H}_1 \sin. a_1 t) + a_2 (\mathfrak{G}_2 \cos. a_2 t - \mathfrak{H}_2 \sin. a_2 t) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{m_1 a_1}{a_1^2 - n_1} (\mathfrak{G}_1 \cos. a_1 t - \mathfrak{H}_1 \sin. a_1 t) - \frac{a_2 m_1}{a_2^2 - n_1} (\mathfrak{G}_2 \cos. a_2 t - \mathfrak{H}_2 \sin. a_2 t) \end{aligned}\right\} \text{. . (12)}$$

Da a_1 nicht $= a_2$ ist, so können die Gleichungen (11) nur bestehen, wenn:

$$\left.\begin{aligned} \sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} + \cos a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt} &= 0 \\ \sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} + \cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{. (13)}$$

Durch nochmalige vollständige Differenziation dieser zwei Gleichungen findet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{dt^2} = &- a_1^2 (\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) - a_2^2 (\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t) + a_1 \left(\cos. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} - \sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt}\right) \\ &+ a_2 \left(\cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} - \sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \text{(14)}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = &+ \frac{m_1 a_1^2}{a_1^2 - n_1}(\mathfrak{G}_1 \sin. a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos. a_1 t) + \frac{a_2^2 m_1}{a_2^2 - n_1}(\mathfrak{G}_2 \sin. a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos. a_2 t)\\ &- \frac{m_1 a_1}{a_1^2 - n_1}\left(\cos. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} - \sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt}\right)\\ &- \frac{m_1 a_2}{a_2^2 - n_1}\left(\cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} - \sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt}\right)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (14)$$

Substituirt man die Werthe von $\varphi\ \zeta\ \frac{d^2\varphi}{dt^2}\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}$, welche die Ausdrücke (9) uud (14) darbieten in die zu integrirenden Gleichungen (1) und berücksictiget, dass wegen (5):

$$(a_1^2 - n_1)(a_1^2 - m) = n\, m_1 \qquad (a_2^2 - n_1)(a_2^2 - m) = n\, m_1$$

ist, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}&a_1\left(\cos. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} - \sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt}\right) + a_2\left(\cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} - \sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt}\right) = p\,[P \sin. (\alpha_0 - \omega t)\\ &\qquad\qquad + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]\\ &- \frac{m_1 a_1}{a_1^2 - n_1}\left(\cos. a_1 t \frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} - \sin. a_1 t \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt}\right) - \frac{m_1 a_2}{a_2^2 - n_1}\left(\cos. a_2 t \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} - \sin. a_2 t \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt}\right)\\ &\qquad = \frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + p_1\,[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]\end{aligned}\right\} \quad . \quad (15)$$

Aus diesen zwei Gleichungen, in Verbindung mit den Gleichungen (5) und (13) findet man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{G}_1}{dt} &= + \frac{n \cos. a_1 t}{a_1(a_2^2 - a_1^2)}\left\{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p\, m_1}{a_2^2 - n_1}\right)[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]\right\}\\ \frac{d\mathfrak{H}_1}{dt} &= - \frac{n \sin. a_1 t}{a_1(a_2^2 - a_1^2)}\left\{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p\, m_1}{a_2^2 - n_1}\right)[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)]\right\}\\ \frac{d\mathfrak{G}_2}{dt} &= - \frac{n \cos. a_2 t}{a_2(a_2^2 - a_1^2)}\left\{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p\, m_1}{a_1^2 - n_1}\right)[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \alpha t)]\right\}\\ \frac{d\mathfrak{H}_2}{dt} &= + \frac{n \sin. a_2 t}{a_2(a_2^2 - a_1^2)}\left\{\frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \left(p_1 + \frac{p\, m_1}{a_1^2 - n_1}\right)[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos (\alpha_0 - \omega t)]\right\}\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Durch Integration des ersten und zweiten dieser Ausdrücke findet man:

$$\mathfrak{G}_1 = \frac{-n}{a_1(a_2^2-a_1^2)}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}q_1(P+P_1)\left[\frac{\cos.\left[2\alpha_0+(a_1-2\omega)t\right]}{a_1-2\omega}-\frac{\cos.\left[(a_1+2\omega)t-2\alpha_0\right]}{a_1+2\omega}\right] \\ \frac{1}{2}\left(p_1+\frac{p\,m_1}{a_2^2-n_1}\right)\left\{\begin{array}{l} P\left[\frac{\cos.\left[\alpha_0+(a_1-\omega)t\right]}{a_1-\omega}-\frac{\cos.\left[(a_1+\omega)t-\alpha_0\right]}{a_1+\omega}\right] \\ P_1\left[-\frac{\sin.\left[\alpha_0+(a_1-\omega)t\right]}{a_1-\omega}-\frac{\sin.\left[(a_1+\omega)t-\delta\alpha_0\right]}{a_1+\omega}\right]\end{array}\right\}\end{array}\right\}+\mathfrak{G}$$

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{-n}{a_1(a_2^2-a_1^2)}\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{4}q_1(P+P_1)\left[-\frac{\sin.\left[2\alpha_0+(a_1-2\omega)t\right]}{a_1-2\omega}+\frac{\sin.\left[(a_1+2\omega)t-2\alpha_0\right]}{a_1+2\omega}\right] \\ +\frac{1}{2}\left(p_1+\frac{q\,m_1}{a_2^2-n_1}\right)\left\{\begin{array}{l} P\left[-\frac{\sin.\left[\alpha_0+(a_1-\omega)t\right]}{a_1-\omega}+\frac{\sin.\left[(a_1+\omega)t-\alpha_0\right]}{a_1+\omega}\right] \\ P_1\left[-\frac{\cos.\left[\alpha_0+(a_1-\omega)t\right]}{a_1-\omega}-\frac{\cos.\left[(a_1+\omega)t-\alpha_0\right]}{a_1+\omega}\right]\end{array}\right\}\end{array}\right\}+\mathfrak{H}$$

wobei $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei neue Integrationsconstanten bezeichnen. Multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit $\sin.\, a_1 t$ und die zweite mit $\cos.\, a_1 t$ und addirt sie hierauf, so findet man nach einer Reihe von Reduktionen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{G}_1 \sin.\, a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos.\, a_1 t = +\frac{1}{2}\frac{n\,q_1(P+P_1)}{(a_2^2-a_1^2)(a_1^2-4\omega^2)}\sin.\,2(\alpha_0-\omega t) \\ \qquad + \frac{n\left(p_1+\frac{p\,m_1}{a_2^2-n_1}\right)}{(a_2^2-a_1^2)(a_1^2-\omega^2)}\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.(\alpha_0-\omega t)\right] \\ \qquad + \mathfrak{G}\sin\, a_1 t + \mathfrak{H}\cos.\, a_1 t \end{array}\right\} \quad (17)$$

Vertauscht man in diesem Ausdruck a_1 mit a_2 und a_2 mit a_1, so findet man ohne weitere Rechnung:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{G}_2 \sin.\, a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos.\, a_2 t = -\frac{1}{2}\frac{n\,q_1(P+P_1)}{(a_2^2-a_1^2)(a_2^2-4\omega^2)}\sin.\,2(\alpha_0-\omega t) \\ \qquad - \frac{n\left(p_1+\frac{p\,m_1}{a_1^2-n_1}\right)}{(a_2^2-a_1^2)(a_2^2-\omega^2)}\left[P\sin.(\alpha_0-\omega t)+P_1\cos.(a_0-\omega t)\right] \\ \qquad + \mathfrak{J}\sin.\, a_2 t + \mathfrak{K}\cos.\, a_2 t \end{array}\right\} \quad (18)$$

wobei wiederum $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ die Integrationsconstanten bezeichnen.

Setzt man diese Werthe von $\mathfrak{G}_1 \sin.\, a_1 t + \mathfrak{H}_1 \cos.\, a_1 t$ und von $\mathfrak{G}_2 \sin.\, a_2 t + \mathfrak{H}_2 \cos.\, a_2 t$ in die Gleichungen (9), so findet man endlich:

$$\left.\begin{aligned}\zeta = &+ \frac{\frac{1}{2} n q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - 4\omega^2)\ (a_1^2 - 4\omega^2)} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \\ &- \frac{n}{a_2^2 - a_1^2}\left[\frac{p_1 (a_1^2 - n_1) + p m_1}{(a_2^2 - \omega^2)(a_1^2 - n_1)} - \frac{p_1 (a_2^2 - n_1) + p m_1}{(a_1^2 - \omega^2)(a_2^2 - n_1)}\right]\left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right] \\ &+ \mathfrak{G} \sin. a_1 t + \mathfrak{H} \cos. a_1 t + \mathfrak{J} \sin. a_2 t + \mathfrak{K} \cos. a_2 t\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi = &\frac{m_1}{a_1^2 - n_1}\left\{-\frac{1}{2}\frac{n q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_1^2 - 4\omega^2)} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) - \frac{n\left(p_1 + \frac{p m_1}{a_2^2 - n_1}\right)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_1^2 - \omega^2)}\left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right]\right\} \\ &+ \frac{m_1}{a_2^2 - n_1}\left\{+\frac{1}{2}\frac{n q_1 (P + P_1)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_2^2 - 4\omega^2)} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) + \frac{n\left(p_1 + \frac{p m_1}{a_1^2 - n_1}\right)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_2^2 - \omega^2)}\left[P. \sin (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right]\right\} \\ &- \frac{m_1}{a_1^2 - n_1}(\mathfrak{G} \sin. a_1 t + \mathfrak{H} \cos. a_1 t) - \frac{m_1}{a_2^2 - n_1}(\mathfrak{J} \sin. a_2 t + \mathfrak{K} \cos. a_2 t)\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Diese beiden Ausdrücke können noch bedeutend umgestaltet werden.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$(a_2^2 - 4\omega^2)(a_1^2 - 4\omega^2) = k.$$

Durch Entwicklung findet man:

$$K = a_1^2 a_2^2 - 4\omega^2 (a_1^2 + a_2^2) + 16\omega^4.$$

Setzt man für a_1 und a_2 die Werthe, welche die Gleichungen (7) darbieten, so findet man:

$$k = \left[\frac{m + n_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{m + n_1}{2}\right)^2 + n m_1 - m n_1}\right]\left[\frac{m + n_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{m + n_1}{2}\right)^2 + n m_1 - m n_1}\right]$$
$$- 4\omega^2 (m + n_1) + 16\omega^4.$$

Durch weitere Reduktion findet man:

$$k = (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1) - n m_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

Setzen wir ferner zur Abkürzung:

$$\frac{p_1 (a_1^2 - n_1) + p m_1}{(a_2^2 - \omega^2)(a_1^2 - n_1)} - \frac{p (a_2^2 - n_1) + p m_1}{(a_1^2 - \omega^2)(a_2^2 - n_1)} = h$$

Bringt man diese Brüche auf einerlei Nenner, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$h = (a_1^2 - a_2^2) \frac{p_1 (a_1^2 - n_1)(a_2^2 - n_1) - p\, m_1 (n_1 - \omega^2)}{(a_1^2 - \omega^2)(a_2^2 - \omega^2)(a_1^2 - n_1)(a_2^2 - n_1)}$$

Mit Berücksichtigung der Ausdrücke (7) findet man aber:

$$(a_1^2 - n_1)(a_2^2 - n_1) = - n\, m_1$$

$$(a_1^2 - \omega^2)(a_2^2 - \omega^2) = (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1) - n\, m_1$$

Daher wird:

$$h = \frac{(a_2^2 - a_1^2)}{n} \frac{- p (\omega^2 - n_1) + p_1 n}{n\, m_1 - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Vermittelst der Werthe, welche die Ausdrücke (21) und (22) für k und h darbieten, wird der Werth von ζ, Gleichung (19):

$$\zeta = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{2} \frac{n\, q_1 (P + P_1)}{n\, m_1 - (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1)} \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) \\ - \frac{p_1 n - p (\omega^2 - n_1)}{n\, m_1 - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \right] \\ + \mathfrak{G} \sin. a_1 t + \mathfrak{H} \cos. a_1 t + \mathfrak{J} \sin. a_2 t + \mathfrak{K} \cos. a_2 t \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (23)$$

Der Ausdruck (20) für φ kann geschrieben werden wie folgt:

$$\varphi = \frac{m_1 n}{a_2^2 - a_1^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} q_1 (P + P_1) \sin. 2 (\alpha_0 - \omega t) \left[- \frac{1}{(a_1^2 - n_1)(a_1^2 - 4\omega^2)} + \frac{1}{(a_2^2 - n_1)(a_2^2 - 4\omega^2)} \right] \\ + \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t) \right] \left\{ \frac{p_1 + \frac{p\, m_1}{a_1^2 - n_1}}{(a_2^2 - \omega^2)(a_2^2 - n_1)} - \frac{p_1 + \frac{p\, m_1}{a_2^2 - n_1}}{(a_1^2 - \omega^2)(a_1^2 - n_1)} \right\} \end{array} \right\} \quad (24)$$

$$- \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} (\mathfrak{G} \sin. a_1 t + \mathfrak{H} \cos. a_1 t) - \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} (\mathfrak{J} \sin. a_2 t + \mathfrak{K} \cos. a_2 t)$$

Setzen wir zur Abkürzung.

$$- \frac{1}{(a_1^2 - n_1)(a_1^2 - 4\omega^2)} + \frac{1}{(a_2^2 - n_1)(a_2^2 - 4\omega^2)} = h_1$$

Bringt man diese Brüche auf gleiche Nenner, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$h_1 = (a_1^2 - a_2^2) \frac{a_1^2 + a_2^2 - 4\omega^2 - n_1}{(a_1^2 - n_1)(a_2^2 - n_1)(a_1^2 - 4\omega^2)(a_2^2 - 4\omega^2)}$$

Es ist aber vermöge der Ausdrücke (7)

$$\left.\begin{array}{ll} a_1^2 + a_2^2 = m + n_1 & (a_1^2 - n_1)(a_2^2 - n) = - n m_1 \\ (a_1^2 - 4\omega^2)(a_2^2 - 4\omega^2) = (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1) - n m_1 & \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Daher wird:

$$h_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2}{n m_1} \; \frac{4\omega^2 - m}{n m_1 - (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Setzen wir endlich zur Abkürzung:

$$\frac{p_1 + \dfrac{p m_1}{a_1^2 - n_1}}{(a_2^2 - \omega^2)(a_2^2 - n_1)} - \frac{p_1 + \dfrac{p m_1}{a_2^2 - n_1}}{(a_1^2 - \omega^2)(a_1^2 - n_1)} = k_1$$

Bringt man diese Brüche auf einerlei Nenner, so findet man, aber erst nach mehreren Reduktionen:

$$k_1 = (a_2^2 - a_1^2) \frac{- p m_1 - p_1 (a_1^2 + a_2^2 - \omega^2 - n_1)}{(a_1^2 - \omega^2)(a_2^2 - \omega^2)(a_1^2 - n_1)(a_2^2 - n_1)}.$$

Dieser Ausdruck wird wegen der Werthe (25)

$$k_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2}{n m_1} \; \frac{- p m_1 + p_1 (\omega^2 - m)}{n m_1 - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Vermittelst der Werthe, welche (25) und (27) für h_1 und k_1 darbieten, wird der Ausdruck (24) für φ:

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{2} \frac{q_1 (P + P_1)(4\omega^2 - m)}{n m_1 - (4\omega^2 - m)(4\omega^2 - n_1)} \sin. 2(\alpha_0 - \omega t) \\ + \frac{-p m_1 + p_1 (\omega^2 - m)}{n m_1 - (\omega^2 - m)(\omega^2 - n_1)} \left[P \sin. (\alpha_0 - \omega t) + P_1 \cos. (\alpha_0 - \omega t)\right] \\ - \frac{m_1}{a_1^2 - n_1} \left[\mathfrak{G} \sin. a_1 t + \mathfrak{H} \cos. a_1 t\right] - \frac{m_1}{a_2^2 - n_1} \left[\mathfrak{J} \sin. a_2 t + \mathfrak{K} \cos. a_2 t\right] \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (28)$$

Die Ausdrücke (23) und (28) für ζ und φ stimmen mit denjenigen überein, welche wir Seite 162 gefunden haben. Die Methode der Variation der Constanten hat uns also zu denselben Resultaten geführt, wie das zuerst befolgte Integrationsverfahren, welches, streng genommen, nur ein Versuchen war.

VII.

Festigkeits - Verhältnisse.

Theorie der Federn.

Gleichgewicht eines elastischen Stabes.

Ein im natürlichen Zustand nach irgend einem Gesetz gekrümmter stabförmiger Körper mit ungleichen jedoch nicht viel von einander abweichenden Querschnitten sei unter der Einwirkung von äussern nur auf Biegung wirkenden Kräften im Gleichgewicht; es sollen die Gesetze dieses Gleichgewichtszustandes bestimmt werden.

Es sei für den natürlichen Zustand: $A_0 B_0$, Tab. XVI, Fig. 65, die krummlinige Axe des Stabes, d. h. die Verbindungslinie der Schwerpunkte sämmtlicher Querschnitte des Stabes, $m_0 n_0 = ds$ ein unendlich kleines Element der Axe, $c_0 n_0 = \varrho_0$ der dem Punkt n_0 entsprechende Krümmungshalbmesser der Axe. Für den unter der Einwirkung der äusseren Kräfte gebogenen Stab sei $m n$, Fig. 66, das Axenelement und $c n = \varrho$ der Krümmungshalbmesser, der dem Punkt n entspricht.

Fig. 67 sei der Querschnitt des Stabes bei n $\quad n q = \xi \quad \overline{q q} = v \quad \overline{n d} = z \quad \overline{n b} = z_1$.

Da wir annehmen, dass der Stab durch die äussern Kräfte weder gedehnt noch verkürzt und auch nicht verwunden, sondern nur gebogen werde, und dass diese Biegung nur eine schwache sei, so ist es erlaubt anzunehmen: 1) dass durch die Biegung jedes Axenelement seine Länge nicht ändert, dass also $m n = m_0 n_0 = ds$ gesetzt werden dürfe, 2) dass alle Moleküle, welche ursprünglich in einem Querschnitt $b_0 n_0 d_0$ lagen, während des Vorganges der Biegung stets in einer auf der gebogenen Axe normalen Ebene $b n d$ bleiben. Ist $\varrho < \varrho_0$, so sind alle oberhalb $m n$ liegenden Faserstückchen gedehnt, alle unterhalb $m n$ liegenden Faserstückchen verkürzt. Setzt man $\widehat{m_0 c_0 n_0} = \varphi_0$ $\widehat{m c n} = \varphi$, so ist wie aus den Figuren erhellt:

$$\overline{p_0 q_0} = (\varrho_0 + \xi)\,\varphi_0 \qquad \overline{p q} = (\varrho + \xi)\,\varphi$$

oder weil $\quad \widehat{m_0 n_0} = \widehat{m n} = ds = \varrho_0 \varphi_0 = \varrho \varphi$ ist.

$$\overline{p_0 q_0} = (\varrho_0 + \xi)\frac{ds}{\varrho_0} \qquad \overline{p q} = (\varrho + \xi)\frac{ds}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Hieraus folgt

$$\overline{p q} - \overline{p_0 q_0} = \xi\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Hiernach ist die Längenausdehnung des Faserstückchens $\overline{p_0 q_0}$ berechnet.

Bezeichnet man durch ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht und durch i die Intensität der Spannung in dem Faserstückchen p q, d. h. die auf die Flächeneinheit bezogene Spannung, so hat man nach einem bekannten innerhalb der Elastizitätsgrenze geltenden Ausdehnungsgesetz:

$$\overline{p\,q} - \overline{p_0\,q_0} = \overline{p_0\,q_0}\,\frac{i}{\varepsilon}$$

Wegen (1) und (2) folgt aus dieser Gleichung

$$i = \frac{\varepsilon\,\xi\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)}{1 + \frac{\xi}{\varrho_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Wir wollen annehmen, dass die Querschnittsdimensionen des Stabes im Verhältniss zum Krümmungshalbmesser ϱ_0 ungemein kleine Grössen seien; dann ist es erlaubt $\frac{\xi}{\varrho_0}$ gegen die Einheit zu vernachlässigen, und unter dieser Voraussetzung folgt aus (3)

$$i = \varepsilon\,\xi\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die das Flächenelement $v\,d\,\xi$ spannende Kraft ist $\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) v\,\xi\,d\,\xi$, das statische Moment dieser Kraft in Bezug auf eine durch n gehende Drehungsaxe ist demnach $\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) v\,\xi^2 d\,\xi$. Wir erhalten daher für die Summe der statischen Momente aller in dem Querschnitt b n d vorkommenden Spannungen und Pressungen folgenden Werth:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\int_{-z_1}^{+z} v\,\xi^2\,d\,\xi$$

Das Integrale $\int_{-z_1}^{+z} v\,\xi^2 d\,\xi$ ist das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf eine durch n gehende auf die Ebene der Axe des Stabes senkrechte Drehungsaxe. Setzen wir der Kürze wegen:

$$\int_{-z_1}^{+z} v\,\xi^2\,d\,\xi = \mu$$

so wird das Moment der Elastizitätskräfte:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\mu$$

Bezeichnen wir durch M die algebraische Summe der statischen Momente aller

äussern auf den Stab einwirkenden Kräfte in Bezug auf die durch n gehende Drehungsaxe, so hat man für den Gleichgewichtszustand:

$$M = \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \mu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Wir haben angenommen, dass die Krümmung des Stabes durch die biegenden Kräfte zunehme. Wenn das Gegentheil stattfindet muss $\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}$ statt $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}$ gesetzt werden.

Nennt man J die Spannung in dem Faserstückchen c d, so erhält man zur Bestimmung derselben vermöge (4)

$$J = \varepsilon z \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt:

$$M = J \frac{\mu}{z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Die Werthe von $\frac{\mu}{z}$ findet man in meinen Resultaten für den Maschinenbau auf der V. Figurentafel für verschiedene Querschnittsformen zusammengestellt. Es sind dies die Werthe von E, d. h. man hat

$$\frac{\mu}{z} = E \qquad M = J E \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Stimmen alle Querschnitte des Stabes überein, so ist E eine constante Grösse. Sind die Querschnitte des Stabes ungleich, so ist E veränderlich. Nennt man x und y die Coordinaten des Punktes n in Bezug auf ein rechtwinkliges, in der Ebene der Axenlinie liegendes Axensystem, so hat man für den Krümmungshalbmesser ϱ folgenden Ausdruck:

$$\varphi = \pm \frac{ds^3}{dx\, d^2 y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

welcher Ausdruck jedoch voraussetzt, dass man $d^2 x = 0$ genommen habe. Das obere Zeichen gilt, wenn die Axenlinie des Stabes gegen die Abscissenaxe convex, das untere wenn sie gegen die Abcissenaxe concav gekrümmt ist.

Wenn die Krümmung des Stabes sowohl in seinem natürlichen, wie auch im gebogenen Zustand nur schwach ist, kann man der Abscissenaxe immer eine solche Lage geben, dass $\frac{dy}{dx}$ gegen die Einheit eine sehr kleine Grösse ist, so dass also wegen $ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ annähernd $ds = dx$ gesetzt werden darf. Unter dieser Voraussetzung wird:

$$\varrho = \pm \frac{dx^2}{d^2 y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

und wenn man diesen Werth in (5) einführt, so findet man:

$$\pm\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\varrho_0}+\frac{M}{\varepsilon\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Ist ϱ_0 und M als Funktion von x gegeben, so erhält man durch Integration dieser Gleichung die Axengestalt des Stabes in seinem gebogenen Zustand.

Berechnung der Wirkungsgröße, welche der Biegung eines Stabes entspricht.

Um diese Wirkungsgrösse zu berechnen, suchen wir zunächst diejenige, welche erforderlich ist, um ein Stabelement von der Länge ds aus dem natürlichen Zustand, dem ein Krümmungshalbmesser ϱ_0 entspricht, in einen Krümmungszustand zu bringen, für welchen der Krümmungshalbmesser ϱ ist.

In einem beliebigen Moment des Aktes der Biegung sei r der Krümmungshalbmesser des Elementes ds, dann ist vermöge Gleichung (2) $\xi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho}\right)ds$ die Verlängerung des Faserstückchens $p_0\,q_0$ und $\xi\,ds\,\frac{d\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho_0}\right)}{dr}dr$ die Aenderung dieser Ausdehnung, wenn die Biegung um unendlich wenig fortschreitet. Die Intensität der Spannung in dem Querschnitt $v\,d\xi$ ist für den Krümmungshalbmesser r, vermöge (4), $\varepsilon\,\xi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho_0}\right)$. Das der Aenderung der Ausdehnung entsprechende Element der Wirkung ist daher:

$$v\,d\xi\times\varepsilon\,\xi\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho_0}\right)\times\xi\,ds\,d\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho_0}\right)$$

Integrirt man diesen Ausdruck zunächst in Bezug auf ξ von $\xi=-z_1$ bis $\xi=+z$, sodann in Bezug auf r von $r=\varrho_0$ bis $r=\varrho$, endlich in Bezug auf s und dehnt dieses letztere Integrale auf die ganze Länge l des Stabes aus, so erhält man für die Wirkungsgrösse W, die erforderlich ist um den Stab aus dem natürlichen Zustand in den Krümmungszustand zu versetzen, dem ein Krümmungshalbmesser ϱ entspricht, folgenden Ausdruck:

$$W=\frac{\varepsilon}{2}\int_0^l\left[\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)^2\int_{z_1}^{+z}\xi^2\,v\,d\xi\right]ds$$

Oder wenn man wie früher das Trägheitsmoment des Querschnittes mit μ bezeichnet

$$W=\frac{\varepsilon}{2}\int_0^l\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)^2\mu\,ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Für einen Stab von durchaus gleichen Querschnitten ist μ constant, und dann wird:

$$W=\frac{\varepsilon\mu}{2}\int_0^l\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)^2 ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Die Gleichung (12) ist richtig, es mag der Zustand, dem der Krümmungshalbmesser ϱ entspricht, ein Gleichgewichtszustand sein oder nicht.

Ist der Zustand, dem der Krümmungshalbmesser ϱ entspricht, ein Gleichgewichtszustand, so kann man vermöge (6) und (7) $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}$ entweder durch J oder durch M ausdrücken, und dann erhält man:

$$W = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^l \frac{J^2 \mu}{z^2} ds \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

$$W = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^l \frac{M^2}{\mu} ds \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Vermittelst der Gleichung (12) findet man für die Wirkungsgrösse, die erforderlich ist, um einen Stab, dem im natürlichen Zustand ein Krümmungshalbmesser ϱ_0 entspricht, aus einem gebogenen Zustand, dem ein Krümmungshalbmesser ϱ entspricht, in einen anderen gebogenen Zustand zu versetzen, dem ein Krümmungshalbmesser ϱ_1 zukommt, folgenden Ausdruck:

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_0} \right)^2 - \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right)^2 \right] \mu \, ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Wir wollen die bis jetzt gewonnenen Resultate auf einige spezielle Fälle anwenden.

Wirkung, um einen im natürlichen Zustande kreisbogenförmigen Stab mit gleichen Querschnitten in einen anderen kreisbogenförmigen Zustand zu versetzen.

Nennt man ϱ_0 den constanten Halbmesser, der dem natürlichen Zustand entspricht, ϱ den constanten Halbmesser des gebogenen Zustandes, so hat man vermöge (13)

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right)^2 \mu l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Wenn ϱ und ϱ_0 unveränderliche Werthe haben, ist auch vermöge (6) J constant. Durch Integration der Gleichung (14) findet man daher auch:

$$W = \frac{J^2 \mu l}{2 \varepsilon z^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Für rechtwinklige, kreisförmige, ellyptische Querschnitte ist $\frac{\mu}{z^2}$ dem Querdurchschnitt, demnach $\frac{\mu}{z^2} l$ dem Volumen des Stabs proportional. Nennt man $\mathfrak{V}$ das Volumen

des Stabes, so findet man vermittelst den auf Tafel V. meiner Resultate zusammengestellten Werthen von $E = \frac{\mu}{z.}$

1) Wenn der Querschnitt des Stabes ein Rechteck ist.

$$\frac{\mu l}{z^2} = \frac{1}{3}\mathfrak{B} \quad \text{und} \quad W = \frac{1}{6}\frac{J^2}{\varepsilon}\mathfrak{B} \qquad (19)$$

2) Wenn der Querschnitt des Stabes ein Kreis vom Durchmesser d ist.

$$\frac{\mu l}{z^2} = \frac{1}{4}\mathfrak{B} \qquad W = \frac{1}{8}\frac{J^2}{\varepsilon}\mathfrak{B} \qquad (20)$$

3) Wenn der Querschnitt des Stabes ellyptisch ist.

$$\frac{\mu l}{z^2} = \frac{1}{4}\mathfrak{B} \qquad W = \frac{1}{8}\frac{J^2}{\varepsilon}\mathfrak{B} \qquad (21)$$

Wenn ein aus gleich dicken, jedoch aus ungleich langen Schienen bestehendes Federwerk, das im natürlichen Zustand in allen Theilen nach einem und demselben Halbmesser gekrümmt ist, durch äussere Kräfte so gebogen wird, dass alle Schienen übereinstimmende kreisbogenförmige Krümmungen annehmen, so findet auf jede Schiene die Gleichung (19) ihre Anwendung und es ist für alle Schienen der Werth von J gleich gross, man hat daher, wenn $\mathfrak{B}$ das totale Volumen des Federwerks bezeichnet.

$$W = \frac{1}{6}\frac{J^2}{\varepsilon}\mathfrak{B} \qquad (22)$$

Bezeichnet man für eine im natürlichen und im gebogenen Zustand kreisbogenförmig gebogene Schiene f die durch die Biegung verursachte Senkung des Mittelpunktes der Schiene, 2 l die ganze Länge der Schiene, so hat man annähernd

$$f = \frac{l^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right) \qquad (23)$$

Vermittelst dieses Werthes kann die Wirkungsgrösse W Gleichung (12), welche der Krümmungsänderung entspricht, auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$W = 2\,\varepsilon\,\mu\,\frac{f^2}{l^3} \qquad (24)$$

Biegung eines am einen Ende eingespannten Stabes.

Ein Stab AB (Fig. 68) sei im natürlichen Zustand gerade, habe überall gleiche Querschnitte, sei bei B eingespannt, bei A belastet.

Setzen wir $An = x$ $mn = y$ und erlauben uns ds mit dx zu verwechseln, so hat man $M = Px$ und es wird vermöge Gleichung (15).

$$W = \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^l \frac{P^2 x^2 dx}{\mu} = \frac{1}{6}\frac{P^2 l^3}{\varepsilon\mu} \qquad (25)$$

Nennen wir die in dem Querschnitt bei B eintretende grösste Spannungsintensität $\mathfrak{J}$ so ist wegen Gleichung (7).

$$\mathfrak{J} = \frac{z}{\mu} P l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

Elimnirt man aus (25) und (26) den Werth von P so findet man

$$W = \frac{1}{6} \frac{J^2}{\varepsilon} \frac{\mu l}{z^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

Biegung eines auf zwei Stützen liegenden Stabes.

Ein bei A und B (Fig. 69) auf zwei Stützen liegender, im natürlichen Zustand gerader Stab von gleichen Querschnitten werde bei C durch ein Gewicht P belastet.

Nennen wir für einen zwischen A und C gelegenen Punkt m $An = x$ $mn = y$, für einen zwischen B und C gelegenen Punkt m_1 $Bn_1 = x$ $m_1 n_1 = y_1$.

Die Pressungen, welche die Stützpunkte A und B erleiden, sind $\frac{P c_1}{c + c_1}$, $\frac{P c}{c + c_1}$ die Momente, welche auf die Querschnitte bei m und m_1 einwirken, sind demnach

$$\frac{P c_1}{c + c_1} x \qquad \frac{P c}{c + c_1} x_1$$

Vermöge der Gleichung (15) ist daher die Wirkung um den Stab bis in den Gleichgewichtszustand zu bringen:

$$W = \frac{1}{2 \varepsilon \mu} \int_0^c \left(\frac{P c_1}{c + c_1} x \right)^2 dx + \frac{1}{2 \varepsilon \mu} \int_0^{c_1} \left(\frac{P c}{c + c_1} x_1 \right)^2 dx_1$$

oder:

$$W = \frac{1}{6 \varepsilon \mu} \frac{P^2 c^2 c_1^2}{c + c_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

Nennt man $\mathfrak{J}$ das Maximum der Spannungsintensität im Querschnitt bei C, so hat man wegen Gleichung (7)

$$J^2 = \frac{P c c_1}{c + c} \frac{z}{\mu} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

Durch Elimination von P aus diesen zwei Gleichungen folgt: wenn man $c + c_1 = l$ setzt:

$$W = \frac{1}{6} \frac{J^2}{\varepsilon} \frac{\mu l}{z^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem in der vorhergehenden Aufgabe für W gefundenen Werth überein.

Gleichgewichts-Verhältnisse eines Federwerkes mit nicht zugespitzten Endstücken.

Wir legen uns die Aufgabe vor, die Gleichgewichtsgesetze eines Federwerkes zu suchen, das im natürlichen Zustande folgende Eigenschaften hat: 1) die Schienenbreiten seien von einerlei Grösse; 2) im natürlichen Zustand seien alle Schienen nach einem und demselben jedoch ziemlich grossen Halbmesser kreisbogenförmig gekrümmt; 3) die Dicke einer einzelnen Schiene sei von der Mitte an bis an die äussersten Endpunkte hin von einerlei Grösse; 4) die Dicken der einzelnen Schienen seien ungleich; 5) jede Schiene sei in der Mitte und an den beiden Enden mit dünnen Metallblättchen von geringer Länge versehen, so dass sich die Schienen, wenn sie aufeinandergelegt und in der Mitte durch eine Umfassung zusammengehalten werden, nicht unmittelbar berühren, sondern zwischen je zweien eine Spalte von gleicher Weite vorhanden ist.

Diese Zwischenlagen dienen nur allein zum Behufe der Theorie, damit sich diese auch auf solche Federwerke ausdehnen kann, in welchen die Schienen im belasteten Zustand des Federwerkes ungleiche Krümmungen annehmen.

Es seien: Tab. XVI, Fig. 71:

n die Anzahl der Schienen des Federwerkes;

$\delta_1 \; \delta_2 \; \delta_3 \; \ldots\ldots\ldots \; \delta_{n-1}$ die Dicken der Schienen;

$l_1 \; l_2 \; l_3 \; \ldots\ldots\ldots \; l_{n-1}$ die Längen der Schienen;

b die gemeinschaftliche Breite der Schienen;

P_1 die Belastung auf eines der Enden der obersten Schiene;

$P_2 \; P_3 \; P_4 \; \ldots\ldots\ldots \; P_n$ die durch die Belastung P verursachten Pressungen auf die Enden der übrigen Schienen;

$x_1 \; y_1$ die Coordinaten eines beliebigen, jedoch zwischen $C_1 \; B_1$ gelegenen Punktes m_1 der neutralen Axe des Mittelstückes $C_1 \; B_1$ der obersten Schiene;

r_1 der diesem Punkt entsprechende Krümmungshalbmesser, wenn das Federwerk belastet ist;

$\xi_1 \; v_1$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der neutralen Axe von dem Endstück $B_1 \; A_1$ der obersten Schiene;

ϱ_1 der im belasteten Zustand des Federwerkes diesem Punkt entsprechende Krümmungshalbmesser;

R der constante Krümmungshalbmesser der neutralen Axen sämmtlicher Schienen im unbelasteten natürlichen Zustand des Federwerkes;

Die mit $x_1 \; y_1 \; r_1 \; \xi_1 \; v_1 \; \varrho_1$ analogen Grössen der folgenden Schienen sollen durch $x_2 \; y_2 \; r_2 \; \xi_2 \; v_2 \; \varrho_2 \; x_3 \; y_3 \; r_3 \; \xi_3 \; v_3 \; \varrho_3 \; \ldots$ bezeichnet werden;

ε der Modulus der Elasticität des Materials, aus welchem die Schienen bestehen.

Die Werthe von μ für die einzelnen Schienen sind:

$$\frac{1}{12} b \delta_1^3 \qquad \frac{1}{12} b \delta_2^3 \qquad \frac{1}{12} b \delta_3^3$$

Die statischen Momente, welche den Punkten

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \; y_1 \\ x_2 \; y_2 \\ x_3 \; y_3 \end{array}\right\} \text{ entsprechen, sind } \left\{\begin{array}{l} P_1 (l_1 - x_1) - P_2 (l_2 - x_1) = P_1 l_1 - P_2 l_2 - (P_1 - P_2) x_1 \\ P_2 (l_2 - x_2) - P_3 (l_3 - x_3) = P_2 l_2 - P_3 l_3 - (P_2 - P_3) x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Die statischen Momente der Kräfte für die Punkte

$$\left.\begin{matrix} \xi_1\, v_1 \\ \xi_2\, v_2 \\ \cdot\ \cdot \end{matrix}\right\} \text{ sind } \left\{\begin{matrix} P_1\,(l_1-\xi_1) \\ P_2\,(l_2-\xi_2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix}\right.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{R}-\frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}\,(P_1\,l_1-P_2\,l_2)=a & (P_1-P_2)\,\frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}=c_1 \\ \frac{1}{R}-\frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta_2^3}\,(P_2\,l_2-P_3\,l_3)=a_2 & (P_2-P_3)\,\frac{12}{b\,e\,\delta_2^3}=c_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{R}-\frac{12\,P_1\,l_1}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}=\alpha_1 & \frac{12\,P_1}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}=\gamma_1 \\ \frac{1}{R}-\frac{12\,P_2\,l_2}{b\,\varepsilon\,\delta_2^3}=\alpha_2 & \frac{12\,P_2}{b\,\varepsilon\,\delta_2^3}=\gamma_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und berücksichtiget 1) dass die Krümmung durch die Biegung abnimmt; 2) dass die Schienen gegen die unterhalb des Schienenwerkes angenommene Abscissenaxe convex ist, so erhält man vermöge Gleichung (11) (Seite 204) zur Bestimmung der neutralen Axen des Schienenwerks im belasteten Zustand desselben folgende Differenzialgleichungen.

$$\left.\begin{matrix} \frac{d^2\,y_1}{dx_1^2}=a_1+c_1\,x_1 \\ \frac{d^2\,y_2}{dx_2^2}=a_2+c_1\,x_2 \\ \cdots\cdots \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{d^2\,v_1}{d\,\xi_1^2}=\alpha_1+\beta_1\,\xi_1 \\ \frac{d^2\,v_2}{d\,\xi_2^2}=\alpha_2+\beta_2\,\xi_2 \\ \cdots\cdots \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Das System (3) enthält $(n-1)$ das System (4) besteht aus n Gleichungen, weil die unterste Schiene, da auf dieselbe nur Eine Kraft einwirkt, als ein Endstück zu betrachten ist.

Durch einmalige Integration dieser Gleichungen findet man:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d y_1}{d x_1} = a_1 x_1 + \frac{1}{2} c_1 x_1^2 \\ \frac{d y_2}{d x_2} = a_2 x_2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2 \\ \dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d v_1}{d \xi_1} = \alpha_1 \xi_1 + \frac{1}{2} \beta_1 \xi_1^2 + D_1 \\ \frac{d v_2}{d \xi_2} = \alpha_2 \xi_2 + \frac{1}{2} \beta_2 \xi_2^2 + D_2 \\ \dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (6)$$

In dem System der Gleichungen (5) kommen keine Integrationsconstante vor, weil an den Anfängen der Mittelstücke die Tangenten mit der Abscissenlinie parallel sind.

Integrirt man auch die Gleichungen (5) und (6) so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{2} a_1 x_1^2 + \frac{1}{6} c_1 x_1^3 + C_1 \\ y_2 = \frac{1}{2} a_2 x_2^2 + \frac{1}{6} c_2 x_2^3 + C_2 \\ \dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (7)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 \xi_1^2 + \frac{1}{6} \beta_1 \xi_1^3 + D_1 \xi_1 + E_1 \\ v_2 = \frac{1}{2} \alpha_2 \xi_2^2 + \frac{1}{6} \beta_2 \xi_2^3 + D_2 \xi_2 + E_2 \\ \dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (8)$$

Hiemit sind nun die endlichen Gleichungen aller Krümmungen des ganzen Federwerkes bestimmt. Die Constanten $C_1\ C_2\ C_3 \dots D_1\ D_2\ D_3 \dots E_1\ E_2\ E_3 \dots$ ergeben sich durch folgende Bedingungen der Aufgabe.

Die Krümmungen $C_1 B_1$ und $B_1 A_1$, $C_2 B_2$ und $B_2 A_2 \dots$ haben in den Punkten $B_1\ B_2\ B_3 \dots$ zusammenfallende Tangenten; es müssen daher die Werthe der Differenzialquotienten (5), wenn man in dieselben der Reihe nach $x_1 = l_2\ \ x_2 = l_3\ \ x_3 = l_4$ setzt, gleich sein den Werthen, die aus (6) folgen, wenn man $\xi_1 = l_2\ \ \xi_2 = l_3\ \ \xi_3 = l_4$ setzt. Man erhält demnach:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 l_2 + \frac{1}{2} c_1 l_2^2 = \alpha_1 l_2 + \frac{1}{2} \beta_1 l_2^2 + D_1 \\ a_2 l_3 + \frac{1}{2} c_2 l_3^2 = \alpha_2 l_3 + \frac{1}{2} \beta_2 l_3^2 + D_2 \\ \dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (9)$$

Die Punkte B_1 B_2 B_3 . . . gehören sowohl den Mittelstücken, als auch den Endstücken an. Man hat daher wegen (7) und (8)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} a_1 l_2^2 + \frac{1}{6} c_1 l_2^3 + C_1 = \frac{1}{2} \alpha_2 l_2^2 + \frac{1}{6} \beta_2 l_2^3 + D_2 l_2 + E_2 \\ \frac{1}{2} a_2 l_3^2 + \frac{1}{6} c_2 l_3^3 + C_2 = \frac{1}{2} \alpha_3 l_3^2 + \frac{1}{6} \beta_3 l_3^3 + D_3 l_3 + E_3 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Nennt man Δ_2 Δ_3 Δ_4 Δ_5 . . . die Normalabstände der neutralen Linien in der Mitte und an den Enden; setzt also Fig. (71) $\overline{c_1 c_2} = \overline{A_2 B_1} = \Delta_2$ $\overline{c_2 c_3} = \overline{A_3 B_2} = \Delta_3$. . . und $O c_1 = e$ so ist:

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{für } x_1 = 0 & y_1 = e & & \text{demnach wegen (7)} & & C = e \\ \text{„ } x_2 = 0 & y_2 = e - \Delta_2 & \text{„} & \text{„} & \text{„} & C_1 = e - \Delta_2 \\ \text{„ } x_3 = 0 & y_3 = e - (\Delta_2 + \Delta_3) & \text{„} & \text{„} & \text{„} & C_2 = e - (\Delta_2 + \Delta_3) \\ \text{„ } x_4 = 0 & y_4 = e - (\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4) & \text{„} & \text{„} & \text{„} & C_3 = e - (\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4) \end{array}\right\} (11)$$

Die Bedingungen, welche ausdrücken, dass jede Feder mit ihrem Ende die unmittelbar darüber liegende berührt, sind:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} \alpha_1 l_2^2 + \frac{1}{6} \beta_1 l_2^3 + D_1 l_2 + E_1 = \frac{1}{2} \alpha_2 l_2^2 + \frac{1}{6} \beta_2 l_2^3 + D_2 l_2 + E_2 + \Delta_2 \cos.\psi_2 \\ \frac{1}{2} \alpha_2 l_3^2 + \frac{1}{6} \beta_2 l_3^3 + D_2 l_3 + E_2 = \frac{1}{2} \alpha_3 l_3^2 + \frac{1}{6} \beta_3 l_3^3 + D_3 l_3 + E_3 + \Delta_3 \cos.\psi_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} . \quad (12)$$

In diesen Gleichungen sind ψ_2 ψ_3 ψ_4 . . . die kleinen Winkel, welche die Richtungen $A_1 B$ $A_2 B_1$ $A_3 B_2$. . . mit der vertikalen Richtung bilden.

Aus den Gleichungen (9), (10), (11), (12) ergeben sich für die Integrationsconstanten folgende Werthe. Die Werthe von C_1 C_2 C_3 . . sind bereits durch die Gleichungen (11) gegeben.

Aus den Gleichungen (9) findet man mit Beachtung der Gleichungen (1) und (2)

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = \frac{6 P_2 l_2^2}{b \varepsilon \delta_1^3} \\ D_2 = \frac{6 P_3 l_3^2}{b \varepsilon \delta_2^3} \\ \ldots\ldots \\ D_{n-2} = \frac{6 P_{n-1} l_{n-1}^2}{b \varepsilon \delta_{n-2}^3} \\ D_{n-1} = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Aus den Gleichungen (10) findet man mit Berücksichtigung von (1), (2), (11), (13):

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = e - \Delta_2 - \dfrac{2 P_2 l_2^3}{b \varepsilon \delta_1^3} \\[2ex] E_2 = e - (\Delta_2 + \Delta_3) - \dfrac{2 P_3 l_3^3}{b \varepsilon \delta_2^3} \\[2ex] \dots\dots\dots \\[2ex] E_{i-1} = e - (\Delta_2 + \Delta_3 + \dots \Delta_n) \end{array}\right\} \dots\dots\dots \quad (14)$$

Hiermit sind nun sämmtliche Constanten der Integration bestimmt.

Substituirt man die Werthe dieser Constanten in die Gleichungen (12), berücksichtiget die Gleichungen (1) und (2) und erlaubt sich für die kleinen Winkel $\psi_2\ \psi_3\ \psi_4 \dots \cos.\psi_2 = 1$ $\cos.\psi_3 = 1$ $\cos.\psi_4 = 1$ zu setzen, so ergeben sich noch folgende $(n-1)$ Bedingungsgleichungen.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{l_2^2 P_1}{\delta_3^1} (l_2 - 3 l_1) + 2 l_2^3 P_2 \left(\dfrac{1}{\delta_1^3} + \dfrac{1}{\delta_2^3}\right) + \dfrac{l_3^2 P_3}{\delta_2^3} (l_3 - 3 l_2) = 0 \\[2ex] \dfrac{l_3^2 P_2}{\delta_2^3} (l_3 - 3 l_2) + 2 l_3^3 P_3 \left(\dfrac{1}{\delta_2^3} + \dfrac{1}{\delta_3^3}\right) + \dfrac{l_4^2 P_4}{\delta_3^3} (l_4 - 3 l_1) = 0 \\[2ex] \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[2ex] \dfrac{P_{n-1} l_n^2}{\delta_{n-1}^4} (l_n - 3 l_{n-1}) + 2 P_n l_n^3 \left(\dfrac{1}{\delta_n^3} - \dfrac{1}{\delta_{n-1}^3}\right) = 0 \end{array}\right\} \dots \quad (15)$$

Wir müssen nun noch die durch die Belastung verursachte Senkung des Punktes A und die in den Schienen vorkommenden grössten Spannungen berechnen.

Nennt man die Ordinate des Punktes A im unbelasteten Zustand der Schienen Y_0, im belasteten Zustand Y, so ist die durch die Belastung verursachte Senkung $f = Y_0 - Y$.

Der Werth von Y wird gefunden, wenn man in die erste der Gleichungen (8) $\xi = l$ setzt, es ist daher:

$$Y = \frac{1}{2} \alpha_1 l_1^2 + \frac{1}{6} \beta_1 l_1^3 + D_1 l_1 + E_1 \dots\dots\dots \quad (16)$$

Der Werth von Y_0 ergibt sich, wenn man in dieser Gleichung für $\alpha_1\ \beta_1\ D_1\ E_1$ diejenigen Werthe setzt, die diesen Grössen zukommen, wenn $P_1\ P_2\ P_3$ gleich Null sind. Diese individuellen Werthe von $\alpha_1\ \beta_1\ D_1\ E_1$ sind aber beziehungsweise $\frac{1}{R}$ 0 0 und e; es ist demnach:

$$Y_0 = \frac{1}{2} \frac{l_1^2}{R} + e \dots\dots\dots \quad (17)$$

Man hat daher:

$$f = \frac{1}{2}\frac{l_1^2}{R} + e - \frac{1}{2}\alpha_1 l_1^2 - \frac{1}{6}\beta_1 l_1^3 - D_1 l_1 - E_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Setzt man für α β D E die Werthe, welche die Gleichungen (2) (13) (14) darbieten, so erhält man nach einigen Reductionen;

$$f = \frac{2}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3}\left[2\,P_1\,l_1^3 - P_2\,l_2^2\,(3\,l_1 - l_2)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Durch diese Gleichung wird die Biegsamkeit des Federwerkes bemessen.

Nun muss noch die Festigkeit bestimmt werden.

Aus den Seite 208 zusammengestellten Werthen der statischen Momente der Kräfte, welche die Schienen abzubrechen streben, erhellt, dass diese Momente alle unter der Form $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\,x$ erscheinen; daher für $x = 0$, d. h. für die an der Umfassung der Schienen befindlichen Querschnitte am grössten sind. Nach den daselbst eintretenden Spannungsintensitäten, die wir mit $\mathfrak{J}_1$ $\mathfrak{J}_2$ $\mathfrak{J}_3$. . . bezeichnen wollen, ist demnach das Festigkeitsvermögen der Schienen zu beurtheilen.

Die Momente der Kräfte, welche die Schienen bei c_1 c_2 c_3 . . . abzubrechen streben, sind:

$$P_1 l_1 - P_2 l_2$$
$$P_2 l_2 - P_3 l_3$$
$$P_3 l_3 - P_4 l_4$$
$$\ldots\ldots$$

Die Werthe von $\frac{\mu}{z}$ sind für die aufeinander folgenden Schienen

$$\frac{1}{6} b\,\delta_1^2 \qquad \frac{1}{6} b\,\delta_2^2 \qquad \frac{1}{6} b\,\delta_3^2$$

Wir erhalten daher vermöge Gleichung (7) (Seite 203) folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
P_1 l_1 - P_2 l_2 &= \frac{1}{6}\mathfrak{J}_1\, b\,\delta_1^2 \\
P_2 l_2 - P_3 l_3 &= \frac{1}{6}\mathfrak{J}_2\, b\,\delta_2^2 \\
P_3 l_3 - P_4 l_4 &= \frac{1}{6}\mathfrak{J}_3\, b\,\delta_3^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_{n-1} l_{n-1} - P_n l_n &= \frac{1}{6}\mathfrak{J}_{n-1}\, b\,\delta_{n-1}^2 \\
P_n l_n &= \frac{1}{6}\mathfrak{J}_n\, b\,\delta_n^2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

In Betreff der Federwerke kann man vorzugsweise zwei Hauptfragen stellen, die von praktischer Wichtigkeit sind. Die erste betrifft die scharfe Prüfung von bereits bestehenden Federwerken, die zweite hingegen betrifft die Auffindung zweckmässiger Formen und Dimensionen für neu zu construirende Federwerke. Die bis hieher gewonnenen Resultate dienen zunächst zur scharfen Prüfung und zwar auf folgende Weise.

Für ein bereits bestehendes und zu prüfendes Federwerk sind die Längen und Dicken sämmtlicher Schienen und ist auch ihre gemeinschaftliche Breite gegeben. Auch kann man den Modulus der Elastizität des Materials als bekannt ansehen; oder muss denselben durch Biegungsversuche mit einzelnen Schienen bestimmen. Um nun zu erfahren, welcher Zustand in dem Federwerk eintritt, wenn dasselbe belastet wird, d. h. wenn auf jedes der Enden der obersten Schiene eine Kraft P_1 einwirkt, muss man zuerst aus den $(n-1)$ Gleichungen (15), die in Bezug auf die Kräfte vom ersten Grade sind, die $(n-1)$ Pressungen $P_2\ P_3\ \ldots\ P_n$ berechnen. Kennt man einmal diese Werthe, so erhält man aus den Gleichungen (19) die Insensitäten der grössten Spannungen, und kann nach denselben beurtheilen, wie stark jede einzelne Schiene in Anspruch genommen ist. Die Gleichungen (1), (2), (13), (14) geben ferner die numerischen Werthe sämmtlicher Constanten, die in den Gleichungen (7) und (8) der neutralen Axen sämmtlicher Schienen vorkommen, und dann sind also diese Axenlinien selbst bestimmt.

Es ist hervorzuheben, dass in den Gleichungen (15), (18) und (19), welche die Biegungen, die wechselseitigen Pressungen und die Intensitäten der grössten Spannungen bestimmen, von dem Krümmungshalbmesser R, nach welchem die Schienen im natürlichen Zustande gekrümmt sind, gar nicht abhängen. Diese Krümmung der Schienen im natürlichen Zustand ist also hinsichtlich der Biegsamkeit (der nach dem Werth von f beurtheilt werden muss) und auch hinsichtlich der Festigkeitsverhältnisse von gar keiner Bedeutung. Man könnte also die Schienen ganz gerade machen, allein da sie dann im belasteten Zustand abwärts gebogen wären, also das Ansehen erhielten, wie wenn sie ihrer Aufgabe nicht gewachsen wären, so ist es doch angemessen, die Schienen wenigstens so stark zu krümmen, dass sie im belasteten Zustand noch etwas aufwärts gekrümmt erscheinen.

Die Rechnungen, zu welchen eine so ganz scharfe Prüfung eines Federwerkes führt, sind, wie man sieht, zwar nicht mit Schwierigkeiten verbunden, allein ihre Durchführung ist doch äusserst mühsam. Glücklicherweise lassen sich die zweckmässigen Abmessungen für neu zu construirende Federwerke viel leichter bestimmen.

Bestimmung der absoluten Constanten für neu zu construirende Federwerke.

Bisher waren wir nicht veranlasst, uns über die zur Messung der Grössen dienenden Einheiten auszusprechen. Alle Resultate, die wir gewonnen haben, gelten natürlich für jedes Maasssystem, vorausgesetzt, dass die Grösse $\mathfrak{e}\,\mathfrak{Z}\,P$ auf die gewählten Einheiten bezogen werden. Für die folgenden numerischen Rechnungen wollen wir den Centimeter als Längeneinheit, also den Quadratcentimeter als Flächeneinheit und den Kubikcentimeter, als Volumeneinheit annehmen; wollen ferner die Kräfte in Kilogrammen ausdrücken. Unter dieser Voraussetzung muss der Modulus der Elastizität $\mathfrak{e}$ und müssen die Spannungsintensitäten $\mathfrak{Z}_1\ \mathfrak{Z}_2\ \ldots$ auf den Quadratcentimeter bezogen werden. Berechnet man mit Zugrundlegung dieser Einheiten eine Wirkungsgrösse, so wird diese nicht in Kilogrammmetern, sondern in Kilogrammcentimetern ausgedrückt.

Zur Bestimmung der Dimensionen eines zu construirenden Federwerkes muss man kennen: 1) den Modulus der Elastizität $\mathfrak{e}$ des Stahles, aus welchem die Schienen angefertigt werden, 2) die grösste Spannung $\mathfrak{Z}_1$ auf 1 Quadratcentimeter, welche in der be-

lasteten Schiene eintreten darf, damit die Elastizitätsgrenze des Materials nicht überschritten und eine hinreichende Festigkeit erzielt wird, 3) die Senkung f der Endpunkte der längsten Schiene durch die Belastung.

Nach zahlreichen Versuchen von *G. Wertheim* und *Philipps* ist der Modulus der Elastizität für alle Arten von gutem Federstahl nicht beträchtlich veränderlich und beträgt im Mittel genommen auf 1 Quadratcentimeter bezogen:

$$\varepsilon = 2000000.$$

Nach zahlreichen Rechnungen über die Lokomotivfedern beträgt die auf 1 Quadratcentimeter bezogene stärkste Spannung $\mathfrak{Z}_1$, im Mittel genommen, 4400 Kilogramm. Nach den Versuchen von *Philipps* beträgt die Spannung an der Elastizitätsgrenze ungefähr 8000 Kilogramm, und ist der Bruchcoefficient für Federstahl in der Regel grösser als 14000. Die Lokomotivfedern sind also bis zur Hälfte der Elastizitätsgrenze und auf den dritten Theil der Bruchfestigkeit in Anspruch genommen. Es ist kein Grund vorhanden, die Federn stärker oder schwächer in Anspruch zu nehmen, als sie gegenwärtig in den Lokomotiven wirklich in Anspruch genommen sind, wir setzen daher:

$$\mathfrak{Z}_1 = 4400.$$

Die Senkung f der Endpunkte der Federenden variirt bei den Lokomotivfedern von 2 bis 7 Centimetern, in den meisten Fällen beträgt dieselbe 5 Centimeter. Wir setzen für Personenlokomotive $f = 5$ Centimeter; für Güterlokomotive $f = 4$ Centimeter.

Construktion eines Federwerkes, dessen Schienen im belasteten Zustand übereinstimmende Krümmungen annehmen.

Wir wollen uns die Aufgabe vorlegen, ein Federwerk zu bestimmen, das folgende Eigenschaften besitzt:

1) Im natürlichen Zustand sollen die oberen Flächen sämmtlicher Schienen nach einem Halbmesser R kreisbogenförmig gekrümmt sein.
2) Im belasteten Zustand sollen die oberen Flächen der Schienen vollkommen übereinstimmende Krümmungen haben, so zwar, dass wenn die Schienen, ohne Zwischenplatten anzuwenden, unmittelbar aufeinander gelegt würden, an keiner Stelle des Federwerkes ein Klaffen wahrzunehmen wäre.
3) Im belasteten Zustand sollen alle Federn in der Mitte des Federwerkes gleich stark in Ausspruch genommen sein.

Da die beiden ersteren dieser Bedingungen sowohl den Mittelstücken, als auch den Endstücken genügen sollen, so müssen wir, da die Gleichgewichtsgleichungen der Mittelstücke von denen der Endstücke abweichen, die einen und die anderen dieser Stücke besonders betrachten.

Wir beginnen mit den Mittelstücken. Damit diese im belasteten Zustand übereinstimmende Krümmungen annehmen, müssen die Gleichungen (3) (Seite 209), wenn man in denselben $x_1 = x_2 = x_3 \ldots$ setzt für $\frac{d y_1^2}{d x_1^2}$ $\frac{d^2 y_2}{d x_2^2}$... übereinstimmende Werthe geben;

diess ist aber nur dann der Fall, wenn $a_1 = a_2 = a_3 \ldots$ und $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots$ ist. Es muss also vermöge der Ausdrücke (1) Seite (209) sein:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\delta_1^3}(P_1 l_1 - P_2 l_2) = \frac{1}{\delta_2^3}(P_2 l_2 - P_3 l_3) = \frac{1}{\delta_3^3}(P_3 l_3 - P_4 l_4) = \ldots \\ \text{und} \\ \frac{1}{\delta_1^3}(P_1 - P_2) = \frac{1}{\delta_2^3}(P_2 - P_3) = \frac{1}{\delta_3^3}(P_3 - P_4) = \ldots \end{array}\right\} \ldots (1)$$

Wenn ferner sämmtliche Schienen, mit Einschluss der untersten Endstückschiene, in der Mitte gleich stark in Anspruch genommen sein sollen, so muss

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_3 \ldots\ldots = \mathfrak{J}_n$$

oder wegen der Ausdrücke (20) (Seite 213)

$$\frac{1}{\delta_1^2}(P_1 l_1 - P_2 l_2) = \frac{1}{\delta_2^2}(P_2 l_2 - P_3 l_3) = \frac{1}{\delta_3^2}(P_3 l_3 - P_4 l_4) \ldots = \frac{1}{6} b \mathfrak{J}_1^2 \quad \ldots (2)$$

sein.

Diesen Bedingungen (1) und (2) kann nur durch die Annahmen:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \ldots\ldots = \delta_i \\ P_1 - P_2 = P_2 - P_3 = P_3 - P_4 = \ldots = p \end{array}\right\} \ldots\ldots (3)$$

entsprochen werden. Es müssen also 1) alle Schienen einerlei Dicke haben, und 2) die Differenzen der Pressungen zwischen je zwei unmittelbar aufeinander folgenden Schienen gleich gross sein, damit die Krümmungen der Schienen und die Intensitäten der Spannungen übereinstimmen können.

Setzt man in die Gleichungen (20) (Seite 213) $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_3 \ldots$ und $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \ldots$ und addirt sie hierauf alle zusammen, so findet man die einfache Beziehung:

$$P_1 l_1 = \frac{n}{6} \mathfrak{J}_1 b \delta_1^2 \quad \ldots\ldots (4)$$

Addiren wir aber nicht alle, sondern nur $k-1$ von diesen Gleichungen zusammen, wobei k eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnet, die kleiner als n ist, so findet man:

$$P_1 l_1 - P_k l_k = \frac{(k-1)}{6} \mathfrak{J}_1 b \delta_1^2 \quad \ldots\ldots (5)$$

Allein es ist, weil die Differenzen der Pressungen zwischen je zwei auf einander folgenden Schienen gleich gross sein sollen, und diese Differenz mit p bezeichnet wurde:

$$P_k = P_1 - (k-1) p$$

Vermittelst dieses Werthes von p_k folgt aus (5)

$$l_k = \frac{P_1 l_1 - \frac{1}{6}(k-1)\mathfrak{J}_1 b \delta_1^2}{P_1 - (k-1)p} \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

Mit Berücksichtigung von (4) erhält man auch:

$$l_k = l_1 \frac{1 - \frac{(k-1)}{n}}{1 - (k-1)\frac{p}{P_1}} \quad \ldots \ldots \ldots (7)$$

Diese Gleichung wird uns in der Folge zur Berechnung der einzelnen Schienenlängen dienen.

Wir müssen nun weiter, um die Senkung f des Endpunktes der obersten Schiene bestimmen zu können, die Gleichung der neutralen Axe dieser Schiehe aufstellen.

Da $P_1 l_1 - P_2 l_2 = \frac{\mathfrak{J}_1 b \delta_1^2}{6}$ und $P_1 - P_2 = p$ ist, so erhalten die Coeffizienten a_1 und c_1 folgende Werthe:

$$a_1 = \frac{1}{R} - \frac{2\mathfrak{J}_1}{\varepsilon \delta_1} \qquad c = \frac{12 p}{b \varepsilon \delta_1^3}$$

Die Differenzialgleichung der Axe der obersten Schiene, d. h. die erste der Gleichungen (3) (Seite 209) wird demnach:

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{R} - \frac{2\mathfrak{J}_1}{\varepsilon \delta_1} + \frac{12 p}{b \varepsilon \delta_1^3} x_1 \quad \ldots \ldots \ldots (8)$$

Berücksichtiget man, dass für $x_1 = 0$ $\frac{dy_1}{dx_1} = 0$ und dass ferner für $x_1 = 0$ $y_1 = e$ werden muss, so findet man aus (8) für y_1 folgenden Werth:

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{2\mathfrak{J}_1}{\varepsilon \delta_1}\right) x_1^2 + \frac{2 p}{b \varepsilon \delta_1^3} x_1^3 + e \quad \ldots \ldots (9)$$

Streng genommen gilt diese Gleichung nur für die neutrale Axe des Mittelstückes der obersten Schiene. Um aber vermittelst derselben die Senkung f des Endpunktes berechnen zu können, werden wir uns erlauben, sie für die ganze Ausdehnung der obersten Schiene, also bis zu $x_1 = l_1$, gelten zu lassen. Der Fehler, den wir dadurch begehen, ist jedenfalls verschwindend klein, weil, wie wir sehen werden, die Endstücke immer nur sehr kurz ausfallen. Setzen wir in (9) $x_1 = l_1$, so erhalten wir unter dieser Voraussetzung für die Ordinate des Endpunktes A_1 (Fig 71) folgenden Werth:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{2\mathfrak{J}_1}{\varepsilon \delta_1}\right) l_1^2 + \frac{2 p}{b \varepsilon \delta_1^3} l_1^3 + e$$

Für den unbelasteten Zustand des Federwerkes ist aber die Ordinate des Punktes A_1 sehr nahe gleich:

$$\frac{1}{2}\frac{l_1^2}{R} + e$$

Die Senkung f des Punktes A_1 ist demnach:

$$f = \frac{\mathfrak{Z}_1 l_1^2}{\varepsilon \delta_1} - \frac{2p}{b\varepsilon\delta_1^3} l_1^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Berücksichtiget man die Gleichung (4), so erhält dieser Werth von f folgende Form:

$$f = \frac{\mathfrak{Z}_1 l_1^2}{\varepsilon \delta_1}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{pn}{P_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Der Werth von p ist innerhalb gewisser Grenzen ganz willkürlich. Diese Grenzen erkennt man aus dem Ausdruck (7) für irgend eine Schienenlänge.

Da p nie negativ werden kann, so ist $p = 0$ der kleinste Werth von p. Da ferner die oberste Schiene die grösste Länge haben soll, so darf $\frac{p}{P_1}$ nie grösser als $\frac{1}{n}$ oder p nie grösser als $\frac{P_1}{n}$ werden. p gleich Null und p gleich $\frac{P_1}{n}$ sind also die Grenzen, innerhalb welchen der Werth von p willkürlich angenommen werden kann. Wir werden in der Folge sehen, dass die Federwerke, die man für verschiedene Annahmen des Werthes von p erhält, in ihren Eigenschaften nur insofern übereinstimmen, als sie alle den Anforderungen entsprechen, die wir Anfangs dieser Nummer ausgesprochen haben Einstweilen genügt es uns, die Grenzen kennen gelernt zu haben, innerhalb welchen p willkürlich angenommen werden kann.

Setzen wir nun:

$$p = \frac{1}{\gamma}\frac{P_1}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

wobei γ jede beliebige ganze oder unganze Zahl bezeichnet, die jedoch nie kleiner als die Einheit genommen werden darf, so haben wir einen Ausdruck, der den Werth von p in seine Grenzen einschränkt; wenn wir diesen Werth von p in die Gleichungen (7) und (11) einführen, so werden dieselben:

$$\left.\begin{array}{l} l_k = l_1 \dfrac{1 - \dfrac{k-1}{n}}{1 - \dfrac{k-1}{n}\dfrac{1}{\gamma}} \\[2em] f = \dfrac{\mathfrak{Z}_1 l_1^2}{\varepsilon\delta_1}\left(1 - \dfrac{1}{3\gamma}\right) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Diese beiden Gleichungen in Verbindung mit (4), nämlich mit

$$P_1 l_1 = \frac{n}{6}\mathfrak{Z}_1 b \delta_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

bestimmen, wenn man P_1 l_1 b ε f und γ annimmt alle Construktionselemente des Federwerkes, mit Ausnahme der Querschnittsdimensionen der Endstücke.

Die zweite der Gleichungen (13) gibt zunächst die Dicke δ_1 der Schienen, die Gleichung (14) gibt hierauf die Anzahl n der Schienen, die erste der Gleichungen (13) gibt zuletzt, wenn man in dieselbe der Reihe nach $k = 1\ 2\ 3 \ldots$ bis n setzt, die Längen der einzelnen Schienen.

Es erübrigt nun noch, die Bedingungen für die Schienenenden ausfindig zu machen.

Wir haben die Forderung gestellt, dass die obere Fläche irgend einer Schiene mit der unteren Fläche der unmittelbar darüber befindlichen Schiene der ganzen Ausdehnung nach übereinstimmt. Dieser Anforderung können die Schienenenden nur dann genügen, wenn ihre Dicke nach aussen zu, nach einem gewissen Gesetze, das wir das Zuspitzungsgesetz nennen wollen, abnehmen; und dieses Gesetz muss nun bestimmt werden.

Nennt man für den natürlichen Zustand des Federwerkes σ_0, für den Zustand der Belastung σ den Krümmungshalbmesser, welcher einem Punkt b Fig. 70 der neutralen Linie des Endstückes der k^{ten} Schiene entspricht. Ferner für den natürlichen Zustand R, für den Zustand der Belastung ϱ_1 den Krümmungshalbmesser, welchem die Punkte c und d entsprechen, und $\overline{ac} = u$ die Schienendicke bei b, sowie x und y die Coordinaten dieses Punktes.

Zwischen diesen Krümmungshalbmessern besteht, wie man ohne Schwierigkeit findet, folgende Beziehung:

$$\frac{1}{\sigma_0} - \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} \qquad (15)$$

Allein vermöge Gleichung (5) (Seite 203) hat man:

$$\frac{1}{\sigma_0} - \frac{1}{\sigma} = \frac{12}{b\,\varepsilon\,u^3} P_1 (l_k - x)$$

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} = \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta_1^3} \left[P_{k-1}(l_{k-1} - x) - P_k (l_k - x)\right]$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$\frac{\delta_1^3}{u^3} = \frac{P_{k-1}(l_{k-1} - x) - P_k (l_k - x)}{P_k (l_k - x)}$$

Für das Federwerk, das wir untersuchen, ist aber:

$$P_{k-1}\, l_{k-1} - P_k\, l_k = \frac{\mathfrak{I}_1\, b\, \delta_1^2}{6}$$

$$P_k = P_1 - (k-1)\, p$$

Daher wird:

$$\frac{\delta_1^3}{u^3} = \frac{\dfrac{\mathfrak{I}_1\, b\, \delta_1^2}{6} - p\,x}{\left[P_1 - (k-1)\,p\right](l_k - x)}$$

oder wenn man für $\frac{\mathfrak{I}_1 b \delta_1^2}{6}$ den aus (4) folgenden Werth $\frac{P_1 l_1}{n}$ und für p seinen Werth $\frac{1}{\gamma} \frac{P_1}{n}$ setzt:

$$\frac{\delta_1^3}{u^3} = \frac{l_1 - \frac{x}{\gamma}}{\left(n - \frac{k-1}{\gamma}\right)(l_k - x)} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (16)$$

Dieses Gleichung drückt das gesuchte Gesetz der Zuspitzung aus.

Es ist, wie man sieht, von k abhängig, wenn γ einen endlichen Werth hat. Streng genommen muss also, wenn γ endlich, also p grösser als Null angenommen wird, das Endstück jeder Schiene eine besondere Zuspitzung erhalten. Allein es wird sich in der Folge zeigen, dass die Endstücke der Schienen immer sehr klein ausfallen, so dass es für praktische Zwecke genügt, wenn die Zuspitzungen nach quadratischen oder nach kubischen Parabeln geformt werden. In dem speziellen Fall $\gamma = \infty$ wird die Gleichung (16)

$$\frac{\delta_1^3}{u^3} = \frac{l_1}{n\,(l_k - x)} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (17)$$

Dieser Ausdruck entspricht aber einer kubischen Parabel, und da derselbe von k nicht abhängt, so stimmen die Zuspitzungen sämmtlicher Schienen überein.

Denkt man sich, dass ein nach diesen Regeln berechnetes Federwerk sehr vollkommen ausgeführt werde, dass jedoch auf die Mitte und auf die Enden einer jeden Schiene dünne kurze Metallblättchen gelegt werden, so dass im natürlichen Zustand des Federwerkes zwischen je zwei Schienen eine Spalte von durchaus gleicher Weite vorhanden sein wird. Wird nun dieses Federwerk belastet, so krümmen sich sämmtliche Schienen nach übereinstimmenden elastischen Linien, so dass die Spaltenweite überall genau so gross bleibt, wie sie im natürlichen Zustand des Federwerkes war. Denkt man sich ferner, dass die Dicke der Zwischenblätter kleiner und kleiner werde, so rücken die Schienen nach und nach aneinander und die Spaltenweite nimmt mehr und mehr ab. Denkt man sich endlich, dass die Dicke der Zwischenblättchen verschwindend klein werde, so wird es auch die Spaltenweite. Dann aber treten je zwei aufeinander folgende Schienen in einen Berührungszustand, der jedoch nur in der Mitte und an den Enden ein physischer, in allen übrigen Punkten aber nur ein geometrischer ist. Diese Art der Aufeinanderlagerung wird aber natürlich auch dann eintreten, wenn man gleich anfangs bei der Zusammensetzung des Federwerkes die Zwischenblättchen ganz weglässt und die Schienen unmittelbar aufeinander legt.

Hieraus sieht man, dass in allen diesen Federwerken, in welchen die Schienen in belastetem Zustand übereinstimmende Krümmungen annehmen, nur in der Mitte und an den Enden wechselseitige Pressungen zwischen den Schienen eintreten, und dass die nach den aufgestellten Regeln construirten Federwerke unter der Einwirkung der Belastung nicht klaffen, sondern stets in allen Theilen eine zusammenhängende Masse bilden.

Wir wollen noch die äussere Begrenzung des ganzen Schienenwerkes, d. h. die Gleichung derjenigen krummen Linien bestimmen, welche die Endpunkte der oberen Flächen der Schienen stetig verbindet. Die Auffindung der Gleichung dieser Linie unterliegt zwar keiner Schwierigkeit, allein ihre Form ist so komplizirt, dass man aus der Gleichung von ihrer Gestalt keine klare Anschauung erhält, es ist daher angemessen, die Linie zu suchen, welche die Endpunkte der Oberflächen der Schienen stetig verbindet, wenn die Schienen in ungebogenem Zustand aufeinander geschichtet werden.

Es sei der Mittelpunkt O Fig. 72 der obersten Schiene der Anfangspunkt der Coordinaten. Die Abscissenaxe Ox falle mit der oberen Fläche der ersten Schiene zusammen. Die Ordinaten sollen vertikal abwärts gerichtet werden. Nennen wir $\overline{OF} = x$ die Abscisse, $\overline{FE} = y$ die Ordinate von dem Eudpunkte der k^{ten} Schiene, so ist:

$$x = l_k \qquad y = (k-1)\,\delta$$

Setzt man in die erste der Gleichungen (13) $l_k = x \quad (k-1) = \frac{y}{\delta}$, so findet man:

$$x = l_1 \frac{1 - \frac{y}{n\,\delta}}{1 - \frac{y}{n\,\delta\,\gamma}}$$

Es ist aber $n\delta$ die ganze Dicke des Schienenwerkes in der Mitte, setzt man $n\delta = h$, so wird:

$$x = l_1 \frac{\gamma\,(h-y)}{h\,\gamma - y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

oder:

$$x\,y - l_1\,\gamma\,y - h\,\gamma\,x + l_1\,\gamma\,h = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Diese Gleichung entspricht einer gleichseitigen Hyperbel. Die Coordinaten des Mittelpunktes sind:

$$\overline{OH} = l_1\,\gamma \qquad \overline{GH} = h\,\gamma$$

Die Richtungen $G\,x_{,,}$ und $G\,y_{,,}$ der Symetrieaxen dieser Hyperbel bilden mit der Axe Ox Winkel von 45°.

Nennt man $x_{,,} = EF_2 \quad y_{,,} = GF_2$ die Coordinaten eines Punktes E in Bezug auf diese Axen der Symetrie, so ist die Gleichung der Hyperbel:

$$y_{,,}^2 - x_{,,}^2 = 2\,l_1\,h\,\gamma\,(\gamma - 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Diese Hyperbel entsteht, wenn man einen Kegel, dessen Seiten an der Spitze einen Winkel von 90° bilden, durch eine Ebene schneidet, die zur Axe des Kegels in einem Abstand $\sqrt{2\,l_1\,h\,\gamma\,(\gamma-1)}$ parallel ist.

Die Form des geradeaus gestreckten Federwerkes kann also auch durch die Verzeichnung dieser Hyperbel bestimmt werden.

Diese so eben ausgesprochene geometrische Bedeutung der Gleichung (19) folgt aus der Theorie der algebraischen Linien des zweiten Grades.

(Siebente Vorlesung über analystische Geometrie von A. v. Ettingshausen.)

Wir wollen nun die Eigenschaften von einigen speziellen Federanordnungen untersuchen, die sich ergeben, wenn man für γ bestimmte Werthe annimmt.

Federwerk aus Schienen von gleicher Länge und gleicher Dicke.

Setzen wir $\gamma = 1$, so werden die Gleichungen (13) und (14) (Seite 218)

$$\left.\begin{array}{l} l_k = l_1 \\ f = \frac{2}{3} \frac{\mathfrak{J}_1 l_1^2}{\varepsilon \delta_1} \\ P_1 l_1 = \frac{n}{6} \mathfrak{J}_1 b \delta_1^2 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Die Annahme $\gamma = 1$ liefert uns also ein Federwerk mit durchaus gleich langen Schienen, die im Belastungszustand vollkommen übereinstimmende Krümmungen annehmen. Betrachtet man $\mathfrak{J}_1\ l_1\ P_1\ \varepsilon\, b$ als gegebene Grössen, so erhält man zur Bestimmung der Schienendicke und der Schienenanzahl folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = \frac{2}{3} \frac{\mathfrak{J}_1 l_1^2}{\varepsilon f} \\ n = \frac{6 P_1 l_1}{\mathfrak{J}_1 b \delta_1^2} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

In einem solchen Federwerk nimmt die Intensität der Spannung von der Mitte an nach den Enden zu fort und fort ab, und verschwindet sogar an den Enden. Ein solches Federwerk ist also in den äusseren Theilen übermässig fest, daher für praktische Zwecke nicht sehr geeignet.

Da in dem Fall wenn $j = 1$ ist die zwischen je zwei Schienen eintretende wechselseitige Pressung einen und denselben constanten Werth $p = \frac{P_1}{n}$ erhält, so findet man, mit Berücksichtigung der Gleichung (15) (Seite 205), für die Wirkungsgrösse W, die erforderlich ist, um ein solches Federwerk aus seinem natürlichen Zustand in denjenigen Krümmungszustand zu versetzen, den es unter der Belastung annimmt, wenn der Gleichgewichtszustand eingetreten ist, folgenden Ausdruck:

$$W = \frac{1}{18} \frac{\mathfrak{J}_1^2}{\varepsilon} n\, b\, \delta_1\, l_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Bezeichnet man das totale Volumen des Federwerkes mit $\mathfrak{V}$, setzt also $n\ b\ \delta_1\ l_1 = \mathfrak{V}$, so wird:

$$W = \frac{1}{18} \frac{\mathfrak{J}_1^2}{\varepsilon} \mathfrak{V} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Federwerk mit gleich langen Schienenenden, das bei jeder innerhalb der Elasticitätsgrenze liegenden Belastung kreisbogenförmig bleibt, daher in allen Theilen gleich stark in Anspruch genommen ist.

Setzen wir $p = 0$ oder $\gamma = \infty$, so erhalten wir ein Federwerk, in welchem die wechselseitigen Pressungen zwischen den Schienen gleich gross sind.

Für diese Annahme geben die Gleichungen (13) und (14) (Seite 218)

$$\left.\begin{aligned} l_k &= l_1 \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ f &= \frac{\mathfrak{Z}_1 \, l_1^2}{\varepsilon \, \delta_1} \\ P_1 \, l_1 &= \frac{n}{6} \mathfrak{Z}_1 \, b \, \delta_1^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Aus den ersten dieser Gleichungen findet man:

$$l_k - l_{k+1} = \frac{l_1}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

d. h. die Endstücke der Schienen haben alle einerlei Länge, und sie ist gleich dem n^{ten} Theil von der Länge der obersten Schiene. Aus den zwei letzteren der Gleichungen (1) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\mathfrak{Z}_1 \, l_1^2}{\varepsilon \, f} \\ n &= \frac{6 \, P_1 \, l_1}{\mathfrak{Z}_1 \, b \, \delta_1^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ist aber $p = 0$, so wird die Gleichung (8) (Seite 217) des Mittelstücks der obersten Schiene:

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{R} - \frac{2 \, \mathfrak{Z}_1}{\varepsilon \, \delta_1}$$

d. h. im belasteten Zustand des Federwerkes ist die oberste Schiene nach einem Kreisbogen gekrümmt, welcher im Halbmesser r_1 entspricht, dessen Werth durch

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{R} - \frac{2 \, \mathfrak{Z}_1}{\varepsilon \, \delta_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

bestimmt wird. Allein alle aus den Gleichungen (13) und (14) hervorgehenden Federwerke haben die Eigenschaft, dass die Krümmungen der Schienen im belasteten Zustand übereinstinmen; in dem Federwerk, das wir untersuchen, werden also alle Schienen eine mit der obersten Schiene übereinstimmende kreisbogenförmige Krümmung annehmen.

Hieraus folgt aber, dass die Intensität der Spannung in jedem beliebigen Querschnitt des Mittelstückes jeder beliebigen Schiene einen constanten Werth, oder dass das ganze

Federwerk in seinem Mittelstücksystem durchaus gleiche Festigkeit darbietet. Dieses Federsystem gehört also in die Classe der Körperformen, die mit einem Minimum von Materialaufwand ein bestimmtes Tragungsvermögen besitzen.

Damit im belasteten Zustand auch die Oberflächen der Endstücke nach dem Halbmesser r_1 kreisbogenförmig gekrümmt werden, müssen dieselben nach dem Gesetz (16) (Seite 220) zugespitzt werden. Weil aber $\gamma = \infty$ ist, so wird diese Gleichung:

$$\frac{\delta_1^3}{u^3} = \frac{l_1}{n} \frac{1}{l_k - x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Dies ist aber die Gleichnng einer kubischen Parabel, deren Scheitel mit dem Endpunkt des Endstückes zusammenfällt. Da alle Endstücke eine gleiche Länge $\frac{l_1}{n}$ haben, so erhalten sie alle ganz congruente Formen.

In den nach kubischen Parabeln zugespitzten Endstücken ist aber die Intensität der Spannung nicht in jedem Querschnitt gleich gross. Nennt man für den Querschnitt, welchem die Abscisse $l_k - x$ und die Dicke u entsprechen, i die Intensität der Spannung an der oberen Fläche, so ist

$$P_1 (l_k - x) = \frac{i}{6} b u^2$$

Durch Elimination von u vermittelst der Gleichung (5) folgt:

$$i = \frac{6 P_1}{b \delta_1^2} \left(\frac{l_1}{n}\right)^{\frac{2}{3}} (l_k - x)^{\frac{1}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Hieraus sieht man, dass die Intensität der Spannung nach dem Endpunkt eines Endstückes hin abnimmt und daselbst ganz verschwindet. An seiner Wurzel, d. h. für $l_k - x = \frac{l_1}{n}$ hat jedes Endstück eine Spannung

$$\frac{6 P_1}{b \delta_1^2} \frac{l_1}{n}$$

die mit der des Mittelstückes übereinstimmt.

Man würde auch den Endstücken überall gleiche Festigkeit geben können, wenn man sie nicht nach kubischen, sondern nach quadratischen Parabeln zuspitzte, allein dann würden die oberen Flächen der Endstücke mit den darüber hinziehenden unteren Flächen der Mittelstücke nicht mehr ganz scharf übereinstimmen, die Zuspitzung nach kubischen Parabeln verdient daher den Vorzug, und zwar um so viel mehr, als durchaus kein praktischer Nachtheil entsteht, wenn diese ohnedies nun ganz kurzen Endstücke gegen ihren Endpunkt hin etwas fester sind als an den Wurzeln.

Wir können auch für die Halbmesser R der Krümmung im natürlichen Zustand eine Regel aufstellen, wenn wir annehmen, dass die Senkung f einen gewissen aliquoten Theil von der Pfeilhöhe betragen soll, die der obersten Schiene im natürlichen Zustand entspricht.

Diese Pfeilhöhe ist annähernd $\frac{l_1^2}{2R}$, die Senkung dagegen vermöge Gleichungen (1) $\frac{\mathfrak{J}_1 l_1^2}{\varepsilon \delta_1}$

Bezeichnen wir durch λ das Verhältniss:

$$\frac{\text{Senkung}}{\text{Pfeilhöhe}}$$

so erhalten wir zur Bestimmung von R folgenden Ausdruck:

$$R = \lambda \frac{l_1^2}{2f} = \lambda \frac{\varepsilon \delta_1}{2 \mathfrak{J}_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Wir wollen nun noch die Wirkungsgrösse berechnen, die erforderlich ist, um das Federwerk so stark zu biegen, dass am Endpunkt der obersten Schiene eine Senkung f eintritt.

Wenn wir die Sache haarscharf nehmen wollten, müssten wir bei dieser Berechnung die Endstücke von den Mittelstücken unterscheiden. Allein da die Endstücke im Vergleich zu den Mittelstücken, im Mittel genommen, sehr kurz sind, und da ferner die Zuspitzungen nach kubischen Parabeln geschehen, was zur Folge hat, dass die Schienendicken der Endstücke, von den Wurzeln an gerechnet, sehr langsam und erst in der Nähe der Endpunkte rasch abnehmen, so werden wir keinen spürbaren Fehler begehen, wenn wir die der Biegung des Federwerkes entsprechende Wirkungsgrösse für den Fall berechnen, dass die Schienen in allen Theilen und bis an ihre Endpunkte hin eine unveränderliche Dicke δ_1 haben.

Nennen wir W die zu berechnende Wirkungsgrösse in Kilogramm-Centimeter ausgedrückt, $\mathfrak{B}$ das totale Volumen des ganzen Federwerkes, so ist vermöge Gleichung (22) (Seite 206)

$$W = \frac{1}{6} \frac{J_1^2}{\varepsilon} \mathfrak{B} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Zur Berechnung des Volumens $\mathfrak{B}$ des ganzen Federwerkes hat man die Formel:

$$\mathfrak{B} = b \delta_1 2 \left(\frac{l_1}{n} + 2 \frac{l_1}{n} + 3 \frac{l_1}{n} x \ldots + n \frac{l_1}{n} \right)$$

oder

$$\mathfrak{B} = (n+1) b \delta_1 l_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

wobei wie bisher l_1 die halbe Länge der obersten Schiene bedeutet, während $\mathfrak{B}$ und W auf das ganze Schienenwerk bezogen sind.

Dieses Federwerk mit gleich dicken Schienen und gleich langen Endstücken besitzt, wie wir gesehen haben, im belasteten Zustand die Eigenschaften:

1. In allen seinen Theilen nach übereinstimmenden Kreisbögen gekrümmt zu sein.
2. Eine vollkommen compakte nirgends klaffende Masse zu bilden.
3. In allen Theilen der Mittelstücke absolut gleich stark, in den Endstücken annähernd gleich stark in Anspruch genommen zu sein.
4. Mit dem geringsten Volumen und Materialaufwand eine bestimmte Tragkraft und Biegsamkeit darzubieten.

Rechnet man zu diesen Eigenschaften noch dazu, dass die Dimensionen dieses Federwerkes ganz leicht vollkommen scharf bestimmt werden können, und dass seine Anfertigung, weil die Schienen von gleicher Dicke und nach dem gleichen Halbmesser R zu richten sind, keinen Schwierigkeiten unterliegt, so muss man sagen, dass dieses Federwerk wenigstens in statischer Hinsicht das vollkommenste ist, das es überhaupt geben kann. Allein für vollkommene Gleichgewichtszustände braucht man keine Federwerke, es ist also die Frage, ob das vorliegende Federwerk auch für dynamische Verhältnisse eine untadelhafte Anordnung genannt zu werden verdient? Diese Frage muss verneinend beantwortet werden. Dieses Federwerk ist gegen stossweise Einwirkungen auf seine Endpunkte in den äusseren Theilen, wo verhältnissmässig nur wenig Material vorhanden ist, beträchtlich schwächer als in der Mitte und gegen die Mitte zu, wo viel Material angehäuft ist. Für dynamische Zustände verdienen also die Federwerke mit hyperbolischer Begrenzung den Vorzug, weil bei denselben gegen die Enden hin mehr Material vorkommt. Dies ist insbesondere der Fall, wenn man für γ einen der Einheit sich nähernden Werth z. B. $\frac{3}{2}$ nimmt.

In dem nächsten Abschnitt, welcher die practisch wichtigsten Resultate sämmtlicher Untersuchungen enthält, sind verschiedene Federwerke und insbesondere auch hyperbolische berechnet.

Druck, welchen ein Zapfen eines Laufwerkes auszuhalten hat, mit Berücksichtigung des Einflusses der Feder und der Einwirkungen der Bahn.

Im ruhenden Zustand eines Wagens ist der Druck gegen einen Zapfen eines Laufwerkes gleich dem Gewicht Q eines gewissen Theiles des auf den Federn liegenden Baues. Im bewegten Zustand ist dieser Druck theils durch die schwingende Bewegung des auf den Federn liegenden Baues, theils durch die hüpfende Bewegung der Räder veränderlich. Diesen veränderlichen Druck wollen wir bestimmen.

Es sei:

Q in Kilogrammen das Gewicht, welches im ruhenden Zustand gegen einen Zapfen drückt;

x die Höhe der Federenden über den Schienen der Bahn in irgend einem Zeitaugenblick t der Bewegung;

y die Höhe der Axe des Laufwerkes über den Schienen in dem gleichen Zeitaugenblick t. Wegen der hüpfenden Bewegung ist y im Allgemeinen etwas grösser, als der Halbmesser des Rades;

R der Halbmesser des Rades;

a die Höhe der Schienenenden über der Axe, wenn der Wagen ruhig auf der Bahn steht;

f der Starrheits-Coeffizient für das Federwerk, d. h. die Zahl, mit welcher man die Zusammendrückung der Federn multipliziren muss, um den der Zusammendrückung entsprechenden Druck zu erhalten;

s die Zusammendrückung der Feder, wenn auf derselben das Gewicht Q ruhig liegt. Es ist also $sf = Q$ oder $f = \frac{Q}{s}$.

$g = 980{\cdot}8$ Centimeter. Die Beschleunigung durch die Schwere. Alle Dimensionen sind in Centimetern, alle Pressungen in Kilogrammen ausgedrückt.

Dies vorausgesetzt, ist die Differenzialgleichung der absoluten Bewegung von Q.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\,\frac{f(a+s-x+y)-Q}{Q} \quad \ldots \quad (1)$$

Es ist aber, wie schon erwähnt wurde, $fs = Q$, daher wird diese Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\,\frac{f(a-x+y)}{Q} \quad \ldots \quad (2)$$

Da die hüpfende Bewegung des Rades eine periodische ist, so dürfen wir für y folgenden Ausdruck setzen:

$$y = R + \mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt \quad \ldots \quad (3)$$

wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gewisse Constante sind, durch welche die Vertikalbewegung der Axe des Laufwerkes ausgedrückt wird, und k eine andere Constante bedeutet, durch welche die Dauer eines Radsprunges bestimmt wird. Aus (2) und (3) folgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gf}{Q}(a+R) - \frac{gf}{Q}x + \frac{gf}{Q}(\mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt) \quad \ldots \quad (4)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist, wenn k nicht gleich $\sqrt{\frac{gf}{Q}}$ ist

$$x = a + R + \mathfrak{M}\sin.\sqrt{\frac{gf}{Q}}\,t + \mathfrak{N}\cos.\sqrt{\frac{gf}{Q}}\,t + \frac{\frac{gf}{Q}}{\frac{gf}{Q}-k^2}(\mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt) \quad . \quad (5)$$

Nennen wir P den Druck gegen den Zapfen zur Zeit t, so ist:

$$P = f(a+s-x+y) \quad \ldots \quad (6)$$

Setzt man für x und y die Werthe (5) und (3) und berücksichtiget, dass $fs = Q$ ist, so findet man:

$$P = Q - f\left(\mathfrak{M}\sin.\sqrt{\frac{gf}{Q}}\,t + \mathfrak{N}\cos.\sqrt{\frac{gf}{Q}}\,t\right) - \frac{k^2 f}{\frac{gf}{Q}-k^2}(\mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt) \quad \ldots \quad (7)$$

oder auch, da $\frac{f}{Q} = \frac{1}{s}$ ist.

$$P = Q - \frac{Q}{s}\left(\mathfrak{M}\sin.\sqrt{\frac{g}{s}}\,t + \mathfrak{N}\cos.\sqrt{\frac{g}{s}}\,t\right) - \frac{Q}{s}\,\frac{k^2}{\frac{g}{s}-k^2}(\mathfrak{A}\sin.kt + \mathfrak{B}\cos.kt) \quad . \quad (8)$$

Da die Räder vorzugsweise an den Schienenverbindungen in die Höhe gestossen werden, so darf man die Dauer der Periode $\frac{2\pi}{k}$, welche dem Bewegungsgesetz (3) ent-

spricht, gleich setzen der Zeit, in welcher ein Rad über eine Schiene läuft. Nennen wir V die Fahrgeschwindigkeit, S die Länge einer Schiene, so ist also zu setzen:

$$\frac{2\pi}{k} = \frac{S}{V} \quad \text{oder} \quad k = 2\pi\frac{V}{S}$$

und dann findet man:

$$P = Q - \frac{Q}{s}\left(\mathfrak{M}\sin.\sqrt{\frac{g}{s}}\,t + \mathfrak{N}\cos.\sqrt{\frac{g}{s}}\,t\right) - \frac{Q}{s}\cdot\frac{\left(2\pi\frac{V}{S}\right)^2}{\frac{g}{s}-\left(2\pi\frac{V}{S}\right)^2}\left(\mathfrak{A}\sin.2\pi\frac{V}{S}t + \mathfrak{B}\cos.2\pi\frac{V}{S}t\right) \quad (9)$$

Bezeichnen wir durch h_1 und h_2 die grössten positiven Werthe von

$$-\left(\mathfrak{M}\sin.\sqrt{\frac{g}{s}}\,t + \mathfrak{N}\cos.\sqrt{\frac{g}{s}}\,t\right)$$

und von

$$-\left(\mathfrak{A}\sin.2\pi\frac{V}{S}\,t + \mathfrak{B}\cos.2\pi\frac{V}{S}\,t\right)$$

so bedeutet h_1 diejenige Schwingungshöhe, die durch die Elastizität der Federn eintritt, und h_2 die Sprunghöhe eines Rades, und dann ist das Maxinimum des Druckes gegen den Zapfen:

$$P_{max.} = Q\left\{1 + \frac{h_1}{s} + \frac{h_2}{s}\,\frac{\left(2\pi\frac{V}{S}\right)^2}{\frac{g}{s}-\left(2\pi\frac{V}{S}\right)^2}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

oder auch

$$P_{max} - Q = \frac{Q}{s}\left\{h_1 + h_2\,\frac{\left(2\pi\frac{V}{S}\right)^2}{\frac{g}{s}-\left(2\pi\frac{V}{S}\right)^2}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Der Unterschied zwischen der grössten Pressung, die im bewegten Zustand eintritt und der Pressung in ruhendem Zustand ist also: 1) der Belastung des Zapfens proportional, 2) um so grösser, je kleiner s, oder je starrer die Federn sind, 3) um so grösser, je grösser die Schwingungshöhe h_1 und die Sprunghöhe h_2 ist. Dieser Unterschied wird aber insbesondere sehr gross, wenn 4) $\frac{g}{s} - \left(2\pi\frac{V}{S}\right)^2$ verschwindend klein, oder wenn:

$$S = 2\pi V\sqrt{\frac{s}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

ist. Es kann also der Druck gegen den Zapfen jeden beliebigen noch so grossen Werth erreichen, wenn die Schienenlänge so gross ist, dass die Zeit, welche der Wagen braucht, um über dieselbe hinzurollen, genau so gross ist, als die Zeit einer Schwingung, die der Wagen vermöge der Federn macht. Damit dieser gefährliche Zustand, bei welchem jeder Zapfen brechen müsste, bei keiner von den Geschwindigkeiten, mit der ein Zug

zu fahren hat, eintreten kann, muss die Schienenlänge grösser sein, als derjenige Werth, den der Ausdruck (12) gibt, wenn man für V die grösste Fahrgeschwindigkeit setzt. Die richtige Schienenlänge ist also der grössten Fahrgeschwindigkeit V proportional und richtet sich überdies noch nach dem Starrheitsgrad der Federn. Weiche Federn, für welche s gross ist, erfordern lange Schienen.

Wir haben früher gesehen, dass die der normalen Belastung entsprechende Senkung s der Federn in der Regel 5 Centimeter beträgt. Setzt man in (12) $s = 5$ $g = 980 \cdot 8$, so wird:

$$S = 0 \cdot 448\, V \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Dieser Ausdruck gilt für jedes Längenmaass, denn es wird durch denselben nur ein Verhältniss bestimmt.

Für eine Fahrgeschwindigkeit von 14 Meter in einer Sekunde wird $S = 0.448 \times 14 = 6.27$ Meter. Die Schienen sollen also, um den gegenwärtig in Deutschland üblichen grösseren Fahrgeschwindigkeiten zu entsprechen, wenigstens über 6 Meter lang sein; was auch in der That der Fall ist.

Bestimmung der Zapfendurchmesser mit Rücksicht auf Festigkeit und Abnützung.

Vorausgesetzt, dass das Federwerk eines Wagens richtig angeordnet, und dass die Schienen eine der Fahrgeschwindigkeit und der Starrheit der Federn angemessene Länge haben, ist der in der Klammer der Gleichung (10) (Seite 228) enthaltene Ausdruck als eine constante Grösse anzusehen, und dann ist das Maximum des Druckes, den ein Zapfen einer Wagenaxe auszuhalten hat, der Last Q proportional, die im ruhenden Zustand auf dem Zapfen liegt.

Nennen wir:

Q die Belastung eines Zapfens einer Wagenaxe im ruhigen Znstand des Wagens;

αQ das Maximum des Druckes gegen den Zapfen im bewegten Zustand des Wagens;

$\mathfrak{J}$ die grösste Spannung auf einen Quadratcentimeter bezogen, welche im Zapfen eintreten darf, wenn auf denselben der Druck αQ einwirkt;

d den Durchmesser des Zapfens in Centimetern;

l die Länge des Zapfens; " "

n Anzahl der Umdrehungen des Zapfens in einer Sekunde;

so hat man nach bekannten statischen Gesetzen:

$$\alpha Q \frac{l}{2} = \frac{\mathfrak{J} \pi}{32} d^3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Hieraus folgt:

$$d = \sqrt{\frac{16\, \alpha Q}{\mathfrak{J} \pi} \frac{l}{d}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Dieser Ausdruck bestimmt den Durchmesser des Zapfens, wenn α, $\mathfrak{J}$ die Belastung Q und das Verhältniss $\frac{l}{d}$ zwischen der Länge und dem Durchmesser des Zapfens gegeben sind.

Die Unbestimmtheit des Verhältnisses $\frac{l}{d}$ kann man benutzen, um derjenigen Bedingung zu entsprechen, die erfüllt sein muss, damit ein Zapfen im Gebrauch nicht merklich abgenutzt wird, und sich auch nicht warm läuft. Diese Bedingung ist: dass die Intensität des Druckes zwischen dem Zapfen und der Pfanne unter allen Umständen, insbesondere aber, wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens gross ist, eine mässige seie. Es ist aber die Intensität des Druckes dem Werth von $\frac{Q}{d\,l}$ und die Umfangsgeschwindigkeit dem Werth von $n\,d$ proportional; es ist daher der Natur der Sache angemessen, wenn wir setzen:

$$\frac{Q}{d\,l} = \frac{1}{a + b\,n\,d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wobei a und b zwei durch Erfahrungen zu bestimmende Constante sind. Aus dieser Gleichung (2) und (3) folgt:

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{Q\,(a + b\,n\,d)}{d} \\ Q &= d^2 \sqrt{\frac{\pi}{16}\,\frac{\mathfrak{J}}{\alpha}\,\frac{1}{a + b\,n\,d}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die drei constanten Grössen $\frac{\mathfrak{J}}{\alpha}$ a b bestimmen wir auf folgende Weise:

Wir dürfen zunächst annehmen, dass der grösste Druck gegen einen Zapfen im bewegten Zustand des Wagens doppelt so gross ist, als im ruhigen Zustand und setzen daher $\alpha = 2$.

Nach den Dimensionen, welche den Zapfen der Wagenaxen in der Wirklichkeit gegeben wird, ist die grösste Spannung im ruhigen Zustand des Wagens 300 Kilogramm auf 1 Quadratcentimeter; im bewegten Zustand ist also $\mathfrak{J} = 600$ Kilogramm. Wir haben also zu setzen: $\frac{\mathfrak{J}}{\alpha} = \frac{600}{2} = 300$.

Die Länge eines Zapfens, der keine Bewegung hat, darf gleich seinem Durchmesser genommen werden. Wir setzen also für $n = 0$ $l = d$. Mit diesen Daten folgt aus (2) und (3):

$$d = \sqrt{\frac{16\,Q}{\pi\,300}}$$

$$\frac{Q}{d^2} = \frac{1}{a}$$

Durch Elimination von Q folgt aus diesen Gleichungen:

$$a = 0{\cdot}017.$$

Der Erfahrung zufolge dürfen wir ferner einen Zapfen, welcher in einer Sekunde sechs Umdrehungen macht, und mit 2000 Kilogramm belastet ist, zweimal so lang als den Durchmesser machen. Setzen wir in den Gleichungen (2) und (3):

$$\frac{\mathfrak{J}}{\alpha} = 300 \qquad n = 6 \qquad Q = 2000 \qquad \frac{l}{d} = 2 \qquad a = 0{\cdot}017$$

so finden wir:

$$d = \sqrt{\frac{16 \times 2000}{3{\cdot}14 \times 300}} \cdot 2$$

$$\frac{2000}{2\,d^2} = \frac{1}{0{\cdot}017 + 6\,b\,d}$$

und hieraus folgt: $d = 8{\cdot}2 \quad b = 0{\cdot}001$.

Hiermit sind nun die drei Coeffizienten $\frac{\mathfrak{S}}{\alpha}$ a und b bestimmt, und vermittelst derselben geben die Gleichungen (4):

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{0{\cdot}001\,Q\,(17 + n\,d)}{d} \\ Q &= \frac{243}{\sqrt{17 + n\,d}} \cdot d^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Vermittelst dieser Formeln ist die in dem VIII. Abschnitt enthaltene Tabelle berechnet.

Zuweilen ist in einer Construction nicht hinreichend Raum vorhanden, um einem Zapfen die wünschenswerthe Länge geben zu können. In einem solchen Falle wird man sich in der Regel begnügen müssen, die Zapfenlänge gleich dem Durchmesser zu nehmen, diesen letzteren also so zu bestimmen, wie wenn $n = 0$ wäre.

Stahl-Zapfen.

Die Raumverhältnisse sind zuweilen so beengend, dass es wünschenswerth wird, die Zapfendimensionen so klein als möglich nehmen zu können. In solchem Falle ist es angemessen, die Zapfen aus gutem Gussstahl zu machen und die Länge derselben gleich dem Durchmesser zu nehmen. Bei Lokomotiven mit aussen liegenden Cylindern ist es insbesondere angemessen, die Kurbelzapfen, welche in die Radnaben der Triebräder eingesetzt werden von Gusstahl zu nehmen. Ist Q der Druck gegen einen solchen Zapfen in Kilogrammen, d der Durchmesser, l die Länge desselben in Centimetern, so ist zu nehmen:

$$d = l = 0{\cdot}09\,\sqrt{Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Stärke der Axen der Treib- und Laufräder.

Um die Querschnittsdimensionen, welche die Axen an verschiedenen Stellen erhalten sollen, zu bestimmen, ist es am angemessensten, die in dem Lokomotivbau vorkommenden Axenconstruktionen besonders zu behandeln.

A. Axe eines Laufwerkes für einen Wagen oder für eine Lokomotive mit äusseren Zapfen. (Tab. XV, Fig. 62.)

Es sei Q die Belastung eines Zapfens des Laufwerkes; d der Durchmesser; l die Länge eines Zapfens; l_1 der Abstand des Zapfenmittels vom Mittel des neben dem Zapfen befindlichen Rades; d_1 der Durchmesser der Axe in ihrer Mitte; $\mathfrak{S}$ die Spannung per

1 Quadratcentimeter, welche an der Wurzel eines Zapfens und in der Mitte der Axe eintreten darf. Das Moment, welches den Zapfen an der Wurzel abzubrechen strebt, ist $Q\frac{l}{2}$. Das Moment, welches die Welle in der Mitte abzubrechen strebt, ist $Q\,l_1$, man hat daher, wenn die Welle und der Zapfen gleich fest gemacht werden sollen.

$$Q\frac{l}{2} = \frac{\mathfrak{Z}\,\pi}{32}\,d^3$$

$$Q\,l_1 = \frac{\mathfrak{Z}\,\pi}{32}\,d_1^3$$

Durch Elimination von Q folgt aus diesen Gleichungen:

$$d_1 = d\sqrt[3]{\frac{2\,l_1}{l}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

gewöhnlich ist $l_1 = \frac{3}{2}\,l$ und dann wird: $d_1 = d\sqrt[3]{3} = 1{\cdot}44\,d$. Für ruhige Pressungen würde die Axe in allen Querschnitten zwischen den Rädern gleiche Festigkeit darbieten, wenn ihr Durchmesser überall gleich $d_1 = 1{\cdot}44\,d$ gemacht würde, allein die Erfahrung hat gelehrt, dass die Axen durch die gewaltsamen Einwirkungen der Bahn gegen die Radumfänge am leichtesten in der Nähe der Naben brechen, sie werden desshalb von der Mitte an gegen die Naben etwas verdickt, so dass der Durchmesser an den Naben $1{\cdot}6\,d$ wird.

B. Laufaxe oder Triebaxe einer Lokomotive mit äusseren Cylindern und innerem Rahmen. (Fig. 63)

Es sei Q die Belastung eines Axenhalses, d der Durchmesser des Halses, l die Länge desselben, l_1 die Entfernung vom Mittel des Halses bis zum Mittel des nebenan befindlichen Rades, d_1 der Durchmesser der Axen in der Mitte. In diesem Falle ist das Moment, welches die Zapfen, so wie auch jenes, das die Welle in der Mitte abzubrechen strebt, gleich $Q\,l_1$, man hat daher zur Bestimmung von d und d_1:

$$d = d_1 = \sqrt[3]{\frac{32\,Q\,l_1}{\mathfrak{Z}\,\pi}}\ \text{Centimeter} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Für $\mathfrak{Z}$ darf man auch hier 300 setzen, und dann wird:

$$d = d_1 = 0{\cdot}32\sqrt[3]{Q\,l_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Die Länge l des Halses kann man gewöhnlich nicht grösser als den Durchmesser machen, weil sonst l zu gross ausfiele, und die Rahmen zu nahe aneinander zu liegen kämen. Nimmt man aber $l_1 = d$, so folgt aus (3):

$$l = d = d_1 = 0{\cdot}18\sqrt[2]{Q}$$

C. Triebaxe mit inneren Kurbeln für Lokomotive mit innen liegenden Cylindern und inneren Rahmen. (Fig. 64.)

Es sei Q die Belastung eines Axenhalses, P der Druck gegen einen Kurbelzapfen, l_1 der Abstand vom Mittel eines Rades bis zum Mittel des nebenan befindlichen Halses, l_2 der Abstand vom Mittel eines Halses bis zum Mittel der nebenan befindlichen Kurbel, l_3 der Abstand vom Mittel einer Kurbel bis zum Mitttel der ganzen Axe, r der Halbmesser der Kurbel, d_1 der Durchmesser des Axenhalses, d der Durchmesser eines Kurbelzapfens, d_2 der Durchmesser der Axe in der Mitte.

Durch die Belastungen der Axenhälse wird die Axe nach abwärts gebogen. Die aus diesen Belastungen entspringenden Momente, welche die Axe in ihrer Mitte C, in der Mitte des Kurbelzapfens B und in der Mitte eines Axenhalses A abzubrechen streben, sind von gleicher Grösse und ihr gemeinschaftlicher Werth ist $Q\,l_1$. Die zwischen den Mittelpunkten der Axenhälse befindlichen Theile der Axe sind aber auch durch die nach horizontaler Richtung gegen die Kurbelzapfen wirkenden Drücke auf respektive Festigkeit in Anspruch genommen. Die in horizontalem Sinne biegend wirkenden Momente sind für die mittleren Querschnitte der Welle $P\,l_2$, für den mittleren Querschnitt eines Kurbelzapfens ebenfalls $P\,l_2$, für den mittleren Querschnitt eines Halses gleich Null. Die Biegungsmomente, welche durch die gleichzeitige Wirkung der Belastungen der Axenhälse und der Drücke gegen die Kurbelzapfen entstehen, sind demnach für die Querschnitte bei C und B $\sqrt{Q^2 l_1^2 + P^2 l_2^2}$ und für den Querschnitt bei A $Q\,l_1$. Nennt man nun $\mathfrak{J}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogenen Spannungen, welche an den Oberflächen der Querschnitte bei C, B und A eintreten dürfen, so hat man zur Bestimmung der Durchmesser, welche die Welle bei C B und A erhalten muss, um der biegenden Wirkung der Kräfte Q und P zu widerstehen, folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{c} \sqrt{Q^2 l_1^2 + P^2 l_2^2} = \frac{\mathfrak{J}\pi}{32} d^3 = \frac{\mathfrak{J}\pi}{32} d_2^3 \\ Q\,l_1 = \frac{\mathfrak{J}\pi}{32} d_1^3 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

und hieraus folgt:

$$d = d_2 = \sqrt[3]{\frac{32}{\mathfrak{J}\pi}\sqrt{Q^2 l_1^2 + P^2 l_2^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{32}{\mathfrak{J}\pi} Q\,l_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Allein die auf die Kurbelzapfen wirkenden Kräfte werden durch Torsion auf die Räder übertragen; die Axenhälse sind daher auch auf Torsion in Anspruch genommen. Nennt man δ_1 die Durchmesser, welche die Axenhälse erhalten müssen, um nur allein der Torsion, der sie ausgesetzt sind, zu widerstehen, so hat man zur Bestimmung von δ_1 die Gleichung:

$$\delta_1 = \sqrt[3]{\frac{16\,P\,r}{\pi\,\mathfrak{T}}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

wobei $\mathfrak{T}$ die durch die Torsion an der Oberfläche des Halses entstehende Spannung

per ein Quadratcentimeter bezeichnet. Allein ein verwundener Stab widersteht dem Abbrechen ebenso stark, als ein nicht verwundener, und ein gebogener Stab widersteht dem Abwinden ebenso stark, als ein nicht gebogener; der Wellenhals bei A erhält also seine richtige Dimension, wenn wir den Durchmesser gleich machen d, wenn $d_1 > \delta_1$ ausfällt, dagegen gleich machen δ_1 wenn $\delta_1 > d_1$ ausfällt.

Um mit den Thatsachen der Wirklichkeit harmonirende Dimensionen zu erhalten, ist zu setzen: $\mathfrak{Z} = 300$ $\mathfrak{T} = 135$ und dann wird:

$$\left.\begin{aligned} d = d_2 &= 0{\cdot}32 \sqrt[6]{Q^2 l_1^2 + P^2 l_2^2} \\ d_1 &= 0{\cdot}32 \sqrt[3]{Q l_1} \\ \delta_1 &= 0{\cdot}335 \sqrt[3]{P r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Es sei z. B.:

$$Q = 3410, \quad l_1 = 16, \quad P = 5000, \quad r = 26, \quad l_2 = 25$$

so wird:

$$d = d_2 = 16{\cdot}5 \quad d_1 = 12.16, \quad \delta_1 = 16{\cdot}9.$$

Da also δ_1 grösser als d_1 ist, so muss der Durchmesser des Axenhalses 16·9 und nicht 12·16 Centimeter gemacht werden.

Die Ausdrücke (5) können auch geschrieben werden wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= 0{\cdot}32 \sqrt[3]{Q l_1} \\ \delta_1 &= 0{\cdot}335 \sqrt[3]{P r} \\ d = d_2 &= d_1 \sqrt[6]{1 + \left(\frac{P l_2}{Q l_1}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Die Durchmesser d der Kurbelzapfen fallen insbesondere sehr stark aus für Maschinen mit innen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern, denn bei diesen Anordnungen ist der Druck P gegen die Kurbelzapfen, im Verhältniss zur Belastung Q der Kurbelaxe, sehr gross.

Festigkeit eines cylindrischen Gefäßes.

Wir wollen die Festigkeit eines cylindrischen Gefässes untersuchen, das im Innern eine Flüssigkeit enthält, die auf jeden Quadratcentimeter einen Druck p_0 und von aussen von einer andern Flüssigkeit umgeben ist, die auf jeden Quadratcentimeter der äusseren Fläche einen Druck p_1 ausübt. Es sei $p_0 > p_1$. Es sei für den natürlichen von keinen äusseren Kräften affizirten Zustand des Gefässes r_0 der innere, r_1 der äussere Halbmesser des Cylinders; x der Halbmesser eines Kreises, der zwischen dem innern und äussern Begrenzungskreis des Cylinders liegt.

Unter den Einwirkungen der Pressungen p_0 und p_1 wird der Gylinder ausgeweitet bis ein Gleichgewicht zwischen diesen Pressungen und den inneren Elastizitätskräften des Materials eintritt. Dadurch gehen die Halbmesser r_0 r_1 und x in ϱ_0 ϱ_1 und ξ über

jedoch in der Art, dass die Wanddicke $\varrho_0 - \varrho_1$ des ausgeweiteten Cylinders kleiner ist, als die Wanddicke $r_1 - r_0$ des Cylinders im natürlichen Zustand. Zieht man durch einen Punkt m (Fig. 87) des Kreises vom Halbmesser ξ einen Radius m C und eine Tangente A B, so ist klar, dass das Material bei m nach der Richtung A B ausgedehnt, nach der Richtung C m zusammengepresst sein wird. Nennen wir y die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung bei m nach der Richtung A B und z die auf einen Quadratcentimeter bezogene Pressung bei m nach der Richtung m C, ε den Modulus des Materials, aus welchem der Cylinder besteht. Das Material, welches im natürlichen Zustand zwischen den Kreisen, deren Halbmesser x und x + dx sind, eingeschlossen war, befindet sich im ausgedehnten Zustand des Cylinders zwischen zwei Kreisen, deren Halbmesser ξ und $\xi + d\xi$ sind; es ist demnach $2\pi\xi - 2\pi x = 2\pi(\xi - x)$ die Ausdehnung und $dx - d\xi$ die Zusammendrückung dieses Materials und man hat nach dem bekannten, für die Ausdehnung und Zusammendrückung von Stäben geltenden empirischen Gesetze:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi(\xi - x) = 2\pi x \cdot \frac{y}{\varepsilon} \\ dx - d\xi = dx \cdot \frac{z}{\varepsilon} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Nennt man Θ die Aenderung, welche in der Fläche $(x + dx)^2 \pi - x^2 \pi$ durch die Ausdehnung eintritt, so ist

$$\Theta = \left[(\xi + d\xi)^2 \pi - \xi^2 \pi\right] - \left[(x + dx)^2 \pi - x^2 \pi\right]$$

oder weil dx und $d\xi$ Differenzialien sind:

$$\Theta = 2\pi(\xi\, d\xi - x\, dx) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Aus den Gleichungen (1) folgt aber:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right) \\ d\xi = dx\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Führt man diese Werthe in (2) ein und vernachlässigt das jederzeit verschwindend kleine Glied $\frac{y}{\varepsilon} \frac{z}{\varepsilon}$ so findet man:

$$\Theta = 2\pi x\, dx\left(\frac{y}{\varepsilon} - \frac{z}{\varepsilon}\right)$$

oder

$$\frac{\Theta}{2\pi x\, dx} = \frac{1}{\varepsilon}(y - z) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Es ist aber $2\pi x\, dx$ die Fläche, welche in Folge der Einwirkungen der Pressungen p_0 und p_1 eine Ausdehnung erlitten hat $\frac{\Theta}{2\pi x\, dx}$ ist demnach die auf einen Quadratcentimeter bezogene Flächenausdehnung im Punkt m.

Um den analystischen Schwierigkeiten und Weitläufigkeiten, welcher einer ganz scharfen Lösung unseres Problems im Wege stehen, zu entgehen, sind wir nun genöthigt, eine Hypothese zu machen. Wir nehmen nämlich an, dass die auf einen Quadratcentimeter bezogene Flächenausdehnung in allen Punkten des Cylinderquerschnittes gleich gross sei, oder dass $\frac{1}{\varepsilon}(y - z)$ für jeden Querschnittspunkt den gleichen Werth hat. Diesen constanten Werth können wir leicht finden. Nennen wir nämlich $\mathfrak{A}$ die Spannung des Materials per einen Quadratcentimeter am inneren Umfang des Cylinders, so ist $\mathfrak{A}$ der Werth von y für $x = r_0$. Es ist aber ferner für $x = r_0$ $z = p_0$, daher ist die Flächenausdehnung per einen Quadratcentimeter am innern Umfang des Cylinders und vermöge unserer Hypothese in jedem Punkt des Cylinderquerschnitts gleich $\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{A} - p_0)$.

Die Flächenausdehnung irgend eines Theils des Cylinderquerschnittes wird nun gefunden, wenn man die Fläche, deren Ausdehnung man berechnen will, mit dem Ausdehnungscoeffizienten $\frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{A} - p_0)$ multiplizirt. Die Fläche $(x^2 - r_0^2)\pi$ wird durch die Ausdehnung $(\xi^2 - \varrho_0^2)\pi$. Die Ausdehnung ist demnach $(\xi^2 - \varrho_0^2)\pi - (x^2 - r_0^2)\pi$, daher hat man:

$$(\xi^2 - \varrho_0^2)\pi - (x^2 - r_0^2)\pi = (x^2 - r_0^2)\pi \frac{1}{\varepsilon}(\mathfrak{A} - p_0) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Allein es ist vermöge der ersten der Gleichungen (3):

$$\xi = x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

$$\varrho_0 = r_0\left(1 + \frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}\right)$$

Führt man diese Werthe von ξ und ϱ_0 in (5) ein, und vernachlässigt die Quadrate von $\frac{y}{\varepsilon}$ und von $\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}$ gegen die ersten Potenzen, so findet man:

$$y x^2 - \mathfrak{A} r_0^2 = (x^2 - r_0^2)\frac{\mathfrak{A} - p_0}{2} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

und hieraus folgt:

$$y = \frac{\mathfrak{A} - p_0}{2} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2}\frac{r_0^2}{x^2} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Somit ist nun die auf einen Quadratcentimeter bezogene tangentiale Spannung eines in einer Entfernung x von der Axe des Cylinders befindlichen Punktes berechnet. Diese nimmt, wie man sieht, von der inneren Fläche gegen die äussere hin ab, ist also am innern Umfang am grössten und beträgt daselbst $\mathfrak{A}$.

Nennen wir υ die Spannung per 1 Quadratcentimeter in der Entfernung ξ, so findet man υ, wenn man in (7) x mit ξ und y mit υ und r_0 mit ϱ_0 vertauscht. Man hat daher:

$$\upsilon = \frac{\mathfrak{A} - p_0}{2} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2}\frac{\varrho_0^2}{\xi^2} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Nun ist $\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} v \, d\xi$ die Summe aller Spannungen in einer, $2\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} v \, d\xi$ die Summe aller Spannungen in zwei diametral gegenüber liegenden Wanddicken sind ferner $2\varrho_0 p_0$ und $2\varrho_1 p_1$ die Pressungen der Flüssigkeiten, welche die Spannungen in zwei diametral gegenüber stehenden Wanddicken hervorrufen.

Man hat daher:

$$2\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} v \, d\xi = 2(\varrho_0 p_0 - \varrho_1 p_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

oder wegen (8)

$$2\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \left[\frac{\mathfrak{A} - p_0}{2} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2}\frac{\varrho_0^2}{\xi^2}\right] d\xi = 2(\varrho_0 p_0 - \varrho_1 p_1)$$

Durch Integration findet man:

$$\frac{\mathfrak{A} - p_0}{2}(\varrho_1 - \varrho_0) + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2}\varrho_0^2 \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\varrho_1 \varrho_0} = \varrho_0 p_0 - \varrho_1 p_1$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2 p_1 - p_0}}$$

Es ist aber vermöge der ersten der Gleichungen (3):

$$\varrho_1 = r_1\left(1 + \frac{p_1}{\varepsilon}\right)$$

$$\varrho_0 = r_0\left(1 + \frac{p_0}{\varepsilon}\right)$$

Daher findet man:

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{1 + \frac{p_0}{\varepsilon}}{1 + \frac{p_1}{\varepsilon}}\sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2 p_1 - p_0}}$$

oder endlich weil $\frac{p_0}{\varepsilon}$ und $\frac{p_1}{\varepsilon}$ jederzeit gegen die Einheit beinahe verschwindend kleine Grössen sind:

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2 p_1 - p_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Diese Formel, welche wir unter der Voraussetzung gefunden haben, dass die verhältnissmässige Volumenänderung des Materials in allen Punkten einen und denselben Werth habe, stimmt mit derjenigen überein, welche *Lamé* in seinem Werke: Theorie mathematique de l'elasticité des corps solides pag. 191 zuerst gefunden hat, ohne von irgend einer Hypothese über die verhältnissmässige Volumenänderung des Materials auszugehen.

Nennen wir:

D den inneren Durchmesser des Cylinders } in Centimetern;
δ die Wanddicke desselben }
n die Anzahl der Atmosphären, welche dem innern,
n_1 die Anzahl der Atmosphären, welche dem äusseren Druck entspricht, und nehmen den Druck der Atmosphäre auf 1 Quadratcentimeter (der eigentlich 1·0335 Kilogr. beträgt) zu 1 Kilogramm an, so ist:

$$r_0 = \frac{D}{2} \qquad r_1 = \frac{D}{2} + \delta \qquad p_0 = n \qquad p_1 = n_1$$

und $\mathfrak{A}$ bedeutet dann die Spannung auf 1 Quadratcentimeter bezogen an der innern Fläche der Wand.

Mit diesen neuen Bezeichnungen folgt aus (10):

$$\delta = \frac{D}{2}\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{A}+n}{\mathfrak{A}+2n_1-n}} - 1\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Setzt man in dieser Formel für $\mathfrak{A}$ den Coeffizienten der absoluten Festigkeit des Materials, aus welchem der Cylinder besteht, so gibt diese Formel diejenige Wanddicke, bei welcher ein Bersten des Cylinders eintritt. Diese Wanddicke wird unendlich, oder es tritt ein Bersten ein, wie dick man auch die Wand machen mag, wenn $n = \mathfrak{A} + 2n_1$ ist, d. h. wenn die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung der Flüssigkeit um das Doppelte der äusseren Pressung auf einen Quadratcentimeter grösser ist, als der Coeffizient der absoluten Festigkeit des Materials.

Bei hydraulischen Pressen ist die Wanddicke des grossen Presscylinders gewöhnlich halb so gross, als der innere Durchmesser, oder es ist $\delta = \frac{D}{2}$. Für dieses Verhältniss gibt die Formel (11):

$$n = \frac{3}{5}\mathfrak{A} + \frac{8}{5}n_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Die absolute Festigkeit des Gusseisens ist durchschnittlich 1000 Kilogramm per einen Quadratcentimeter. Die Presscylinder dürfen nicht stärker, als bis zu $\frac{1}{3}$ ihrer absoluten Festigkeit in Anspruch genommen werden, man kann also $\mathfrak{A}$ nicht grösser als 300 annehmen, und für diesen Werth gibt die Formel (12) mit Berücksichtigung, dass in diesem Fall $n_1 = n$ ist:

$$n = 181{\cdot}6$$

Damit also der Cylinder der hydraulischen Presse, bei welchem die Wanddicke halb so gross ist, als der innere Durchmesser, das Material nicht mehr als auf $\frac{1}{3}$ seiner Festig-

keit in Anspruch nimmt, darf der innere Druck der Flüssigkeit nicht mehr als 181·6 Atmosphären betragen.

Bei Dampfkesseln ist der innere Druck $\mathfrak{n}$ gegen die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung $\mathfrak{A}$, welche in dem Material an der innern Fläche der Wand eintreten darf, eine kleine Grösse, und dann ist es erlaubt, für δ einen Annäherungswerth aufzustellen. Es ist ganz genau:

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{n}}{\mathfrak{A}+2\,\mathfrak{n}_1-\mathfrak{n}}}-1=\left(1+2\,\frac{\mathfrak{n}-\mathfrak{n}_1}{\mathfrak{A}+2\,\mathfrak{n}_1-\mathfrak{n}}\right)^{\frac{1}{2}}-1$$

und annähernd

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{n}}{\mathfrak{A}+2\,\mathfrak{n}_1-\mathfrak{n}}}-1=\frac{\mathfrak{n}-\mathfrak{n}_1}{\mathfrak{A}+2\,\mathfrak{n}_1-\mathfrak{n}}$$

demnach ist auch annähernd

$$\delta=\frac{D}{2}\,\frac{\mathfrak{n}-\mathfrak{n}_1}{\mathfrak{A}+2\,\mathfrak{n}_1-\mathfrak{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Diese Formel wollen wir benutzen, um eine Regel zur Bestimmung der Metalldicke cylindrischer Kessel aufzustellen. Dieselbe gibt natürlich für $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1$, $\delta=0$. Allein jeder Kessel muss auch dann, wenn der innere Druck dem äusseren gleich wäre, eine gewisse Metalldicke erhalten, um insbesondere gegen verschiedene Zufälligkeiten hinreichende Festigkeit darbieten zu können. Die Formel (13) ist also unmittelbar nach ihrer Form zur Aufstellung einer praktisch brauchbaren Regel für die Bestimmung der Metallstärke nicht geeignet. Wir schreiben desshalb:

$$\delta=\frac{D}{2}\left(\frac{\mathfrak{n}-\mathfrak{n}_1}{\mathfrak{A}+2\,\mathfrak{n}_1-\mathfrak{n}}+\mathfrak{B}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

und bestimmen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf folgende Weise durch Erfahrungen. Wir dürfen annehmen, dass ein Kessel von 100 Centimeter Weite doch eine Metalldicke von 0.5 Centimeter erhalten soll, wenn der innere Druck dem äusseren gleich ist. Setzt man in die Formel $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1$ $D=100$ $\delta=0{\cdot}5$, so folgt aus ihr $\mathfrak{B}=0{\cdot}01$.

Die cylindrischen Theile der Lokomotivkessel haben durchschnittlich einen Durchmesser $D=100$ Centimeter, eine Metalldicke $\delta=1{\cdot}2$ Centimeter, haben einer normalen Spannung $\mathfrak{n}$ von 6 Atmosphären zu widerstehen, und gewähren bei diesen Abmessungen eine angemessene Sicherheit. Setzen wir in (14) $\mathfrak{n}=6$ $\mathfrak{n}_1=1$ $\delta=1.2$ $D=100$ $\mathfrak{B}=0{\cdot}01$, so findet man $\mathfrak{A}=361$. Vermittelst dieser Werthe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und wenn man noch $\mathfrak{n}_1=1$ setzt folgt aus (14)

$$\delta=D\,\frac{1{\cdot}315+0{\cdot}495\,\mathfrak{n}}{363-\mathfrak{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Diese Formel wollen wir als Regel für die Bestimmung der Wanddicke cylindrischer Dampfkessel gelten lassen.

Diese Formel gibt:

für $n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
„ $\frac{\delta}{D} =$	0·0050	0·0064	0·0077	0·0092	0·0106	0·0120	0·0134	0·0149	0·0163	0·0177

Nach dieser Regel fallen die Metalldicken für schwache Pressungen etwas stärker aus, als nach den Regeln, die bisher für die Dicke der Kesselwände aufgestellt wurden. Nach der in Frankreich üblichen Regel wird z. B. die Metalldicke eines Kessels von 100 Centimeter Durchmesser und für eine Spannung von 2 Atmosphären 0·48 Centimeter, unsere Formel gibt dagegen in diesem Fall 0·64 Centimeter.

Wenn wir bestimmen wollen, wie stark das Kesselblech in Anspruch genommen ist, wenn seine Dicke nach obiger Regel bestimmt wird, müssen wir vermittelst der Gleichungen (11) oder (13) die Werthe von $\mathfrak{A}$ bestimmen. Aus (13) folgt, wenn man $n_1 = 1$ setzt:

$$\mathfrak{A} = n - 2 + \frac{D}{2\delta}(n-1)$$

Für $D = 100$ $n = 6$ wird nach obiger Tabelle $\delta = 1{\cdot}2$ und nun folgt $\mathfrak{A} = 212$. Die absolute Festigkeit von Eisenblech ist 3300. Das Blech des Kessels ist demnach in diesem Falle auf $\frac{212}{3300} = \frac{1}{15}$ seiner absoluten Festigkeit in Anspruch genommen.

Festigkeit eines sphärischen Gefäßes.

Die Fig. 87 kann uns auch zur Untersuchung der Festigkeit eines sphärischen Gefässes dienen. Es sei für den natürlichen Zustand r_0 der innere, r_1 der äussere, x irgend ein zwischen r_0 und r_1 liegender Kugelhalbmesser. Im ausgedehnten Zustand des Gefässes seien diese Halbmesser ϱ_0 ϱ_1 ξ. In irgend einem Punkt m der Kugelfläche vom Halbmesser ξ herrscht nach radialer Richtung mC Zusammenpressung, nach der auf mC senkrechten Richtung AmB Ausdehnung. Die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung sei y, die auf einen Quadratcentimeter bezogene Pressung z. Das Material, welches ursprünglich innerhalb zweier Kugelflächen, deren Halbmesser x und $x + dx$ sind, enthalten war, befindet sich nach erfolgter Ausdehnung innerhalb der Kugelflächen, deren Halbmesser ξ und $\xi + d\xi$ sind. Die lineare Zusammenpressung nach der Richtung des Radius ist demnach $dx - d\xi$, die lineare Ausdehnung einer Kreisperipherielänge $2\pi x$ ist $2\pi(\xi - x)$. Man hat daher auch hier:

$$2\pi(\xi - x) = 2\pi x \frac{y}{\varepsilon}$$

$$dx - d\xi = dx \frac{z}{\varepsilon}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right) \\ d\xi &= dx\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei ε den Modulus der Elastizität des Materials bedeutet.

Nennen wir Θ die Volumensänderung, welche in dem zwischen den Kugelflächen x und $x + dx$ enthaltenen Material eintritt, so ist:

$$\Theta = \frac{4}{3} \pi \left[(\xi + d\,\xi)^3 - \xi^3\right] - \frac{4}{3} \pi \left[(x + dx)^3 - x^3\right]$$

oder auch, weil $d\,\xi$ und dx Differenzialien sind:

$$\Theta = 4 \pi (\xi^2 d\xi - x^2 dx)$$

Setzt man für ξ und $d\xi$ die Werthe, welche die Gleichungen (1) darbieten, so wird:

$$\Theta = 4 \pi x^2 dx \left[\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right)^2 \left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) - 1\right]$$

Da in allen Anwendungen insbesondere auf Metallgefässe $\frac{y}{\varepsilon}$ und $\frac{z}{\varepsilon}$ sehr kleine Grössen sind, so darf man die Quadrate und die Produkte dieser Grössen gegen ihre ersten Potenzen vernachlässigen und dann wird:

$$\Theta = 4 \pi x^2 dx \left(\frac{2y}{\varepsilon} - \frac{z}{\varepsilon}\right) = 4 \pi x^2 dx \frac{2y - z}{\varepsilon}$$

Es ist aber $4 \pi x^2 dx$ das Volumen, das eine Aenderung Θ erlitten hat, $\frac{\Theta}{4 \pi x^2 dx}$ oder $\frac{2y - z}{\varepsilon}$ ist demnach die auf einen Kubikcentimeter bezogene Volumensänderung, welche in dem zwischen den Kugelflächen x und $x + dx$ eingeschlossenen Material eintritt, oder kurz gesprochen: $\frac{2y - z}{\varepsilon}$ ist die verhältnissmässige Volumensausdehnung, welche in der Entfernung ξ eintritt. Wir wollen aber auch hier die hypothetische Annahme machen, dass die verhältnissmässige Volumensausdehnung in allen Punkten der sphärischen Gefässwand einen und denselben Werth habe, dass mithin $\frac{2y - z}{\varepsilon}$ eine constante Grösse sei, deren Werth sich ergeben wird, wenn man für y und z, die irgend einem ganz bestimmten Punkt der Gefässwand entsprechenden Werthe setzt. Nennen wir p_0 die Pressung der Flüssigkeit im Innern auf einen Quadratcentimeter, p_1 die äussere Pressung auf einen Quadratcentimeter, $\mathfrak{A}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung an der innern Kugelfläche vom Halbmesser ϱ_0, so ist für irgend einen Punkt dieser Kugelfläche $y = \mathfrak{A}$ und $z = p_0$. Der constante Werth von $\frac{1}{\varepsilon}(2y - z)$ ist demnach $\frac{1}{\varepsilon}(2\mathfrak{A} - p_0)$.

Da nach unserer Hypothese die verhältnissmässige Volumensänderung für jeden Punkt der Gefässwand den gleichen Werth hat, so findet man die Volumensänderung: $\frac{4}{3}\pi\left(\xi^3 - \varrho_0^3\right) - \frac{4}{3}\pi\left(x^3 - r_0^3\right)$ des Volumens $\frac{4\pi}{3}\left(x^3 - r_0^3\right)$ wenn man dieses Volumen mit $\frac{1}{\varepsilon}(2\mathfrak{A} - p_0)$ multiplizirt. Man hat daher:

$$\frac{4}{3}(\xi^3 - \varrho_0^3) - \frac{4}{3}\pi(x^3 - r_0^3) = \frac{4}{3}\pi(x^3 - r_0^3)\frac{2\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Allein vermöge der ersten der Gleichungen (1) ist:

$$\xi = x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

$$\varrho_0 = r_0\left(1 + \frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}\right)$$

Führt man die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe von x und r_0 in (2) ein, und vernachlässiget die Produkte und höheren Potenzen der durch ε dividirten Glieder, so findet man:

$$\xi^3 y - \varrho_0^3 \mathfrak{A} = (\xi^3 - \varrho_0^3)\frac{2\mathfrak{A} - p_0}{3}$$

und hieraus folgt:

$$y = \frac{2\mathfrak{A} - p_0}{3} + \frac{\varrho_0^3}{\xi^3}\,\frac{\mathfrak{A} + p}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Hiermit ist also die in der Kugelfläche vom Halbmesser ξ herrschende Spannung berechnet. Sie nimmt nach aussen hin ab, ist am innern Umfang, wo ihr Werth gleich $\mathfrak{A}$ ist, am grössten.

Die Bedingungs-Gleichung des Gleichgewichtes zwischen den Flüssigkeitspressungen und den Material-Spannungen ergibt sich nun auf folgende Art: Legen wir durch den Mittelpunkt der Kugelflächen eine Ebene, welche das Gefäss in zwei Hälften theilt, so werden dieselben durch den innern Druck mit einer Kraft $\varrho_0^2 \pi p_0$ auseinander getrieben, durch den Druck der äusseren Flüssigkeit mit einer Kraft $\varrho_1^2 \pi p_1$ gegen einander gedrückt, die Differenz $(\varrho_0^2 p_0 - \varrho_1^2 p_1)\pi$. Diese Kraft muss daher gleich sein der Summe aller Spannungen, die in dem Schnitt der sphärischen Gefässwand mit jener Ebene vorkommen; man hat daher:

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} 2\pi\xi\, d\xi\, y = \pi(\varrho_0^2 p_0 - \varrho_1^2 p_1)$$

oder wenn man für y seinen Werth setzt:

$$2\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \xi\left(\frac{2\mathfrak{A} - p_0}{3} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{3}\,\frac{\varrho_0^3}{\xi^3}\right) d\xi = \varrho_0^2 p_0 - \varrho_1^2 p_1$$

Hieraus findet man durch Integration:

$$2\left(\frac{2\mathfrak{A} - p_0}{3}\,\frac{\varrho_1^2 - \varrho_0^2}{2} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{3}\,\varrho_0^3\,\frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\varrho_1 \varrho_0}\right) = \varrho_0^2 p_0 - \varrho_1^2 p_1$$

und aus diesem Ausdruck folgt durch gewöhnliche Reduktionen:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A}+p_0)}{2\mathfrak{A}+3p_1-p_0}}$$

Es ist aber $\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{r_1\left(1+\frac{p_1}{\varepsilon}\right)}{r_0\left(1+\frac{p_0}{\varepsilon}\right)}$ und da $\frac{p_1}{\varepsilon}$ und $\frac{p_0}{\varepsilon}$ jederzeit ungemein kleine Grössen sind, so begeht man keinen merklichen Fehler, wenn man $\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{r_1}{r_0}$ setzt; wir erhalten also schliesslich:

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A}+p_0)}{2\mathfrak{A}+3p_1-p_0}} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Auch diese Formel hat zuerst *Lamé* in seinem früher genannten Werk, Seite 213, aufgestellt.

Nennen wir:

δ die Metalldicke des kugelförmigen Gefässes, D den innern Durchmesser } in Centimetern;

$\mathfrak{A}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung, welche im Material an der innern Fläche der Wand eintreten darf;

n die Anzahl der Atmosphären, welche der innern,

n_1 die Anzahl der Atmosphären, welche der äussern Pressung entspricht, und nehmen den Druck einer Atmosphäre auf 1 Quadratcentimeter zu 1 Kilogramm, so ist: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ $p_0 = n$ $p_1 = n_1$ $r_0 = \frac{D}{2}$ $r_1 = \frac{D}{2} + \delta$ und aus der Formel (4) folgt dann:

$$\delta = \frac{D}{2}\left[\sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A}+n)}{2\mathfrak{A}+3n_1-n_1}} - 1\right] \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Setzt man für $\mathfrak{A}$ den Coeffizienten der absoluten Festigkeit des Materials, so gibt diese Formel diejenige Metallstärke, bei welcher ein Bersten des Gefässes eintritt. Diese Metalldicke wird unendlich gross, d. h. der Kessel berstet, wie dick man auch die Wand machen mag, wenn $n = 2\mathfrak{A} + 3n_1$ wird.

Für Dampfkessel ist n im Vergleich zu $\mathfrak{A}$ eine kleine Grösse, und dann kann man wiederum einen Annäherungsausdruck aufstellen. Es ist nämlich ganz genau:

$$\sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{A}+n)}{2\mathfrak{A}+3n_1-n_1}} - 1 = \left(1 + 3\frac{n-n_1}{2\mathfrak{A}+3n_1-n}\right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

Da nun $3(n-n_1)$ gegen $2\mathfrak{A}+3n_1-n$ sehr klein ist, so findet man annähernd:

$$\delta = \frac{D}{2}\frac{n-n_1}{2\mathfrak{A}+3n_1-n} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Wenn die Differenz $n - n_1$ zwischen der innern und äussern Spannung klein ist, gibt diese Formel für δ zu kleine Werthe, wir bringen daher eine Correktion an und setzen:

$$\delta = \frac{D}{2}\left(\frac{n-1}{2\mathfrak{A}+3-n} + \mathfrak{B}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dürfen wir die gleichen Werthe nehmen, die wir für cylindrische Gefässe (Seite 239) aus Erfahrungen gefunden haben. Wir setzen daher $\mathfrak{B} = 0{\cdot}01$ $\mathfrak{A} = 361$ und dann wird:

$$\delta = D \frac{3{\cdot}125 + 0{\cdot}495\, n}{725 - n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Diese Formel gibt:

für	$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{\delta}{D}$	$=$	0·0050	0·00569	0·00638	0·00708	0·0077	0·0085	0·0092	0·0098	0·0105	0·0113

Festigkeit des Feuer- und Wasserkastens einer Lokomotive.

Die Wände des Feuerkastens und des denselben umgebenden Wasserkastens sind der im Kessel herrschenden Pressung ausgesetzt. Diese Wände werden zwar aus sehr starken Blechen von 1 bis 1·5 Centimeter Dicke hergestellt, müssen aber dessen ungeachtet durch verschiedene Verbindungen gegen die deformirende Wirkung des im Kessel herrschenden Druckes geschützt werden. Zu diesem Behufe werden die Wände des Feuerkastens und des Wasserkastens durch Bolzen zusammengehängt, wird ferner die Decke des Feuerkastens vermittelst Bolzen an ein System von schmiedeisernen Barren gehängt, die mit ihren Enden auf der Rückwand und Röhrenwand des Feuerkastens aufsitzen, wird endlich der obere Theil des Wasserkastens durch Winkeleisen und Zugstangen verstärkt. In diesem System von Verbindungen sind die einzelnen Theile auf folgende Weise in Anspruch genommen.

Die Bolzen der Wände und Decke, sowie die Zugstangen sind auf absolute, die Barren der Decke des Feuerkastens und die Winkeleisen am oberen Theil des Wasserkastens sind auf respektive Festigkeit in Anspruch genommen. Die Umfangswände des Feuer- und des Wasserkastens sind als Platten anzusehen, die an vielen über ihren Flächen regelmässig vertheilten Punkten festgehalten werden und auf welche entweder nur normale Pressungen, oder, nebst normalen Pressungen, auch dehnende oder zusammendrückende Kräfte einwirken. Die Decken des Feuerkastens und des Wasserkastens sind nicht zusammengehängt, was zur Folge hat, dass der ganze Feuerkasten durch den Druck des Dampfes gegen seine Decke zusammengestaucht, und dass der Wasserkasten durch den gegen seine Decke wirkenden Dampfdruck nach vertikaler Richtung ausgestreckt wird. Die Umfangswände des Feuerkastens und Wasserkastens sind zusammengehängt, nach horizontaler Richtung werden daher die Wände des Feuerkastens weder gedehnt noch zusammengedrückt, allein da die Wände des Wasserkastens eine grössere Ausdehnung haben, als jene des Feuerkastens, so ist der Gesammtdruck gegen die Flächen des ersteren grösser, als gegen die Flächen des letzteren und die Differenz dieser Pressungen bringt in den Wänden des Wasserkastens eine schwache Ausdehnung nach horizontaler Richtung hervor. Die Zustände in den einzelnen Theilen des in Rede stehenden Baues sind also folgende:

Die Decke des Feuerkastens ist weder gedehnt noch zusammengepresst, wird jedoch in den zwischen den Bolzen befindlichen Theilen durch den Dampfdruck einwärts gebogen. Die Umfangswände des Feuerkastens sind: a) nach horizontaler Richtung weder gedehnt noch zusammengepresst; b) nach vertikaler Richtung zusammengestaucht; c) in den rechteckigen oder puadratischen Flächen zwischen den Bolzen nach einwärts gebogen. Die Umfangswände des Wasserkastens sind: a) nach horizontaler Richtung schwach gedehnt; b) nach vertikaler Richtung stark gedehnt; c) in den rechteckigen oder quadratischen Feldern zwischen den Bolzen nach auswärts gebogen.

Eine ganz genaue Bestimmung der Zustände, in welchen sich alle Theile des Feuer- und Wasserkastens befinden, erfordert die Anwendung von äusserst sublimen analytischen Methoden, die sich in diesem Werke nicht sehen lassen dürfen, wir müssen uns daher mit einer Annäherung begnügen, indem wir, um den Zustand zu bestimmen, der in einem Wand- oder Deckenstück nach einer gewissen Richtung A vorhanden ist, die Bolzenreihen durch Längenrippen ersetzen, deren Richtungen mit der Richtung A einen rechten Winkel bilden. Dann wird eine solche Platte durch die auf sie einwirkenden Kräfte zwischen je zwei Rippen rinnenförmig eingedrückt und die in einer solchen Rinne herrschenden Spannungszustände, welche sich, wie wir sehen werden, durch gewöhnlichere analytische Mittel bestimmen lassen, sind wenigstens annähernd übereinstimmend mit jenen, die nach der Richtung A in einer durch Bolzen gehaltenen Platte vorkommen.

Um also die statischen Zustände eines Wand- oder Deckenstückes annähernd kennen zu lernen, müssen wir nun das Gleichgewicht eines Stabes untersuchen, dessen Querschnitt ein Rechteck ist, der auf einer Reihe von Unterstützungen aufliegt, in allen Punkten nach normaler Richtung gepresst, und nach seiner Länge entweder gedehnt oder zusammengedrückt wird.

Gleichgewicht eines Stabes, der auf einer Reihe von gleich weit von einander entfernten Unterstützungen aufliegt, nach normaler Richtung gepreßt und nach seiner Länge gedehnt wird.

Es sei (Fig. 81) ABC ein solcher Stab in deformirtem Zustand.

In dem Querschnitt bei D, in der Mitte zwischen zwei Unterstützungen, werden gewisse Spannungen vorkommen. Wir werden den Gleichgewichtszustand in einem Stück AD nicht ändern, wenn wir den Stab bei D entzweischneiden, und in allen Punkten des Durchschnittes Kräfte anbringen, welche den Spannungen gleich sind, die vor dem Entzweischneiden in diesem Querschnitt vorhanden waren. Diesen Kräften zusammen entspricht erstlich eine gewisse Summe S und zweitens ein gewisses Drehungsmoment M in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehende Axe. Der Gleichgewichtszustand des Stückes AD wird also nicht gestört, wenn wir den Stab bei D entzweischneiden, dann nach horizontaler Richtung eine spannende Kraft S und überdiess noch ein gewisses Kraftmoment M drehend wirken lassen. Der Gleichgewichtszustand des Stückes AD wird aber auch nicht gestört, wenn wir den Stab bei A einspannen. Unsere Aufgabe reduzirt sich also auf die Bestimmung des Gleichgewichtes eines elastischen Stabes, der sich unter folgenden Verhältnissen befindet. Das eine Ende A (Fig. 79) ist festgehalten und nach der Richtung Ax eingespannt. Auf den Stab wirken der ganzen Länge nach normale Pressungen von gleicher Intensität. An dem freien Ende wirkt parallel mit Ax eine spannende Kraft S und überdies noch ein gewisses Kraftmoment M, welches bewirkt, dass die Richtung des Stabes bei D mit Ax parallel ist.

Wir nennen:

b die Breite, δ die Dicke } des Stabes;

ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht;

p den Druck auf jede Flächeneinheit des Stabes;

$c = AD$ die Länge des Stabes;

$Ap = x$, $mp = y$ } die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Linie, in welcher die Schwerpunkte aller Querschnitte des Stabes liegen;

$\overline{AE} = c$, $AD = f$ } die Coordinaten des Punktes D;

ϱ den Krümmunghalbmesser bei m;

S den Zug, M das Moment } bei m.

Wir nehmen an, die Biegung des Stabes sei nur eine schwache, dann ist $\frac{1}{2}\, b\, p\, (c - x)^2$ die Summe der Momente aller von m bis D wirkenden Pressungen, bezogen auf den Punkt m und $-S\,(f-y)$ das Moment der Spannung S. Die Summe der Momente der Spannungen, die im Querschnitt bei D vorkommen, ist in Bezug auf irgend einen Punkt des Stabes gleich $-M$. Die Summe der Momente aller im Querschnitt bei m vorkommenden Spannungen beträgt $-\frac{b\,\varepsilon\, d^3}{12}\,\frac{1}{\varrho}$. Die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts ist demnach:

$$-\frac{b\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\,\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}\, b\, p\, (c - x)^2 - S\,(f - y) - M = 0$$

Allein da wir eine sehr schwache Biegung voraussetzen und den Punkt m in dem gegen die Axe Ax convexen Theil der Kurve angenommen haben, so ist $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{d x^2}$ wir erhalten daher die Differenzialgleichung:

$$-\frac{b\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\,\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2}\, b\, p\, (c - x)^2 - S\,(f - y) - M = 0$$

oder

$$\frac{b\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\,\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2}\, b\, p\, (c - x)^2 - S\,(f - y) - M \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\left(\frac{1}{2}\, b\, p\, c^2 - S\, f - M\right) &= \alpha \\ \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\, b\, p\, c \;\ldots\ldots &= \beta \\ \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\,\frac{1}{2}\, p\, b \;\ldots\ldots &= \gamma \\ \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\, S \;\ldots\ldots &= \lambda^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

so bezeichnen α β γ λ^2 in Bezug auf die Integration constante Grössen, und die Gleichung (1) wird:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha - \beta x + \gamma x^2 + \lambda^2 y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = -\frac{2\gamma + \alpha\lambda^2}{\lambda^4} + \frac{\beta}{\lambda^2} x - \frac{\gamma}{\lambda^2} x^2 + D e^{\lambda x} + E e^{-\lambda x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wobei D und E die Constanten der Integration bezeichnen. Durch Differenziation dieser Gleichung wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\lambda^2} - 2\frac{\gamma}{\lambda^2} x + \lambda\left(D e^{\lambda x} - E e^{-\lambda x}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nun ist für den Punkt A $x = 0$ $y = 0$ $\frac{dy}{dx} = 0$

und für den Punkt D $x = c$ $y = f$ $\frac{dy}{dx} = 0$

Man hat daher:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -\frac{2\gamma + \alpha\lambda^2}{\lambda^4} + D + E \\
0 &= \frac{\beta}{\lambda^2} + \lambda(D - E) \\
f &= -\frac{2\gamma + \alpha\lambda^2}{\lambda^4} + \frac{\beta}{\lambda^2} c - \frac{\gamma}{\lambda^2} c^2 + D e^{\lambda c} + E e^{-\lambda c} \\
0 &= \frac{\beta}{\lambda^2} - 2\frac{\gamma}{\lambda^2} c + \lambda\left(D e^{\lambda c} - E e^{-\lambda c}\right)
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Diese vier Gleichungen bestimmen die Integrationsconstanten D und E und die Werthe von M und f. Aus der zweiten und vierten dieser Gleichungen folgt zunächst:

$$\left.\begin{aligned}
D &= \frac{\frac{\beta}{\lambda^3}\left(e^{-\lambda c} - 1\right) + \frac{2\gamma c}{\lambda^3}}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \\
E &= \frac{\frac{\beta}{\lambda^3}\left(e^{+\lambda c} - 1\right) + \frac{2\gamma c}{\lambda^3}}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Aus der ersten und dritten der Gleichungen (6) folgt durch Elimination von $\frac{2\gamma + \alpha\lambda^2}{\lambda^4}$ (worin das unbekannte Moment M enthalten ist):

$$f = \frac{\beta}{\lambda^2} c - \frac{\gamma}{\lambda^2} c^2 + D\left(e^{\lambda c} - 1\right) + E\left(e^{-\lambda c} - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Daher, wenn man für D und E die Werthe aus (7) einführt:

$$\left.\begin{aligned} f = \frac{\beta}{\lambda^2} c - \frac{\gamma}{\lambda^2} c^2 + \left[\frac{\beta}{\lambda^3}\left(e^{-\lambda c} - 1\right) + \frac{2\gamma c}{\lambda^3}\right] \frac{e^{\lambda c} - 1}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \\ + \left[\frac{\beta}{\lambda^3}\left(e^{\lambda c} - 1\right) + \frac{2\gamma c}{\lambda^3}\right] \frac{e^{-\lambda c} - 1}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

oder nach einigen Zusammenziehungen:

$$f = \frac{\beta - \gamma c}{\lambda^2}\left[c + \frac{2}{\lambda} \frac{2 - e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Nun ist aber in allen Anwendungen λc eine sehr kleine Grösse, man kann daher setzen:

$$\left.\begin{aligned} e^{\lambda c} &= 1 + \lambda c + \frac{\lambda^2 c^2}{1 \cdot 2} + \frac{\lambda^3 c^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\lambda^4 c^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ e^{-\lambda c} &= 1 - \lambda c + \frac{\lambda^2 c^2}{1 \cdot 2} - \frac{\lambda^3 c^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\lambda^4 c^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Führt man diese Werthe in den obigen Ausdruck für f ein, so findet man:

$$f = \frac{p\, b\, c^4 \lambda^2}{24\, S}\left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda^2 c^2}{6}}\right)$$

oder weil $\left(1 + \frac{\lambda^2 c^2}{6}\right)^{-1}$ annähernd gleich $1 - \frac{\lambda^2 c^2}{6}$ ist

$$f = \frac{p\, b\, c^4 \lambda^2}{24\, S}\left(1 - \frac{\lambda^2 c^2}{6}\right)$$

oder endlich, wenn man für λ^2 seinen Werth setzt:

$$f = \frac{p\, c^4}{2\, \varepsilon\, \delta^3}\left(1 - \frac{2\, S\, c^2}{b\, \varepsilon\, \delta^3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Hiermit ist nun die Einbiegung des Stabes in seiner Mitte bestimmt.

Es liegt in der Natur der Sache, dass der Krümmungshalbmesser entweder bei A oder bei D den kleinsten Werth hat. Nennen wir ϱ_0 ϱ_c die Krümmungshalbmesser, die

den Punkten A und D entsprechen. Durch Differenziation der Gleichung (5) findet man:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho} = -\frac{2\gamma}{\lambda^2} + \lambda^2 \left(D e^{\lambda x} + E e^{-\lambda x}\right)$$

es ist daher:

$$\frac{1}{\varrho_0} = -\frac{2 x}{\lambda^2} + \lambda^2 (D + E)$$

$$\frac{1}{\varrho_c} = -\frac{2\gamma}{\lambda^2} + \lambda^2 \left(D e^{\lambda c} + E e^{-\lambda c}\right)$$

Setzt man für D und E die Werthe (7) und berücksichtiget, dass $2\gamma c = \beta$ ist, so findet man

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_0} &= -\frac{2\gamma}{\lambda^2} + \frac{\beta}{\lambda}\,\frac{e^{\lambda c} + e^{-\lambda c}}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \\ \frac{1}{\varrho_c} &= -\frac{2\gamma}{\lambda^2} + \frac{\beta}{\lambda}\,\frac{2}{e^{\lambda c} - e^{-\lambda c}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Allein es ist $e^{\lambda c} + e^{-\lambda c} > 2$ daher wird: $\frac{1}{\varrho_0} > \frac{1}{\varrho_c}$ oder $\varrho_0 > \varrho_c$. Die stärkste Krümmung findet also bei A statt.

Setzt man in den Ausdruck von $\frac{1}{\varrho_0}$ für $e^{\lambda c}$ $e^{-\lambda c}$ die ersten 5 Glieder der Reihen und berücksichtiget, dass $\beta = 2\gamma c$ ist, so findet man:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{2}{3}\,\gamma c^2\,\frac{1 + \frac{1}{8}\lambda^2 c^2}{1 + \frac{1}{6}\lambda^2 c^2}$$

oder auch weil $\left(1 + \frac{1}{6}\lambda^2 c^2\right)^{-1}$ annähernd gleich $1 - \frac{1}{6}\lambda^2 c^2$ ist:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{2}{3}\,\gamma c^2 \left(1 - \frac{1}{24}\lambda^2 c^2\right)$$

und wenn man für γ und λ^2 ihre Werthe setzt:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{4 p c^2}{\varepsilon \delta^3}\left(1 - \frac{S c^2}{2 b \varepsilon \delta^3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Nennt man $\mathfrak{Z}_1$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung, welche in der obersten Faser des Querschnittes bei A eintreten würde, wenn der Stab nur gebogen

und nicht gedehnt würde, $\mathfrak{Z}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung, die an der gleichen Stelle in dem gebogenen und gedehnten Stab eintritt, so ist:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 + \frac{S}{b\,\delta}\;,\quad \frac{b\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\,\frac{1}{\varrho_0} = \frac{\mathfrak{Z}_1}{6}\,b\,\delta^2$$

man findet daher:

$$\mathfrak{Z} = \frac{S}{b\,\delta} + 2\,p\,\frac{c^2}{\delta^2}\left(1 - \frac{S\,c^2}{2\,b\,\varepsilon\,\delta^3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Hiermit ist also auch die grösste in dem Stab vorkommende Spannungsintensität berechnet.

Die Hauptresultate dieser Untersuchung sind also:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{p\,c^4}{2\,\varepsilon\,\delta^3}\left(1 - \frac{2\,S\,c^2}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\right) \\ \mathfrak{Z} &= \frac{2\,p\,c^2}{\delta^2}\left(1 - \frac{S\,c^2}{2\,b\,\varepsilon\,\delta^3}\right) + \frac{S}{b\,\delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Gleichgewicht eines Stabes, der auf mehreren gleich weit von einander entfernten Stützen aufliegt, nach normaler Richtung gepreßt wird und auch einer Zusammendrückung ausgesetzt ist.

Bezeichnen wir die zusammendrückende Kraft mit S und behalten alle in der vorhergehenden Untersuchung gewählten Bezeichnungen, so erhalten wir die Differenzialgleichung, welche im vorliegenden Fall den Gleichgewichtszustand des Stabes charakterisirt, wenn wir in der Gleichung (1) (Seite 246) S negativ setzen. Wir haben daher:

$$\frac{b\,\varepsilon\,\delta^3}{12}\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\,b\,p\,(c-x)^2 + S\,(f-y) - M \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\left(\frac{1}{2}\,b\,p\,c^2 + S\,f - M\right) &= \alpha \\ \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\,b\,p\,c \;\ldots\ldots &= \beta \\ \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\,\frac{1}{2}\,p\,b \;\ldots\ldots &= \gamma \\ \frac{12}{b\,\varepsilon\,\delta^3}\,S \;\ldots\ldots &= \lambda^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

so erhält man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha - \beta\,x + \gamma\,x^2 - \lambda^2\,y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = -\frac{2\gamma - \alpha\lambda^2}{\lambda^4} - \frac{\beta}{\lambda^2}x + \frac{\gamma}{\lambda^2}x^2 + D\sin.\lambda x + E\cos.\lambda x \quad \ldots\ldots (4)$$

Das Differenziale dieser Gleichung ist:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\beta}{\lambda^2} + \frac{2\gamma}{\lambda^2}x + \lambda(D\cos.\lambda x - E\sin.\lambda x) \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Für $x = 0$ ist $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$. Für $x = c$ ist $y = f$ und $\frac{dy}{dx} = 0$. Daher hat man folgende vier Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -\frac{2\gamma - \alpha\lambda^2}{\lambda^4} + E \\
0 &= -\frac{\beta}{\lambda^2} + \lambda D \\
f &= -\frac{2\gamma - \alpha\lambda^2}{\lambda^4} - \frac{\beta c}{\lambda^2} + \frac{\gamma c^2}{\lambda^2} + D\sin.\lambda c + E\cos.\lambda c \\
0 &= -\frac{\beta}{\lambda^2} + \frac{2\gamma c}{\lambda^2} + \lambda(D\cos.\lambda c - E\sin.\lambda c)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

Aus der zweiten und vierten dieser Gleichungen findet man mit Berücksichtigung, dass $2\gamma c = \beta$ ist.

$$\left.\begin{aligned}
D &= \frac{\beta}{\lambda^3} \\
E &= \frac{\beta\cos.\lambda c}{\lambda^3\sin.\lambda c}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Vermittelst dieser Werthe von D und E und mit Berücksichtigung der ersten der Gleichungen (6) wird die dritte dieser Gleichungen:

$$f = \frac{\beta}{\lambda^3}\,\frac{1 - \cos.\lambda c}{\sin.\lambda c} - \frac{c\beta}{2\lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Da auch hier λc eine kleine Grösse ist, so können wir setzen:

$$\left.\begin{aligned}
\sin.\lambda c &= \lambda c - \frac{\lambda^3 c^3}{6} \\
\cos.\lambda c &= 1 - \frac{\lambda^2 c^2}{2} + \frac{\lambda^4 c^4}{24}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

und dann findet man nach einigen Reduktionen:

$$f = \frac{\beta c^3}{24}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{6}\lambda^2 c^2}$$

oder weil annähernd $\left(1 - \frac{1}{6}\lambda^2 c^2\right)^{-1}$ gleich $\left(1 + \frac{1}{6}\lambda^2 c^2\right)$ $\beta = \frac{12\,b\,p\,c}{b\,\varepsilon\,\delta^3}$ $\lambda^2 = \frac{12\,S}{q\,\varepsilon\,\delta^3}$ ist.

$$f = \frac{p c^4}{2 \varepsilon \delta^3}\left(1 + \frac{2 S c^2}{\varepsilon b \delta^3}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Die Annäherungswerthe von f unterscheiden sich, wie man sieht, im vorliegenden und im vorhergehenden Falle nur durch das Zeichen des zweiten Gliedes in dem in der Klammer enthaltenen Ausdruck.

Differenzirt man die Gleichung (5), so findet man:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho} = \frac{2\gamma}{\lambda^2} - \lambda^2 (D \sin. \lambda x + E \cos. \lambda x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Nennt man ϱ_0 und ϱ_c die Krümmungshalbmesser, die den Punkten A und D der krummen Linie entsprechen, so hat man vermöge (11):

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{2\gamma}{\lambda^2} - \lambda^2 E$$

$$\frac{1}{\varrho_c} = \frac{2\gamma}{\lambda^2} - \lambda^2 (D \sin. \lambda c + E \cos. \lambda c),$$

oder mit Berücksichtigung der Werthe von D und E, welche die Gleichungen (7) darbieten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_0} &= \frac{2\gamma}{\lambda^2} - \frac{\beta \cos. \lambda c}{\lambda \sin. \lambda c} \\ \frac{1}{\varrho_c} &= \frac{2\gamma}{\lambda^2} - \frac{\beta}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sin \lambda c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Es ist demnach, wie man aus diesen Ausdrücken ersieht, $\frac{1}{\varrho_0} > \frac{1}{\varrho_c}$ oder $\varrho_0 < \varrho_c$. Die Krümmung ist also auch in diesem Falle im Punkte A am stärksten. Setzt man in den ersten der Ausdrücke (12) für $\sin. \lambda c$ und $\cos. \lambda c$ die Annäherungswerthe (9), so findet man, mit Berücksichtigung, dass $2\gamma c = \beta$ ist.

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{2}{3} \gamma c^2 \frac{1 - \frac{1}{8} \lambda^2 c^2}{1 - \frac{1}{6} \lambda^2 c^2}$$

oder weil annähernd $\left(1 - \frac{1}{6} \lambda^2 c^2\right)^{-1}$ gleich $1 + \frac{1}{6} \lambda^2 c^2$, ferner $\gamma = \frac{6 p}{\varepsilon \delta^3}$ $\lambda^2 = \frac{12 S}{b \varepsilon \delta^3}$ ist:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{4 p c^2}{\varepsilon \delta^3}\left(1 + \frac{c^2 S}{2 b \varepsilon \delta^3}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Nennt man $\mathfrak{Z}$ die Intensität der Spannung an der obersten Stelle des Querschnittes bei A, so ist in diesem Falle $\mathfrak{Z}_1$ die Spannung, welche daselbst stattfände, wenn der Stab nur gebogen und nicht auch zusammengedrückt wäre, es ist also:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 - \frac{S}{b \delta}, \qquad \frac{b \varepsilon \delta^3}{12} \frac{1}{\varrho_0} = \frac{\mathfrak{Z}_1}{6} b \delta^2$$

Daher wird:

$$\mathfrak{J} = \frac{\varepsilon \delta}{2} \frac{1}{\varrho_0} - \frac{S}{b \delta}$$

oder wenn man für $\frac{1}{\varrho_0}$ seinen Werth aus (13) setzt:

$$\mathfrak{J} = \frac{2 p c^2}{\delta^2}\left(1 + \frac{c^2 S}{2 b \varepsilon \delta^3}\right) - \frac{S}{b \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Die Hauptresultate dieser Untersuchung sind demnach:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{p c^4}{2 \varepsilon \delta^3}\left(1 + \frac{2 S c^2}{b \varepsilon \delta^3}\right) \\ \mathfrak{J} &= \frac{2 p c^2}{\delta^2}\left(1 + \frac{S c^2}{2 b \varepsilon \delta^3}\right) - \frac{S}{b \delta} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Stärke der Wand- und Deckbolzen.

Man kann annehmen, dass ein Bolzen der Wand und Decke einen Zug auszuhalten hat, der gleich ist der Differenz der Pressungen, welche gegen die beiden Flächen eines Bolzenfeldes ausgeübt werden. Durch diese Annahme werden jedoch die Bolzen der Decke etwas zu stark bestimmt, weil diese Bolzen nicht dem ganzen Druck gegen die Decke, sondern nur demjenigen Theil dieses Druckes, der an den Barren zieht, ausgesetzt sind.

Nennt man Ω die Fläche in Quadratcentimetern eines Bolzenfeldes der Wand oder der Decke, n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes im Kessel entspricht, 1·03 den Druck der Atmosphäre in Kilogrammen auf 1 Quadratcentimeter, $\varDelta$ den äusseren Durchmesser eines Bolzens, $\mathfrak{A}$ die Spannung in einem Bolzen auf einen Quadratcentimeter bezogen, so ist:

$$\varDelta^2 \frac{\pi}{4} \mathfrak{A} = \Omega \, 1{\cdot}03 \, (n - 1)$$

demnach

$$\varDelta = \sqrt{\frac{4{\cdot}12}{3{\cdot}14} \frac{(n - 1) \Omega}{\mathfrak{A}}}$$

Setzen wir $\mathfrak{A} = 300$, so liefert diese Formel mit den Thatsachen übereinstimmende Dimensionen. Diese Bolzen werden bekanntlich aus Kupfer gemacht, die absolute Festigkeit desselben ist 2500 Kilogramm per 1 Quadratcentimeter. Die Bolzen sind also, wenn man $\mathfrak{A} = 300$ nimmt, ungefähr auf $\frac{1}{8}$ ihrer absoluten Festigkeit in Anspruch genommen. Für $\mathfrak{A} = 300$ erhält man:

$$\varDelta = 0{\cdot}07 \sqrt{(n - 1) \Omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die halbkugelförmigen Köpfe dieser Bolzen sollen in der Feuerbüchse verhältnissmässig gross gemacht werden, weil sie durch die Wirkung des Feuers sehr schnell ver-

brennen. Es ist angemessen, den Durchmesser eines solchen Bolzenkopfes gleich 2Δ zu nehmen.

Decke der Feuerbüchse.

Die Decke der Feuerbüchse ist weder einer Ausdehnung, noch einer Zusammendrückung, sondern nur allein einer Einbiegung in den Bolzenfeldern ausgesetzt. Wir nehmen an, dass diese Felder quadratisch seien, und setzen:

δ die Dicke des Deckbleches } in Centimetern;
e die Entfernung zweier Bolzen in eine Bolzenreihe }

n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes im Kessel entspricht;

1·03 der Druck einer Atmosphäre auf 1 Quadratcentimeter;

$\mathfrak{S}$ die grösste Spannungsintensität, welche in der Decke eintreten darf.

Da im vorliegenden Fall s gleich Null ist, so gibt sowohl die zweite der Gleichungen (16) (Seite 250), als auch die zweite der Gleichungen (15) (Seite 253), wenn man in dieselbe $c = \frac{e}{2}$ $p = 1\cdot03\,(n-1)$ $S = 0$ setzt:

$$\mathfrak{S} = \frac{1\cdot03\,(n-1)}{2}\left(\frac{e}{\delta}\right)^2$$

und hieraus folgt:

$$e = \delta\sqrt{\frac{2\,\mathfrak{S}}{1\cdot03\,(n-1)}}$$

Auch hier muss man, um mit der Wirklichkeit übereinstimmende Dimensionen zu erhalten, $\mathfrak{S} = 300$ setzen, dann wird:

$$e = 24\frac{\delta}{\sqrt{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Gewöhnlich beträgt die Blechdicke der Decke 1·2 Centimeter, die Spannung des Dampfes 6 Atmosphären. Für $\delta = 1\cdot2$. $n = 6$ gibt diese Formel $e = 12\cdot8$ Centimeter.

Wände des Feuerkastens.

Die Wände des Feuerkastens sind nach horizontaler Richtung weder gedehnt noch zusammengedrückt, nach vertikaler Richtung sind sie dagegen zusammengestaucht.

Nennt man:

e die Entfernung zweier Bolzen in einer Horiziontalreihe, }
e_1 „ „ „ „ „ „ Vertikalreihe, } Centimeter;
δ die Blechdicke der Umfangswände der Feuerbüchse, }
B die Breite, L die Länge des Feuerkastens, }

n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes im Kessel entspricht, so hat man zunächst, weil der Zustand der Wände nach horizontaler Richtung mit dem Zustand der Decke übereinstimmt

$$e = 24\frac{\delta}{\sqrt{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Der Druck des Dampfes gegen die Deckfläche ist $1{\cdot}03\,(n-1)\,B\,L$. Der Druck auf einen Quadratcentimeter der vertikalen Wände ist daher $\frac{1{\cdot}03\,(n-1)\,B\,L}{2\,(B+L)\,\delta}$. Da in den frühern Rechnungen S auf den Querschnitt $b\,\delta$ bezogen wurde, so müssen wir setzen:

$$S = \frac{1{\cdot}03\,(n-1)\,B\,L}{2\,(B+L)\,\delta}\,b\,\delta = \frac{1{\cdot}03\,(n-1)\,B\,L\,b}{2\,(B+L)}$$

Nebst diesem Werth von S haben wir, um e_1 zu bestimmen, in die zweite der Formeln (15) (Seite 253) zu setzen $p = 1{\cdot}03\,(n-1)$ $\quad c = \frac{e_1}{2}$ und dann wird:

$$\mathfrak{J} = \frac{1{\cdot}03}{2}\,(n-1)\,\frac{e_1^2}{\delta^2}\left(1 + \frac{1{\cdot}03}{16}\,\frac{(n-1)\,e_1^2\,B\,L}{\varepsilon\,\delta^3\,(B+L)}\right) - \frac{1{\cdot}03}{2}\,\frac{(n-1)\,B\,L}{(B+L)\,\delta}$$

Allein das zweite Glied des Ausdruckes in der Klammer ist wegen des grossen Werthes von ε eine gegen die Einheit sehr kleine Grösse, kann also vernachlässigt werden, und dann wird:

$$\mathfrak{J} = \frac{1{\cdot}03\,(n-1)}{2}\,\frac{e_1^2}{\delta^2} - \frac{1{\cdot}03}{2}\,\frac{(n-1)\,B\,L}{(B+L)\,\delta}$$

Hieraus folgt:

$$e_1 = \sqrt{\frac{2\,\mathfrak{J}\,\delta^2}{1{\cdot}03\,(n-1)} + \frac{B\,L\,\delta}{B+L}}$$

Für $\mathfrak{J}$ ist auch hier 300 in Rechnung zu bringen, und dann wird:

$$e_1 = \sqrt{582\,\frac{\delta^2}{n-1} + \frac{B\,L\,\delta}{B+L}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Wände des Wasserkastens.

Diese sind nach horizentaler Richtung schwach gedehnt, nach vertikaler Richtung stark gedehnt.

Nennen wir:

e die Entfernung zweier Bolzen in eine Horizontalreihe;
e_1 „ „ „ „ „ „ Vertikalreihe;
δ die Blechdicke der Umfangswand des Wasserkastens;
B_1 die Breite, L_1 die Länge des Wasserkastens;
n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes entspricht.
$\mathfrak{J}$ die Intensität der Spannung, die in der Wand eintreten darf.

Zur Bestimmung von e ist in die zweite der Gleichungen (16) (Seite 250) zu setzen

$$S = \frac{1}{2}\,(L_1 - L)\,b\,1{\cdot}03\,(n-1) \qquad c = \frac{e}{2} \qquad p = 1{\cdot}03\,(n-1)$$

man darf aber auch hier das zweite Glied des Ausdruckes in der Klammer, wegen seiner Kleinheit gegen Eins, vernachlässigen, und dann findet man:

$$e = \sqrt{\frac{2\,\mathfrak{Z}\,\delta^2}{1{\cdot}03\,(n-1)} - (L_1 - L)\,\delta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Um e_1 zu bestimmen, ist in die zweite der Gleichungen (16) (Seite 250) zu setzen: $S = \frac{1{\cdot}03\,(n-1)\,B_1\,L_1\,b}{2\,(B_1 + L_1)}$ $p = 1{\cdot}03\,(n-1)$ $c = \frac{e_1}{2}$ und ist das zweite Glied des Ausdruckes in der Klammer zu vernachlässigen. Man findet dann:

$$e_1 = \sqrt{\frac{2\,\mathfrak{Z}\,\delta^2}{1{\cdot}03\,(n-1)} - \frac{B_1\,L_1\,\delta}{B_1 + L_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Auch in diesen Formeln für e und e_1 darf man $\mathfrak{Z} = 300$ setzen.

Stärke der Deckbarren.

Eine ganz strenge Bestimmung der Deckbarren würde zu sehr weitläufigen difficilen Rechnungen führen. Die Sache wird ziemlich einfach und hinreichend genau, wenn wir die Decke so behandeln, wie wenn sie ihrer ganzen Länge nach mit den Barren stetig verbunden wäre, in welchem Falle die Krümmung der Barren mit jener der Decke sehr nahe übereinstimmt.

Nehmen wir den Mittelpunkt O (Fig. 81) der Decke als Anfangspunkt der horizontalen Abscissen und setzen:

$\left.\begin{array}{l} Op = x \\ mp = y \end{array}\right\}$ die Coordinaten eines Punktes m der Axenlinien des Bleches;

ϱ die Krümmungshalbmesser des Bleches und der Barren in den durch m gehenden Querschnitt;

δ die Dicke des Bleches;
L die Länge AB einer Barre;
B die Breite der Decke;
h die Höhe
b die Breite } einer Barre;
} Centimeter

i die Anzahl der Barren, durch welche die Decke verstärkt ist;

ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem Decke und Barren bestehen. Wir wollen annehmen, dass beide von Schmiedeeisen sind;

p den Druck auf einen Quadratcentimeter der Decke;

$\mathfrak{Z}$ die grösste Spannung, welche in den Barren vorkommen darf;

n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes entspricht, also $p = 1{\cdot}03\,(n-1)$.

Wir behandeln die Sache so, wie wenn die Decke nur auf der Röhren- und der Rückwand, nicht aber auf den Seitenwänden des Feuerkastens aufläge; dann ist $\frac{pBL}{2}$ der Druck auf eine der Unterstützungen A und B. Ferner $\frac{pB}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - \frac{BLp}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)$ die Summe der Momente der Kräfte, welche das Blech und die Barre in dem Quer-

schnitt bei m abzubrechen streben. Es ist aber ferner $\frac{B \varepsilon \delta^3}{12} \cdot \frac{1}{\varrho}$ die Summe der statischen Momente aller Spannungen und Pressungen im Querschnitt des Bleches bei m und $\frac{i \varepsilon b h^3}{12} \frac{1}{\varrho}$ die Summe der Momente in Bezug auf sämmtliche Barren, man hat daher:

$$\frac{1}{12}(B \varepsilon \delta^3 + i b \varepsilon h^3) \frac{1}{\varrho} + \frac{p B}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - \frac{B L p}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

oder weil $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ gesetzt werden darf

$$\frac{1}{12}(B \varepsilon \delta^3 + i b \varepsilon h^3) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{p B}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - \frac{B L p}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \quad . \; . \quad (2)$$

Durch zweimalige Integration und mit Berücksichtigung dass für $x = 0$ $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, findet man:

$$\frac{1}{12}(B \varepsilon \delta^3 + i b \varepsilon h^3) y + \frac{p B}{2}\left(\frac{L^2}{8} x^2 - \frac{L}{6} x^3 + \frac{x^4}{12}\right) - \frac{B L p}{2}\left(\frac{L}{4} x^2 - \frac{x^3}{6}\right) = 0 \quad . \; . \quad (3)$$

Nennt man f die Senkung, die in der Mitte der Barren eintritt, so ist für $x = \frac{L}{2}$ $y = f$ und dann findet man:

$$f = \frac{5}{32} \frac{B p L^4}{B \varepsilon \delta^3 + i b \varepsilon h^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Nennt man ϱ_0 den Krümmungshalbmesser bei o, so findet man denselben aus (1), wenn man $x = 0$ und $\varrho = \varrho_0$ setzt. Es ergibt sich:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{3}{2} \frac{p B L^2}{B \varepsilon \delta^3 + i b \varepsilon h^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Nun ist aber die Summe der Momente aller Spannungen und Pressungen in den Querschnitten der Barren bei o sowohl gleich $\frac{i b \varepsilon h^3}{12} \frac{1}{\varrho_0}$, als auch gleich $\frac{i \mathfrak{J} b h^2}{6}$ wobei $\mathfrak{J}$ die Intensität der Spannung im untersten Punkt des Barren bedeutet. Man hat also;

$$\frac{i b \varepsilon h^3}{12} \frac{1}{\varrho_0} = \frac{i \mathfrak{J} b h^2}{6}$$

oder

$$\frac{\varepsilon h}{2 \varrho_0} = \mathfrak{J}$$

Setzt man für ϱ_0 seinen Werth aus (5), so erhält man eine Gleichung, aus welcher folgt:

$$\frac{i b}{B} = \frac{3}{4} \frac{p}{\mathfrak{J}} \left(\frac{L}{h}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{h}\right)^3$$

oder weil $p = 1\cdot03\,(n-1)$. ist:

$$\frac{i\,b}{B} = \frac{0\cdot77\,(n-1)}{\mathfrak{Z}}\left(\frac{L}{h}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{h}\right)^3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Diese Formel bestimmt das Verhältniss zwischen der Summe der Dicken sämmtlicher Barren und der Breite des Feuerkastens, wenn $\mathfrak{Z}$ gegeben und $\frac{L}{h}$ $\frac{\delta}{h}$ passend angenommen wird. Die Werthe, welche sie für $\frac{i\,b}{B}$ gibt, stimmen mit den Verhältnissen, die man an den Lokomotiven findet, nur dann überein, wenn man für $\mathfrak{Z}$ den ganz ungewöhnlich grossen Werth 800 in Rechnung bringt. Die Deckbarren werden also noch immer sehr schwach, oder wenigstens beträchtlich schwächer gemacht, als alle anderen Theile des Kesselbaues. Ich stelle als Regel auf, dass man nehmen soll:

$$\frac{L}{h} = 7 \qquad \frac{h}{\delta} = 12 \qquad \mathfrak{Z} = 600$$

und dann wird, wenn man das nicht beachtenswerthe Glied $\left(\frac{\delta}{h}\right)^3$ vernachlässiget:

$$\frac{i\,b}{B} = 0\cdot063\,(n-1)$$

Gleichgewicht eines krummen elastischen Stabes.

Einzelne Theile der Wände eines Kessels erhalten bisweilen eine Form, die von der einfach cylindrischen abweicht. Es entsteht also die Frage, welche Formänderungen in solchen Kesselwänden durch die innern Pressungen des Dampfes eintreten, welche Spannungszustände dadurch hervorgerufen werden und durch welche Mittel derlei Formveränderungen entweder aufgehoben, oder innerhalb gewisser Grenzen erhalten werden können. Diese Fragen veranlassen uns, die Formänderungen aufzusuchen, die in elastischen Stäben eintreten, die im natürlichen Zustande gekrümmt sind, wenn auf dieselben deformirende Kräfte einwirken.

Es sei für den natürlichen Zustand $A\,B$ Fig. 82 die Axenlinie eines krummen Stabes, d. h. die Linie, in welcher die Schwerpunkte aller Querschnitte des Stabes liegen. Derselbe werde bei A eingeklemmt und so festgehalten, dass die Richtung $A\,x$ des ersten Linienelementes keine Aenderung erleiden kann. Nachdem gewisse, auf den Stab einwirkende äussere Kräfte mit den innern Elastizitätskräften ins Gleichgewicht gekommen sind, sei $A\,B_1$ die Axenlinie des Stabes. Wir nehmen an, dass gegen jede Flächeneinheit der concaven Fläche von $A\,B_1$ nach normaler Richtung ein Druck p, und dass am Ende B_1 zwei Kräfte X und Y nebst einen Drehungsmoment M_1 wirken. Die Richtung von X sei parallel, jene von Y senkrecht zu $A\,x$. Um von dem Moment M_1 eine Vorstellung zu erhalten, denke man sich an den Stab bei B_1 nach normaler Richtung einen zweiten unbiegsamen Stab $a\,b$ befestiget, lasse an demselben in den Punkten a und b, die von B_1 um eine Längeneinheit entfernt sind, senkrecht auf $a\,b$ und nach entgegengesetzten Richtungen Kräfte wirken, von denen jede gleich $\frac{1}{2}M_1$ ist, so geben diese in Bezug auf eine durch B_1 gehende auf die Ebene der Figur senkrechte Axe ein Moment M_1. Man überzeugt sich

leicht, dass das Moment dieser in a und b wirkenden Kräfte auch in Bezug auf jede Axe, die auf der Ebene der Figur senkrecht steht, gleich M_1 ist.

Nennen wir nun:

$\left.\begin{array}{l} Ap = x \\ mp = y \end{array}\right\}$ die Coordinaten eines im natürlichen Zustand des Stabes im Punkte m seiner Axe befindlichen Körperatoms;

$\left.\begin{array}{l} Ap_1 = x_1 \\ mp_1 = y_1 \end{array}\right\}$ die Coordinaten des gleichen Atoms im gebogenen Zustand des Stabes;

$\varrho\ \varrho_1$ die Krümmungshalbmesser, welche den Punkten m und m_1 der Axenlinien AB und AB_1 entsprechen;

$\left.\begin{array}{l} a\,b \\ a_1\,b_1 \end{array}\right\}$ die Coordinaten der Punkte B und B_1;

$m\,n = ds$ die Länge eines Axenelementes im natürlichen,

$m_1\,n_1 = ds_1$ die Länge des gleichen Elementes im gebogenen Zustand des Stabes;

$\left.\begin{array}{l} \beta \text{ die Breite} \\ \delta \text{ die Dicke} \end{array}\right\}$ des Stabes;

p die Pressung gegen jede Flächeneinheit der concaven Fläche des Stabes;

ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht;

S die auf eine Flächeneinheit bezogene Spannung im Punkt m_1 der Axe des gebogenen Stabes.

Alle Längen sollen in Centimetern, die Flächen in Quadratcentimetern, die Kräfte in Kilogrammen ausgedrückt werden.

Wenn die Rechnung für eine Coordinate für eine Kraft oder für einen Kraftmoment einen negativen Werth liefert, so ist diess ein Zeichen, dass im Gleichgewichtszustand die Richtung dieser Coordinate dieser Kraft oder dieses Momentes derjenigen entgegengesetzt ist, die in der Figur angenommen, und zur Herleitung der Gleichgewichtsgleichungen vorausgesetzt wird.

Wenn wir die Momente der Kräfte, welche das Stück $m_1 B_1$ des Stabes um m_1 zu drehen suchen, positiv oder negativ nehmen, je nachdem sie den Stab seiner natürlichen Lage zu nähern oder von derselben zu entfernen streben, so sind diese Momente

1) für die Normalpressungen gegen $m_1 B$

$$+\frac{\beta p}{2}\left[(a_1 - x_1)^2 + (b_1 - y_1)^2\right]$$

2) für die Kräfte X und Y

$$+ X(b_1 - y_1) - Y(a_1 - x_1)$$

3) für die in a und b wirkenden Kräfte

$$- M_1$$

4) für die in dem Querschnitt bei m_1 vorkommenden Spannungen und Pressungen

$$\frac{\beta \varepsilon \delta^3}{12}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho}\right)$$

Die Momentengleichung ist demnach

$$\frac{\varepsilon\beta\delta^3}{12}\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho}\right)=-\frac{\beta p}{2}\left[(a_1-x_1)^2+(b_1-y_1)^2\right]-X(b_1-y_1)+Y(a_1-x_1)+M_1 \quad . \quad (1)$$

Die Summe aller im Querschnitt bei m_1 vorkommenden Spannungen ist $S\beta\delta$. Zerlegt man die auf $m_1 B_1$ einwirkende Kraft nach zwei Richtungen, von denen die eine parallel, die andere senkrecht zu S ist, so muss die Summe der ersteren dieser Seitenkräfte gleich $S\beta\delta$ sein; man erhält daher

$$\beta\delta S=\left[X+\beta p(b_1-y_1)\right]\frac{dx_1}{ds_1}+\left[Y-\beta p(a_1-x_1)\right]\frac{dy_1}{ds_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Die Summe der zu S senkrechten Kräfte würde die dem Querschnitt bei m_1 entsprechende Abscheerungskraft geben, die wir jedoch nicht in Betrachtung zu ziehen brauchen.

Zwischen ds_1 und ds besteht die Beziehung

$$ds_1=ds\left(1+\frac{S}{\varepsilon}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Diese Gleichungen (1) (2) (3) würden in Verbindung mit der Gleichung der Kurve $A\,B$ zur Lösung unserer Aufgabe führen. Allein die Durchführung dieser Rechnung gelingt nur in äusserst seltenen Fällen, wir müssen uns daher auch hier mit einer Annäherung begnügen, indem wir annehmen, dass die durch die Kräfte in dem Stab bewirkten Formänderungen so klein seien, dass man sie als unendlich kleine Grössen behandeln dürfe.

Unter dieser Voraussetzung dürfen wir annehmen, dass die Momente aller auf $m_1 B_1$ einwirkenden Kräfte sehr nahe so gross sind, als sie in dem Falle wären, wenn diese Kräfte auf das umgebogene Stabstück $m\,B$ wirkten, dürfen wir uns also erlauben in dem Ausdruck rechter Hand des Gleichheitszeichens von (1) $a_1\; x_1\; b_1\; y_1$ mit $a\; x\; b\; y$ und in den Gleichungen (2) $\frac{dx_1}{ds_1}\;\frac{dy_1}{ds_1}\; a_1\; x_1\; b_1\; y_1$ mit $\frac{dx}{ds}\;\frac{dy}{ds}\; a\; x\; p\; y$ zu vertauschen, dann erhalten wir statt (1)

$$k\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho}\right)=M+M_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

wobei zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} k&=\frac{\beta\varepsilon\delta^3}{12}\\ M&=-\frac{\beta p}{2}\left[(a-x)^2+(b-y)^2\right]-X(b-y)+Y(a-x)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

gesetzt wurde; dann wird ferner die Gleichung (2):

$$\beta\delta S=\left[X+\beta p\,(b-y)\right]\frac{dx}{ds}+\left[Y-\beta p\,(a-x)\right]\frac{dy}{ds} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

In der Voraussetzung, dass die Formänderungen des Stabes sehr klein sind, kann man ferner $\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho}$ auf folgende Weise ausdrücken.

Bezeichnet man mit $d\varphi$ und $d\varphi_1$ die unendlich kleinen Winkel der Tangenten bei m und n und der Tangenten bei m_1 und n_1, so ist $\varrho\, d\varphi = ds$ $\varrho_1\, d\varphi_1 = ds_1$, demnach $\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi_1}{ds_1} - \frac{d\varphi}{ds}$ oder mit Berücksichtigung von (4)

$$\frac{d\varphi_1}{ds\left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right)} - \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M + M_1}{k}$$

Wir dürfen uns wohl erlauben, $\frac{S}{\varepsilon}$ gegen die Einheit zu vernachlässigen, denn in allen Anwendungen der Praxis beträgt der Werth von $\frac{S}{\varepsilon}$ nie mehr als $\frac{300}{2000000}$. Wir erhalten daher $d\varphi_1 - d\varphi = \frac{M + M_1}{k} ds$.

Integrirt man diese Gleichung und dehnt das Integrale von A bis m aus, so erhält man

$$\varphi_1 - \varphi = \int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx} dx \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

und es bedeuten nun φ_1 und φ der Winkel, welche die zu m_1 und m gezogenen Tangenten mit der Richtung A x bilden.

In der Voraussetzung, dass die Formänderungen des Stabes als unendlich kleine Grössen behandelt werden dürfen, ist $\varphi_1 - \varphi$ ebenfalls als eine unendlich kleine Grösse anzusehen, man kann daher schreiben:

$$\sin.(\varphi_1 - \varphi) = \varphi_1 - \varphi$$

$$\cos.(\varphi_1 - \varphi) = 1$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned} \sin.\varphi_1 - \sin.\varphi &= (\varphi_1 - \varphi)\cos.\varphi \\ \cos\varphi_1 - \cos.\varphi &= -(\varphi_1 - \varphi)\sin.\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Es ist aber:

$$\cos.\varphi = \frac{dx}{ds} \qquad \sin.\varphi = \frac{dy}{ds} \qquad \cos.\varphi_1 = \frac{dx_1}{ds_1} \qquad \sin.\varphi_1 = \frac{dy_1}{ds_1}$$

die Gleichungen (8) werden daher:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{ds_1} - \frac{dy}{ds} &= (\varphi_1 - \varphi)\frac{dx}{ds} \\ \frac{dx_1}{ds_1} - \frac{dx}{ds} &= -(\varphi_1 - \varphi)\frac{dy}{ds} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Substituirt man für ds_1 seinen Werth aus (3) und berücksichtiget, dass man $\left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{S}{\varepsilon}\right)$ setzen darf, so folgt aus den Gleichungen (9)

$$dy_1 - dy = (\varphi_1 - \varphi)\, dx + \frac{S}{\varepsilon}\, dy_1$$

$$dx_1 - dx = -(\varphi_1 - \varphi)\, dy + \frac{S}{\varepsilon}\, dx_1$$

Da $\frac{S}{\varepsilon}$ sehr klein und dx_1 dy_1 nur sehr wenig von dx und dy verschieden sind, so darf man sich erlauben, in den letzten Gliedern dieser Gleichungen dy_1 und dx_1 mit dy und dx zu vertauschen, und dann wird, wenn man für $\varphi_1 - \varphi$ seinen Werth aus (7) substituirt:

$$dy_1 - dy = dx \int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx} dx + \frac{S}{\varepsilon} dy$$

$$dx_1 - dx = -dy \int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx} dx + \frac{S}{\varepsilon} dx$$

Integrirt man diese Gleichungen und dehnt die Integration von Punkt A bis zum Punkt m aus, so erhält man:

$$y_1 - y = \int_0^x \left(\int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx} dx \right) dx + \int_0^x \frac{S}{\varepsilon} \frac{dy}{dx} dx$$

$$x_1 - x = \int_0^x \left(\int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx} dx \right) \frac{dy}{dx} dx + \int_0^x \frac{S}{\varepsilon} dx$$

Mit Berücksichtigung der Formel $\int u\, dv = uv - \int v\, du$ findet man:

$$\int_0^x \left(\int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx} dx \right) dx = x \int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx} dx - \int_0^x \frac{M + M_1}{k} x \frac{ds}{dx} dx$$

$$\int_0^x \left(\int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx} dx \right) \frac{dy}{dx} dx = y \int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx} dx - \int_0^x \frac{M + M_1}{k} y \frac{ds}{dx} dx$$

Daher finden wir schliesslich:

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y &= x \int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx} dx - \int_0^x \frac{M + M_1}{k} x \frac{ds}{dx} dx + \int_0^x \frac{S}{\varepsilon} \frac{dy}{dx} dx \\ x_1 - x &= -y \int_0^x \frac{M + M_1}{k} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^x \frac{M + M_1}{k} y \frac{ds}{dx} dx + \int_0^x \frac{S}{\varepsilon} dx \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

Unter den Integralzeichen bedeuten die Grössen x und y die Coordinaten irgend eines zwischen A und m liegenden Punktes, der Grenzwerth x und die x und y ausserhalb der Integralzeichen beziehen sich dagegen auf den Punkt m. Um jedes Missverständniss

zu vermeiden, wollen wir die Coordinaten eines beliebigen zwischen A nnd m liegenden Punktes μ mit ξ und υ bezeichnen und dann erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y &= x\int_0^x \frac{M+M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi - \int_0^x \frac{M+M_1}{k}\xi\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi + \int_0^x \frac{S}{\varepsilon}\frac{d\upsilon}{d\xi}d\xi \\ x_1 - x &= -y\int_0^x \frac{M+M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi + \int_0^x \frac{M+M_1}{k}\upsilon\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi + \int_0^x \frac{S}{\varepsilon}d\xi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (11)$$

wobei $d\sigma$ das den Elementen $d\xi$ und $d\upsilon$ entsprechende Kurvenelement bezeichnet. Die Werthe von M und k sind nun:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{\beta\varepsilon\delta^3}{12} \\ M &= -\frac{\beta p}{2}\left[(a-\xi)^2 + (b-\upsilon)^2\right] - X(b-\upsilon) + Y(a-\xi) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Der Werth von S ist vermöge (6)

$$\beta\delta S = \left[X + \beta p(b-\upsilon)\right]\frac{d\xi}{d\sigma} + \left[Y - \beta p(a-\xi)\right]\frac{d\upsilon}{d\sigma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

In den meisten Fällen der Anwendung dieser Theorie sind $X\,Y\,M_1$ nicht unmittelbar gegeben, sondern müssen in der Weise bestimmt werden, dass am Ende B des Stabes ein gewisser Zustand eintritt, der durch die Natur der Aufgabe bedingt wird. Wenn das Ende B nach keiner Richtung festgehalten wird ist $M_1 = 0$. Wenn die Richtungen der Tangenten an B und B_1 parallel sein sollen, wird M_1 auf folgende Art bestimmt.

Nennen wir α den Winkel, den die zu B und B_1 gezogenen Tangenten mit A x bilden sollen, dann ist für $x = a$ und $x_1 = a_1$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} = \text{tang.}\,\alpha$.

Differenzirt man die Ausdrücke (11) und sucht den Werth von $\frac{dy_1}{dx_1}$, so findet man:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{dy}{dx} + \int_0^x \frac{M+M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi + \frac{S}{\varepsilon}\frac{dy}{dx}}{1 - \frac{dy}{dx}\int_0^x \frac{M+M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi + \frac{S}{\varepsilon}}$$

Setzt man in diesen Ausdruck $x = a$, so muss für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy_1}{dx_1}$ tang. α und für S S_a gesetzt werden, wobei S_a die in B_1 eintretende Spannung bedeutet; dann wird:

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{\text{tang.}\,\alpha + \int_0^a \frac{M+M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi + \frac{S_a}{\varepsilon}\,\text{tang.}\,\alpha}{1 - \text{tang.}\,\alpha\int_0^a \frac{M+M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi + \frac{S_a}{\varepsilon}}$$

Hieraus folgt:

$$(1 + \text{tang.}^2 \alpha) \int_0^a \frac{M + M_1}{k} \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = 0$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn:

$$\int_0^a \frac{M + M_1}{k} \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Demnach erhält man:

$$M_1 = - \frac{\int_0^a M \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi}{\int_0^a \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Dieser spezielle Werth von M_1 folgt auch aus Gleichung (7).
Wir gehen nun zu Anwendungen dieser Theorie.

Formänderung eines ellyptischen Kessels.

Es sei (Fig. 85) der Durchschnitt eines ellyptischen Kessels $CB = a$ $AC = b$ die halben Axen. Wir legen die Abscissenaxe Ax tangirend an den Endpunkt A der kleinen Axe, dann ist die Gleichung der Ellypse:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{(b - v)^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

An den Endpunkten B und B der grössern Axe sei die Spannung in der Axenfaser Y und die Summe der Momente aller Spannungen M_1. Wenn wir den Kessel bei B und B entzweischneiden und daselbst Kräfte $Y\,Y$ und Momente $M_1\,M_1$ wirken lassen, so wird der Gleichgewichtszustand nicht gestört. Es ist also in diesem Falle:

$$X = 0 \qquad Y = p \beta a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Um die Integrationen durchführen zu können, müssen wir aunehmen, dass die Kesselform nur wenig von einer kreiscylindrischen abweicht, oder dass $\frac{a}{b}$ nur wenig von der Einheit verschieden sei. Wir setzen daher:

$$b = a(1 - \lambda) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

und betrachten λ als eine sehr kleine Grösse.

Aus der Gleichung (1) folgt, wenn man für b den Werth $a(1 - \lambda)$ setzt:

$$v = (1 - \lambda)\left(a - \sqrt{a^2 - \xi^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Berechnet man $d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + dv^2}$, indem man λ als eine kleine Grösse betrachtet, deren zweite und höheren Potenzen vernachlässigt werden dürfen, so findet man:

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = \frac{a\left(1 - \lambda \frac{\xi^2}{a^2}\right)}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Mit Berücksichtigung von (1), (2) und (3) wird im vorliegenden Falle:

$$M = -\frac{p\beta}{2}\left[(a-\xi)^2 + (1-\lambda)^2(a^2 - \xi^2)\right] + p\beta a(a-\xi)$$

Vernachlässigt man die zweiten und höheren Potenzen von λ, so findet man:

$$M = p\beta\lambda(a^2 - \xi^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Wir wollen uns darauf beschränken, die Aenderungen zu berechnen, welche in den Hauptdimensionen a und b des Kessels eintreten, dann sind alle Integrale in den Grenzen o und a zu nehmen. Wenn man berücksichtigt, dass:

$$\left.\begin{array}{ll}
\int_0^a \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \frac{\pi}{2} & \int_0^a \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = a \\
\int_0^a \frac{\xi^2\, d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = a^2\,\frac{\pi}{4} & \int_0^a \frac{\xi^3\, d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \frac{2}{3}\,a^3 \\
\int_0^a \frac{\xi^4\, d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \frac{3}{16}\,a^4\pi & \int_0^a \frac{\xi^5\, d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \frac{8}{15}\,a^5
\end{array}\right\} \ldots \quad (7)$$

ist, gelangt man zu folgenden Resultaten:

$$\left.\begin{array}{ll}
\int_0^a M\,\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi & = \frac{p\beta\lambda a^3\pi}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right) \\
\int_0^a \xi\, M\,\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi & = p\beta\lambda a^4\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{15}\,\lambda\right) \\
\int_0^a \frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi & = a\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\,\lambda\right) \\
\int_0^a \xi\,\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi & = a^2\left(1 - \frac{2}{3}\,\lambda\right)
\end{array}\right\} \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Nun ist ferner

$$S = \frac{p}{\delta}\,\xi\,\frac{d\sigma}{dv}$$

daher

$$\int_0^a \frac{S}{\varepsilon} \frac{d\upsilon}{d\xi} d\xi = \frac{p}{\varepsilon\delta} \int_0^a \xi \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = \frac{a^2 p}{\varepsilon\delta}\left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Da sich die Richtung der Tangente bei B durch die Biegung nicht ändert, so kann der Werth von M_1 vermittelst der Formel (15) (Seite 264) bestimmt werden. Man erhält:

$$M_1 = -\frac{\frac{p\beta\lambda a^3\pi}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)}{a\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)} = -\frac{p\beta\lambda a^2}{2} \frac{1 - \frac{\lambda}{4}}{1 - \frac{\lambda}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Substituirt man diese Rechnungsresultate in die erste der Gleichungen (11) (Seite 263) und setzt $x = a \quad y = b \quad y_1 = b_1$, so findet man nach einigen Reduktionen:

$$b_1 - b = \frac{p\beta\lambda a^4}{6k} \frac{1 - \frac{9}{5}\lambda}{1 - \frac{1}{2}\lambda} + \frac{a^2 p}{\varepsilon\delta}\left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

oder endlich, wenn man sich erlaubt $\frac{1 - \frac{9}{5}\lambda}{1 - \frac{1}{2}\lambda}$ und $\left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right)$ gleich 1 zu setzen, und für λ und k die Werthe $\frac{a-b}{a}$ und $\frac{\beta\varepsilon\delta^3}{12}$ einführt:

$$b_1 - b = \frac{2pa^3(a-b)}{\varepsilon\delta^3} + \frac{a^2 p}{\varepsilon\delta} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Es ist nicht nothwendig $a_1 - a$ vermittelst der zweiten der Gleichungen (11) (Seite 263) direkt zu berechnen, denn man erhält $a_1 - a$ aus (13), wenn man a mit b und a_1 mit b_1 vertauscht. Man findet auf diese Weise:

$$a_1 - a = -\frac{2pb^3(a-b)}{\varepsilon\delta^3} + \frac{b^2 p}{\varepsilon\delta} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Hiedurch sind also die Aenderungen bestimmt, die in den Hauptabmessungen des Kessels eintreten.

Es ist

$$S = \frac{p}{\delta}\xi\frac{d\sigma}{d\upsilon} = \frac{p}{\delta} a \frac{1 - \lambda\frac{\xi^2}{a^2}}{1 - \lambda}$$

Dieser Ausdruck erhält für $\xi = 0$ seinen grössten Werth. Die Intensität der Spannung ist also im Punkt A der Axenlinie am grössten. Nennt man diesen grössten Werth von S $\mathfrak{A}$, so hat man:

$$\mathfrak{A} = \frac{pa}{\delta(1-\lambda)} \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Formänderung eines ellyptischen Kessels, dessen Wände nach der Richtung der kleinen Axe durch Stangen oder durch eine durchbrochene Platte zusammengehängt sind.

Es sei (Fig. 84) der Durchschnitt eines ellyptischen Kessels, dessen Wände nach der Richtung der kleinen Axe A A durch Stangen, oder durch eine durchbrochene Platte zusammengehängt sind. Nennt man Ω die Summe der Querschnitte aller Verbindungsstangen, Y_1 die Summe der Spannungen in allen Stangen, ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem die Stangen bestehen, a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe der Ellypse, Y die Summe aller Spannungen in einem Querschnitt bei B, $b_1 - b$ die Ausdehnung, welche in der Hälfte einer der Verbindungsstangen eintritt, so bestehen zunächst folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} 2Y + Y_1 &= 2ap\beta \\ b_1 - b &= b\frac{Y_1}{\Omega\varepsilon} \\ X &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Es unterliegt zwar keinen Schwierigkeiten, die Formänderung des Kessels vollständig zu bestimmen für die praktischen Zwecke, welche wir im Auge haben, interessirt uns aber nur, zu erfahren, wie gross Y_1 ist. Wir beschränken uns daher auf die Bestimmung dieser Grösse, unter der Voraussetzung, dass der Kessel nur wenig von der kreiscylindrischen Form abweicht.

Durch die Formänderung, welche in dem Kessel eintritt, bleibt die Richtung der zum Punkt B gehörigen Tangenten ungeändert. Es ist daher wegen der Gleichungen (14) und (15) (Seite 264)

$$\int_0^a \frac{M + M_1}{k}\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi = 0 \qquad M_1 = -\frac{\int_0^a M\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi}{\int_0^a \frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi} \quad \dots\dots \quad (2)$$

Die erste der Gleichungen (11) (Seite 263) wird demnach, wenn man in derselben $x = a$ und folglich $y = b$ $y_1 = b_1$ setzt:

$$b_1 - b = -\int_0^a \frac{M + M_1}{k}\,\xi\,\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi + \int_0^a \frac{S}{\varepsilon}\frac{dv}{d\xi}\,d\xi \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

Der Werth von M ist im vorliegenden Fall:

$$M = -\frac{\beta p}{2\xi}\left[(a-\xi)^2 + (b-v)^2\right] + Y(a-\xi) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Die Gleichung der Ellypse ist:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{(b-v)^2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

Wir setzen auch hier $b = a(1-\lambda)$ und behandeln λ, wie wenn es unendlich klein wäre, so dass die zweiten und höheren Potenzen vernachlässigt werden dürfen.

Mit Berücksichtigung der ersten der Gleichungen (1) wird:

$$M = +\beta p \lambda (a^2 - \xi^2) - (a - \xi)\frac{1}{2} Y_1 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (6)$$

Es ist ferner

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = \frac{a\left(1 - \lambda \frac{\xi^2}{a^2}\right)}{\sqrt{a^2 - \xi^2)}} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (7)$$

Man findet nun:

$$\int_0^a M \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = \frac{p\beta\lambda\pi a_0^3}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right) - \frac{1}{2} a^2 Y_1 \left(\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\lambda\pi}{4} + \frac{2}{3}\lambda\right)$$

$$\int_0^a M\xi \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = \frac{p\beta\lambda a^4}{3}\left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) - \frac{1}{2} a^3 Y_1 \left(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\lambda + \frac{3}{16}\lambda\pi\right)$$

$$\int_0^a \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = a\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)$$

$$\int_0^a \xi \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = a^2\left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right)$$

Für einen cylindrisch runden Kessel ist $S = \frac{Y}{\beta\delta}$. Wir werden keinen bedenklichen Fehler begehen, wenn wir diesen Werth von S in Rechnung bringen, schreiben desshalb:

$$\int_0^a \frac{S}{\varepsilon}\frac{dv}{d\xi} d\xi = \frac{S}{\varepsilon} b = \frac{Yb}{\varepsilon\beta\delta} = \frac{\left(a\beta p - \frac{1}{2} Y_1\right)b}{\varepsilon\beta\delta}$$

Vermittelst dieser Rechnungsresultate wird nun:

$$b_1 - b = \frac{bY_1}{\Omega\varepsilon} = \frac{1}{k}\left[\frac{p\beta\pi a^3}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right) - \frac{1}{2} a^2 Y_1 \left(\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\lambda\pi}{4} + \frac{2}{3}\lambda\right)\right]\frac{2a}{\pi}\frac{1 - \frac{2}{3}\lambda}{1 - \frac{\lambda}{2}}$$

$$- \frac{1}{k}\left[\frac{\beta p \lambda a^4}{3}\left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) - \frac{1}{2} a^3 Y_1 \left(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\lambda + \frac{3}{16}\lambda\pi\right)\right]$$

$$+ \frac{\left(a\beta p - \frac{1}{2} Y_1\right)b}{\varepsilon\beta\delta}$$

oder durch weitere Reduktionen, wobei die Glieder, welche λ^2 enthalten, zu vernachlässigen sind,

$$\frac{b\,Y_1}{\Omega\,\varepsilon} = \frac{\beta\,p\,\lambda\,a^4}{6\,k}\,\frac{1-\frac{19}{20}\,\lambda}{1-\frac{1}{2}\,\lambda} + \frac{a^3\,Y_1}{k}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{\pi}{4}+\frac{7}{32}\,\lambda\,\pi-\frac{4}{3}\,\frac{\lambda}{\pi}\right)+\frac{a\,b\,p}{\varepsilon\,\delta}-\frac{Y_1\,b}{2\,\varepsilon\,\beta\,\delta}$$

Nennt man $\mathfrak{A}$ die Spannung, welche in einem Quadratcentimeter des Querschnittes der Verbindungsstangen eintreten darf, so ist $Y_1 = \mathfrak{A}\,\Omega$. Substituirt man diesen Werth von Y_1 in die letzte Gleichung und sucht sodann Ω, so findet man:

$$\Omega = \frac{\frac{\beta\,p\,\lambda\,a^4}{6\,k}\,\frac{1-\frac{19}{20}\,\lambda}{1-\frac{1}{2}\,\lambda}+\frac{a\,b\,p}{\varepsilon\,\delta}-\frac{b\,\mathfrak{A}}{\varepsilon}}{\frac{a^3\,\mathfrak{A}}{k}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}-\frac{7}{32}\,\lambda\,\pi+\frac{4}{3}\,\frac{\lambda}{\pi}\right)+\frac{b\,\mathfrak{A}}{2\,\varepsilon\,\beta\,\delta}}$$

oder wenn man für k seinen Werth $\frac{\beta\,\varepsilon\,\delta^3}{12}$ einführt:

$$\Omega = \frac{\frac{2\,p\,\lambda\,a^4}{\delta^3}\left(\frac{1-\frac{19}{20}\,\lambda}{1-\frac{1}{2}\,\lambda}\right)+\frac{a\,b\,p}{\delta}-b\,\mathfrak{A}}{\frac{12\,a^3\,\mathfrak{A}}{\beta\,\delta^3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}-\frac{7}{32}\,\lambda\,\pi+\frac{4}{3}\,\frac{\lambda}{\pi}\right)+\frac{b\,\mathfrak{A}}{2\,\beta\,\delta}}$$

Vernachlässiget man diejenigen Glieder in den Klammern, welche mit λ multiplizirt sind, und setzt für das als Faktor erscheinende λ seinen Werth $\frac{a-b}{a}$, so erhält man:

$$\Omega = \frac{\frac{2\,p\,(a-b)\,a^3}{\delta^3}+\frac{a\,b\,p}{\delta}-b\,\mathfrak{A}}{\frac{12\,a^3\,\mathfrak{A}}{\beta\,\delta^3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}\right)+\frac{b\,\mathfrak{A}}{2\,\beta\,\delta}}$$

$$\frac{\Omega}{\beta} = \frac{\frac{2\,p\,(a-b)\,a^3}{\delta^3}+\frac{a\,b\,p}{\delta}-b\,\mathfrak{A}}{\frac{12\,a^3\,\mathfrak{A}}{\delta^3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}\right)+\frac{b\,\mathfrak{A}}{2\,\delta}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

oder endlich annähernd

$$\frac{\Omega}{\beta} = \frac{p\,(a-b)}{6\,\mathfrak{A}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Es sei z. B. für einen ellyptischen Kessel:

$$a = 50 \qquad b = 40 \qquad \delta = 1 \qquad \mathfrak{A} = 300 \qquad p = 5$$

so wird:

$$\frac{\Omega}{\beta} = \frac{2 \times 5\ (50-40)\ 125000 + 50 \times 40 \times 5 - 40 \times 300}{12 \times 125000 \times 3000\left(\frac{3{\cdot}142}{4}-\frac{1}{3{\cdot}142}\right)+\frac{40 \times 300}{2}} = \frac{1}{21}$$

Beträgt die ganze Länge β des Kessels 400 Centimeter, so ist die Summe der Querschnitte der Verbindungsstangen $\Omega = 20$ Quadratcentimeter.

Verbindungsstangen eines Blasenkessels.

Um die Kraft zu bestimmen, welcher die Verbindungsstangen B B (Fig. 83) eines Blasenkessels zu widerstehen haben, bedarf es keiner weitläufigen Rechnung. Es sei O der Mittelpunkt ϱ_1 der Halbmesser der kreisrunden Kesselwölbung B A B. Da in einem kreiscylindrischen Kessel in allen Querschnitten einerlei Spannung herrscht, so kann dieselbe leicht bestimmt werden. Die Summe der Spannungen in den Querschnitten bei c und c muss offenbar gleich sein dem Druck des Dampfes auf die Fläche C O C; man hat daher:

$$2\,S = 2\,\varrho_1\,\beta\,p \quad \text{oder} \quad S = \varrho_1\,\beta\,p$$

So gross wie S sind aber auch die Spannungen nach den Richtungen der Tangenten bei B. Vermöge dieser Spannungen wird der Punkt B mit einer Kraft $2\,S\cos\psi = 2\,\varrho_1\,\beta\,p\cos.\psi$ nach der Richtung B x gezogen, und dieser Kraft haben die Zugstangen zu widerstehen. Bezeichnet man dieselben mit Z, so ist:

$$Z = 2\,\varrho_1\,\beta\,p\cos.\psi$$

Setzt man $\overline{AD} = b_1$, so ist, wie aus der Figur erhellet:

$$\cos.\psi = \frac{(b_1 - \varrho_1)}{\varrho_1}$$

man erhält daher:

$$Z = 2\,\beta\,p\,(b_1 - \varrho_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zu dem gleichen Ergebniss werden wir aber auch auf rein analytischem Wege durch unsere allgemeine Theorie geführt.

Es ist klar, dass man den Querschnitt Ω der Verbindungsstangen in der Art wählen kann, dass der Kessel durch die Einwirkung der innern Pressung nur allein ausgeweitet wird, dabei aber in eine kreiscylindrische Form von einem gewissen Halbmesser ϱ_1 übergeht.

Um für diesen Fall die genaue Momentengleichung zu erhalten, muss man in der Gleichung (1) (Seite 260) setzen:

$$Y = \beta\,p\,a_1$$

$$X = -\frac{1}{2}Z$$

Man erhält daher:

$$\frac{\varepsilon\beta\delta^3}{12}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{r}\right) = -\frac{\beta p}{2}\left[(a_1 - \xi)^2 + (b_1 - v)^2\right] + \frac{1}{2}Z\,(b_1 - v) + \beta\,p\,a_1\,(a_1 - \xi) + M_1 \quad . \quad (2)$$

Damit diese Gleichung mit der eines Kreises vom Halbmesser ϱ_1 übereinstimmt muss sie mit

$$\xi^2 + \upsilon^2 - 2\,\varrho_1\,\upsilon = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

identisch sein. Dies ist der Fall, wenn:

$$\frac{Z}{\beta\,p} - 2\,b_1 = -2\,\varrho_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\frac{2}{\beta\,p}\,\frac{\varepsilon\,\beta\,\delta^3}{12}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{r}\right) + b_1^2 - a_1^2 - \frac{Z\,b_1}{\beta\,p} - \frac{2\,M_1}{\beta\,p} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

ist.

Aus der ersteren dieser Gleichungen folgt zunächst übereinstimmend mit (1)

$$Z = 2\,\beta\,p\,(b_1 - \varrho_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Vermittelst dieses Werthes von Z und weil $a_1^2 + b_1^2 - 2\,b_1\,\upsilon = 0$ ist, folgt aus (5)

$$M_1 = -\frac{\varepsilon\,\beta\,\delta^3}{12}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Dass M_1 negativ ausfällt, ist ganz in der Ordnung, denn in der Ableitung der Momentengleichung sind wir von der Voraussetzung ausgegangen, dass die Krümmung des Stabes durch die Formveränderung zunimmt, während sie in vorliegendem Falle schwächer wird.

Die Intensität S der Spannung per 1 Quadratcentimeter ist in allen Punkten der Axenlinie des Kessels so, dass man hat:

$$2\,S\,\beta\,\delta = 2\,\varrho_1\,p\,\beta$$

also:

$$S = \frac{\varrho_1\,p}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Nennt man α den Centriwinkel, der dem Bogen $B\,A\,B$ entspricht, so ist die ursprüngliche Länge dieses Bogens $r\,\alpha$ die veränderte Länge $\varrho_1\,\alpha$, daher hat man:

$$\varrho_1\,\alpha - r\,\alpha = r\,\alpha\,\frac{S}{\varepsilon} = r\,\alpha\,\frac{\varrho_1\,p}{\delta\,\varepsilon}$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho_1} &= \frac{p}{\varepsilon\,\delta} \\ \text{oder:} \qquad & \\ 1 - \frac{r}{\varrho_1} &= \frac{r\,p}{\varepsilon\,\delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Nennt man Ω die Summe der Querschnitte der Verbindungsstangen, so ist:

$$a_1 - a = a \frac{Z}{\Omega \varepsilon}$$

oder:

$$Z = \Omega \varepsilon \left(\frac{a_1}{a} - 1 \right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

allein da die ursprüngliche und die durch die Veränderung entstandene Form geometrisch ähnlich sind, so hat man $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{\varrho_1}{r}$. Berücksichtiget man diese Verhältnisse, so folgt aus (6) und (10)

$$2 \beta p \left(b \frac{\varrho_1}{r} - \varrho_1 \right) = \Omega \varepsilon \left(\frac{\varrho_1}{r} - 1 \right)$$

und hieraus folgt:

$$\Omega = \frac{2 \beta p (b - r)}{\varepsilon \left(1 - \frac{r}{\varrho_1} \right)}$$

oder wegen der zweiten der Gleichungen (9)

$$\frac{\Omega}{\beta \delta} = 2 \cdot \frac{b - r}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Diese Gleichung ist ein sehr einfacher Ausdruck für das Verhältniss zwischen den Querschnitten sämmtlicher Verbindungsstangen und dem Querschnitt einer Kesselwand.

Aus (7) und (9) folgt;

$$M_1 = - \frac{\beta \delta^2 p}{12} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Vernietungen.

Die wesentlichsten Dimensionen einer Vernietung sind: 1) der Durchmesser der Nietbolzen, 2) die Entfernung e der Nietbolzen, 3) die Entfernung e_1 von dem Rand eines Nietbolzens bis zum Blechrand (Fig. 88).

Diese Dimensionen müssen in der Art bestimmt werden, dass das Abscheeren eines Bolzens eben so viel Kraft erfordert, als das Abreissen des Bleches zwischen zwei Bolzen und als das Ausreissen des Bleches bis an den Rand hinaus. Nennt man δ die Blechdicke, so müssen demnach folgende Gleichheiten stattfinden:

$$\frac{d^2 \pi}{4} = (e - d) \delta = 2 e_1 \delta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Hieraus findet man:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{e}{\delta}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2+\frac{d}{\delta}\\ \frac{e_1}{\delta}=\frac{\pi}{8}\left(\frac{\delta}{\delta}\right)^2\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Nennt man f das Festigkeitsverhältniss der Vernietung, d. h. den Ouotienten aus der Festigkeit, die eine Verbindung durch Nieten gewährt und der Festigkeit des Bleches, so ist:

$$f=\frac{e-d}{c}=1-\frac{d}{e}$$

oder wenn man aus (2) für e seinen Werth setzt:

$$f=\frac{1}{1+\frac{4}{\pi}\left(\frac{\delta}{d}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Diese Formeln (2) und (3) geben:

für $\frac{d}{\delta}=$	1	1·5	2	2·5	3
$f=$	0·44	0·54	0·61	0·66	0·71
$\frac{e}{\delta}=$	1·78	3·26	5·14	7·41.	10.06
$\frac{e_1}{\delta}=$	0·39	0·88	1·56	2·44	3·51

Die Werthe von f zeigen, dass eine weite Vernietung mit starken Bolzen grössere Festigkeit gewährt, als eine enge Vernietung mit kleinen Bolzen. Eine enge Vernietung gibt jedoch eine dichtere Verbindung. Handelt es sich also um eine Verbindung, die nur Festigkeit geben soll, so ist eine weite Vernietung mit starken Bolzen angemessen. Handelt es sich nicht um Festigkeit, sondern nur um dichten Verschluss, so ist eine enge Vernietung mit kleinen Bolzen vorzuziehen. Wird sowohl Festigkeit, als auch dichter Verschluss gefordert, wie diess bei Dampfkesseln, Schiffen etc. der Fall ist, so ist eine Vernietung von mittlerer Weite und mittlere Bolzenstärke am zweckmässigsten.

Für Kesselvernietungen nehme man:

$$\frac{d}{\delta}=2 \qquad \frac{e}{\delta}=5{\cdot}14 \qquad \frac{e_1}{\delta}=1{\cdot}56$$

Für eine solche Vernietung ist $f=0{\cdot}61$, d. h. die Festigkeit eines auf diese Weise vernieteten Kessels ist 0·61 von der Festigkeit des Bleches.

Nach den Regeln, welche wir für die Metalldicke cylindrischer Kessel aufgestellt haben, ist das Kesselblech durchschnittlich auf $\frac{1}{15}$ seiner absoluten Festigkeit in Anspruch genommen. Ein nach obiger Regel vernieteter Kessel ist demnach auf $\frac{1}{9}$ von derjenigen Festigkeit in Anspruch genommen, die die Vernietung gewährt.

Festigkeit des Rahmenbaues.

Der mit dem Kessel verbundene Rahmenbau wird durch die Federn schwebend erhalten. Bei Lokomotiven, die keine Mittelaxe haben, ist es vollkommen genügend, wenn die Rahmen nur mit den Wänden der Feuerbüchse und mit den Wänden der Rauchkammer verbunden werden und können ferner die Querschnittsdimensionen der Rahmen verhältnissmässig sehr schwach genommen werden, denn die Punkte, an welchen die Rahmen von den Federn gefasst werden, befinden sich bei dieser Constructionsweise ganz in der Nähe der Punkte, in welcher die Rahmen mit dem Kesselbau verbunden sind.

Anders verhält es sich bei Lokomotiven, die mit mittleren Rädern versehen sind. Bei dieser Bauart ist es kaum möglich, die mittleren Theile der Rahme so stark zu machen, dass sie für sich allein und ohne Hülfsconstruktionen den Zug der Mittelfedern auszuhalten im Stande sind, man wird daher genöthigt, die mittleren Theile dieser Rahmen mit der untern Rundung des Röhrenkessels zu verbinden, muss aber dennoch die Querschnittsdimensionen der Rahmen stark machen, weil sonst die Festigkeit des Kessels zu sehr in Anspruch genommen würde.

Man sieht hieraus, dass die Bauart mit Mittelrädern nicht nur hinsichtlich der Stabilität der Bewegung und wegen der Befahrung von Bahnkrümmungen, sondern auch für den Rahmenbau nachtheilig ist.

VIII.

Resultate.

Der Inhalt dieses Abschnittes.

Durch die Ergebnisse aller bisherigen Untersuchungen, in Verbindung mit einigen Erfahrungs-Coeffizienten, sind wir nun in den Stand gesetzt, für die Anordnung einer neu zu erbauenden Lokomotive, sowie auch für die Bestimmung aller wesentlichen Abmessungen derselben, rationelle Regeln aufzustellen.

Von einer neu zu erbauenden Lokomotive wird verlangt, dass sie im Stande sei, auf einer Bahn von bekannter Beschaffenheit eine gewisse Last mit einer gewissen Geschwindigkeit, mit Sicherheit und mit einem verhältnissmässig geringen Brennstoffaufwand fortzuziehen.

Die Elemente, durch welche die Beschaffenheit der Bahn bestimmt wird, sind: 1) die Solidität des Unterbaues, 2) die Stärke der Bahnschienen, 3) die Spurweite der Bahn, 4) die auf der Bahn vorkommenden Steigungsverhältnisse, 5) die Bahnkrümmungen. Die Elemente, durch welche die Leistungsfähigkeit einer Lokomotive bestimmt wird, sind: 7) die Zugkraft, 8) die Fahrgeschwindigkeit.

Diese 8 Elemente sind also, wenn es sich um den Neubau einer Lokomotive handelt, die gegebenen Grössen, und alles Andere muss bestimmt werden, was in diesem Abschnitt geschehen wird.

Die Fahrgeschwindigkeit.

Die Geschwindigkeit, welche der Berechnung einer neu zu erbauenden Lokomotive zu Grunde gelegt werden soll, richtet sich theils nach den Verkehrsverhältnissen der Bahn, theils nach dem Zwecke, dem die Lokomotive vorherrschend oder ausschliesslich zu dienen hat.

Durch eine mässige Fahrgeschwindigkeit wird die Bahn, wird die Lokomotive und werden die Wagen geschont; wird ferner Brennstoff erspart und eine grössere Sicherheit des Verkehrs erzielt. Man darf also als Grundsatz aussprechen, dass man auf jeder Bahn mit der kleinsten Geschwindigkeit fahren soll, durch welche den Anforderungen des Verkehrs noch entsprochen werden kann. Allein diese Anforderungen wachsen in dem Maasse, als die Eisenbahnen an Ausdehnung und Zusammenhang gewinnen, und in der Nähe von grossen Städten spricht sich insbesondere das Bedürfniss nach möglichst grossen Fahrgeschwindigkeiten aus, so dass die kleinste, den Verkehrsverhältnissen genügende Geschwindigkeit, wenigstens für den Personenverkehr und theilweise sogar auch für den Gütertransport, bereits so gross ist, als die grösste Geschwindigkeit, die sich überhaupt mit der Sicherheit der Fahrt noch verträgt.

Der Berechnung von neu zu erbauenden Lokomotiven darf man in der Regel folgende Fahrgeschwindigkeiten zu Grunde legen.

Benennung der Züge.	Fahrgeschwindigkeit in Metern per 1 Sekunde.
Schnellzüge	16 bis 20
Gewöhnliche Personenzüge	12 „ 16
Güterzüge	8 „ 12
Berglokomotive	5 „ 6

Zur Reduktion der Geschwindigkeiten in Metern per 1 Sekunde auf Geschwindigkeiten in Kilometern oder in Meilen per 1 Stunde dienen folgende Angaben.

Länge einer Meile in Kilometern à 1000 Meter.

	Kilometer
Deutsche Meile (15 auf einen Grad) . . .	= 7·420
Oesterreichische Meile	= 7·586
Preussische Meile	= 7·533
Englische Meile	= 1·631

Geschwindigkeit eines Zuges in:

1) Metern und in 1 Sekunde	= V
2) Deutschen Meilen per 1 Stunde . .	= 0·485 V
3) Oesterreichischen Meilen per 1 Stunde	= 0·475 V
4) Preussischen Meilen per 1 Stunde .	= 0·478 V
5) Kilometern per 1 Stunde	= 3·600 V
6) Englischen Meilen per 1 Stunde . .	= 2·208 V

Gewicht des durch eine Lokomotive fortzuschaffenden Trains.

In der Regel wird von einer zu erbauenden Lokomotive verlangt, dass sie im Stande sein soll, auf der von ihr zu befahrenden Bahn einen Train von einem gewissen Gewicht fortzuschaffen, wenn in den Cylindern eine gewisse Dampfspannung eintritt.

Dieses Traingewicht ist nicht constant, sondern richtet sich theils nach der Lebhaftigkeit des auf der Bahn herrschenden Verkehrs, insbesondere aber auch nach den auf der Bahn vorkommenden Steigungen und Krümmungen. Wenn wir von den gegenwärtig auf den Eisenbahnen Deutschlands bestehenden Verkehrsverhältnissen ausgehen, dürfen wir für die zu erbauenden Lokomotive folgende Traingewichte festsetzen:

a) Wenn die stärksten Steigungen der Bahn nicht mehr als $\frac{1}{150}$ betragen, und die kleinsten Krümmungshalbmesser der Bahn nicht unter circa 200 Meter sind.

Art des Zuges.	Gewicht des Trains ohne Lokomotive in Tonnen.
Personen-Schnellzüge . . .	50 bis 100
Gewöhnliche Personenzüge .	100 „ 150
Güterzüge	150 „ 300

b) Wenn die stärksten Steigungen mehr als $\frac{1}{150}$ und bis zu $\frac{1}{40}$ betragen, wird man in der Regel das Gewicht des Trains nicht grösser als 150 Tonnen annehmen dürfen; mit einer geringern Belastung kann man sich aber nicht begnügen, denn jedenfalls sollen doch die Personenzüge, die bei etwas lebhaftem Verkehr ein Gewicht von 150 Tonnen haben, ohne getheilt werden zu müssen, auch auf diesen stark ansteigenden Bahnstrecken fortgeschafft werden können.

Verhältniß zwischen dem Gewicht einer Lokomotive und ihrer normalen Zugkraft.

Die Leistungsfähigkeit einer Lokomotive kann nach dem Produkt $W V$, aus dem Widerstand W, den sie bei einer angemessenen nicht zu hohen Dampfspannung zu überwinden vermag und der normalen Fahrgeschwindigkeit V gemessen werden. Das Gewicht L, das eine Lokomotive erhält, wenn man in ihrem Bau keine todten Gewichte anbringt, sondern alle Theile so construirt, dass die Lokomotive eine gewisse Leistungsfähigkeit erhält, nimmt mit dieser Leistungsfähigkeit zu; allein das Verhältniss $\frac{W V}{L}$ ist nicht constant, sondern es ist für schwächere Schnellläufer grösser, als für stärkere langsamer laufende Zugmaschinen.

Durch eine Vergleichung der Lokomotiven, wie sie gegenwärtig gebaut werden, habe ich gefunden, dass man annähernd setzen darf:

$$\frac{W V}{L} = 590 + 22 V$$

oder

$$\frac{W}{L} = \frac{500 + 22 V}{V} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wobei V die normale Fahrgeschwindigkeit in Metern und in einer Sekunde, L das Gewicht der Lokomotive mit Wasserfüllung in Tonnen à 1000 Kilogr., W den in Kilogr. ausgedrückten normalen totalen Widerstand des Trains bedeutet, den die Lokomotive, bei einer nicht zu hohen Dampfspannung, zu überwinden vermag. In W sind demnach alle Widerstände enthalten, welche durch die Differenz der Pressungen gegen die Flächen der beiden Kolben überwunden werden müssen. Diese Formel gibt:

für	$V =$	5	6	8	10	12	14
	$\frac{W}{L} =$	140	120	96	81	71	64

Bestimmung des Totalwiderstandes W eines Trains und des Gewichtes der Lokomotive.

Wir haben schon (Seite 9) für den Totalwiderstand W eines Trains einen Ausdruck aufgestellt. Vernachlässigen wir in demselben den Krümmungswiderstand, setzen statt L $\frac{L}{W} W$ und suchen sodann W, so finden wir:

$$W = \frac{(3{\cdot}11 + 0{\cdot}077 V + 1162 \sin. \alpha) T + 0{\cdot}0704 \left(F + \frac{1}{4} i f\right) V^2}{1 - (7{\cdot}25 + 0{\cdot}577 V + 1162 \sin. \alpha) \frac{L}{W}} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Bedeutung der in dieser Formel erscheinenden Zeichen ist folgende:

T das Gewicht in Tonnen à 1000 Kilogr. aller Wagen mit Einschluss ihrer Belastung, die von der Lokomotive fortgezogen werden sollen;

V die Fahrgeschwindigkeit der Lokomotive in Metern und in einer Sekunde;

α der Steigungswinkel der stärksten auf der Bahn vorkommenden Steigung;

F die Stirnfläche der Lokomotive in Quadratmetern (gewöhnlich gleich 7 bis 8 Quadratmeter);

f die Stirnfläche jedes von der Lokomotive fortzuziehenden Wagens in Quadratmetern, gewöhnlich ist f gleich 4 Quadratmetern;

i die Anzahl der von der Lokomotive fortzuziehenden Wägen;

W der totale Widerstand des Trains in Kilogrammen.

Um vermittelst dieser Formel W zu berechnen, muss man für $\frac{L}{W}$ den Werth substituiren, den die Formel (1) für denjenigen Werth von V gibt, für welchen W berechnet werden soll. Hat man den Werth von W bestimmt, so gibt sodann eben diese Formel (1) annähernd das Gewicht, das die Lokomotive erhalten wird, wenn ihre Construktion in einer Weise durchgeführt wird, die dem Widerstand W und der Geschwindigkeit V angemessen ist.

Es sei z. B.:

$$T = 100 \quad V = 14 \quad F = 7 \quad f = 4 \quad i = 14 \quad \sin.\alpha = \frac{1}{200}$$

Diese Daten entsprechen einer Schnellzuglokomotive, die im Stande sein soll einen Train von 100 Tonnen mit einer Geschwindigkeit von 14 Metern auf einer Bahnstrecke von $\frac{1}{200}$ Steigung fortzuführen. Für $V = 14$ gibt die Formel (1) oder die darnach berechnete Tabelle $\frac{W}{L} = 64$ und nun findet man aus (2) $W = 1382$ Kilogr. und dann wird wegen $\frac{W}{L} = 64$ $L = 21$ Tonnen

Es sei ferner:

$$T = 150 \quad V = 5 \quad F = 8 \quad f = 4 \quad i = 20 \quad \sin\alpha = \frac{1}{40}$$

Diese Daten entsprechen einer Rampen- oder Berglokomotive, die im Stande sein soll, einen Train von 150 Tonnen Gewicht mit einer Geschwindigkeit von 5 Metern in 1 Sekunde auf einer Bahnstrecke von $\frac{1}{40}$ Steigung fortzuziehen.

Für $V = 5$ gilt zunächst die Formel (1) $\frac{W}{L} = 140$ und dann findet man aus (2) $W = 6840$; das Gewicht L der Lokomotive wird daher annähernd $\frac{6840}{140} = 49$ Tonnen.

Verhältniß zwischen dem Totalgewicht einer Lokomotive und dem Druck aller Triebräder gegen die Bahn.

Es sei L_1 in Tonnen à 1000 Kilogramm der Druck aller Triebräder gegen die Bahn, f der Reibungscoeffizient der Räder auf den Schienen, so ist $1000\,L_1\,f$ die grösste Zugkraft, welche die Lokomotive ausüben kann, ohne zu glitschen. Nennen wir ferner c

die Zahl, welche ausdrückt, wie vielmal diese Zugkraft grösser sein soll, als der Widerstand des Trains, so hat man:

$$c\,W = 1000\,L_1\,F \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Der Reibungscoeffizient f hängt theils von der Witterung, theils von dem Zustand der Schienen und Räder ab:

Für ganz trockene Witterung, wenn die Schienen leicht bestaubt sind, ist nahe $f = \frac{1}{3}$

Bei feuchtem neblichem Wetter ist $f = \frac{1}{6}$

Bei Regen und Schneewetter ist $f = \frac{1}{10}$

Wenn es sich um die Construktion einer Lokomotive handelt, wird es in der Regel am angemessensten sein, für f den Werth $\frac{1}{6}$ in Rechnung zu bringen.

Was den Werth von c betrifft, so haben wir (Seite 73) gefunden, dass derselbe 1·41 oder 1·11 ist. Der erstere dieser Werthe gilt für die Abfahrt; der letztere für die Fortsetzung der Fahrt. Wir haben nämlich gefunden, dass die Reibung der Triebräder auf der Bahn 1·41 Mal so gross sein soll, als der totale Widerstand des Trains, damit im Moment der Abfahrt ein Glitschen der Räder auch dann nicht eintritt, wenn sich die Kurbeln der Maschine in der für die Zugkraft ungünstigsten Stellung befinden; dass aber jenes Verhältniss c nur 1·1 zu sein braucht, damit während der Fahrt ein Glitschen der Räder nicht eintritt.

Der Berechnung einer zu construirenden Lokomotive darf man jederzeit den Werth $c = 1{\cdot}11$ zu Grunde legen, vorausgesetzt, dass man den grössten auf der zu befahrenden Bahnstrecke vorkommenden Widerstand in Rechnung bringt, denn dieser Widerstand ist immer beträchtlich grösser, als der im Moment der Abfahrt zu überwindende.

Aus den Gleichungen (1) und (3) folgt durch Elimination von W:

$$\frac{L_1}{L} = \frac{c}{1000\,f}\;\frac{590 + 22\,V}{V} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Hierdurch ist nun das Verhältniss zwischen dem Druck der Triebräder gegen die Bahn und dem totalen Gewicht der Lokomotive bestimmt. Es richtet sich, wie man sieht, nach der normalen Fahrgeschwindigkeit und nach dem Reibungscoeffizienten. Aus 4 folgt auch:

$$V = \frac{590}{\frac{1000\,f}{c}\,\frac{L_1}{L} - 22} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Das Verhältniss $\frac{L_1}{L}$ ist bei den gegenwärtig im Gebrauch befindlichen Lokomotiven folgendes:

a) Bei Personenlokomotiven von *Stephenson* mit zwei mittleren Triebrädern . $\frac{L_1}{L} = 0{\cdot}44$

b) Personenlokomotive von *Crampton* $\frac{L_1}{L} = 0{\cdot}5$

c) Güterlokomotive nach *Norris* mit vier gekuppelten Triebrädern, eine Axe hinter der Feuerbüchse, die andere vor derselben $\frac{L_1}{L} = 0{\cdot}6$

d) Güterlokomotive mit vier gekuppelten Triebrädern, die Triebaxen zwischsn der Feuerbüchse und der Rauchkammer $\frac{L_1}{L} = 0{\cdot}73$

c) Güterlokomotive, alle Räder zusammengekuppelt $\frac{L_1}{L} = 1{\cdot}0$

Führen wir diese Werthe von $\frac{L_1}{L}$ in (5) ein und setzen überdiess $c = 1{\cdot}1$ $f = \frac{1}{6}$, so findet man:

$$\text{für } \frac{L_1}{L} = 0{\cdot}44 \quad 0{\cdot}5 \quad 0{\cdot}6 \quad 0{\cdot}73 \quad 1{\cdot}0$$

$$V = 14 \quad 11 \quad 8{\cdot}6 \quad 6{\cdot}7 \quad 4{\cdot}6 \text{ Meter.}$$

Hieraus sieht man, dass im Wesentlichen das System der Triebräder durch die Fahrgeschwindigkeit bestimmt wird.

Durchmesser der Triebräder.

Wir haben in der Theorie der störenden Bewegungen gefunden, dass es für jede Lokomotive einen gefährlichen und einen vortheilhaftesten Durchmesser der Triebräder gibt. Natürlich, dass man suchen muss, den ersteren zu vermeiden und den letzteren wo möglich zu realisiren. Wir haben aber auch gezeigt, dass die störenden Bewegungen nicht nur für den vortheilhaftesten, sondern auch für alle Durchmesser, die nur etwas grösser sind, als der gefährliche, beinahe verschwindend klein ausfallen; es ist daher für die Praxis genügend, wenn man die Durchmesser der Triebräder gleich macht dem arithmetischen Mittel aus dem gefährlichen und dem vortheilhaftesten Durchmesser.

Hinsichtlich des Wankens ist:

der gefährliche Durchmesser (Seite 154) $D = V \frac{d_1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{s}{g}}$

der vortheilhafteste Werth des Durchmessers (Seite 157) $D = V \frac{d_1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s}{g}}$

das arithmetische Mittel aus beiden, nahe $D = V \frac{d_1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{s}{g}}$

Es bedeutet s die Zusammendrückung der Federn durch ihre Belastung, $g = 9{\cdot}81$ die Beschleunigung durch die Schwere, 2ε die Spurweite der Bahn, d_1 den Durchmesser des Röhrenkessels, V die Fahrgeschwindigkeit der Lokomotive in Metern und in einer Sekunde.

Hinsichtlich des Wogens ist:

der gefährliche Durchmesser des Triebrades (Seite 174) $D = 2 \; V \sqrt{\frac{s}{g}}$

der vortheilhafteste Durchmesser eines Triebrades (Seite 175) . . . $D = 2 \; V \sqrt{3 \frac{s}{g}}$

das arithmetische Mittel aus beiden $D = 2{\cdot}73 \; V \sqrt{\frac{s}{g}}$

Da die Werthe von $\frac{d_1}{\varepsilon}$ gleich 2 bis 2·5 ist, so fallen die dem Wogen entsprechenden Durchmesser etwas grösser aus, als die das Wanken betreffenden. Wenn wir also den Durchmesser eines Triebrades gleich

$$D = 2{\cdot}73 \, V \sqrt{\frac{s}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

d. h. gleich dem arithmetischen Mittel aus dem hinsichtlich des Wogens gefährlichen und vortheilhaftesten Durchmesser nehmen, so dürfen wir erwarten, dass die Triebräder eine für die Praxis genügende Grösse erhalten.

Für gut angeordnete Federn ist $s = 0{\cdot}04$ Meter und für diesen Werth wird:

$$D = 0{\cdot}174\,V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Wir wollen sehen, wie das Verhältniss $\frac{D}{V}$ bei den in Gebrauch befindlichen Lokomotiven ist.

	D	V	$\frac{D}{V}$
Personen-Lokomotive von *Stephenson*	1·7	12	0·14
Güter-Lokomotive von *Stephenson* mit 4 gekuppelten Rädern	1·4	10	0·14
Güter-Lokomotive von *Stephenson* mit 6 gekuppelten Rädern	1·2	8	0·15
Personen-Lokom. von *Crampton*	2·2	14	0·16
Semmering-Maschinen . . .	1	5	0·20

Unsere Regel (2) trifft, wie man sieht, in die Mitte der Thatsachen.

Bei der Maschine von *Stephenson* ist das Verhältniss $\frac{D}{V}$ kleiner, als es nach unserer Regel sein soll, es kommt dem gefährlichen Werth $2\sqrt{\frac{s}{g}} = 2\sqrt{\frac{0{\cdot}04}{9{\cdot}81}} = 0{\cdot}13$ sehr nahe.

Bei der Maschine von *Crampton* stimmt das Verhältniss $\frac{D}{V}$ sehr nahe mit unserer Regel überein. Bei den Semmeringlokomotiven ist das Verhältniss $\frac{D}{V}$ grösser, als nach unserer Regel, und nähert sich dem vortheilhaftesten Verhältuiss $2\sqrt{3\frac{s}{g}} = 2\sqrt{3\frac{0{\cdot}04}{9{\cdot}81}} = 0{\cdot}22$.

Unsere Theorie, in Uebereinstimmung mit den Thatsachen, berechtiget uns, zur Bestimmung der Durchmesser der Triebräder folgende Regeln aufzustellen:

Der Durchmesser eines Triebrades soll nie kleiner als $2{\cdot}73\,V\sqrt{\frac{s}{g}}$ und nie grösser als $3{\cdot}46\,V\sqrt{\frac{s}{g}}$ gemacht werden. Wenn $s = 0{\cdot}04$ ist, werden diese Grenzen: $0{\cdot}174\,V$ und $0{\cdot}22\,V$. Es ist daher:

für							
	$V =$	5	6	8	10	12	14 Meter.
	$D_{min.} =$	0·87	1·04	1·39	1·74	2·08	2·44 „
	$D_{max.} =$	1·10	1·32	1·76	2·2	2·64	3·08 „

Anzahl der Triebräder.

Zur Berechnung der Anzahl der Triebräder wollen wir von der zwar nicht immer ganz zweckmässigen Voraussetzung ausgehen, dass alle Triebräder gleich stark gegen die Bahn drücken. Nennen wir L_1 den Druck sämmtlicher Triebräder gegen die Bahn, i die Anzahl der Triebräder, $\mathfrak{P}$ den Druck eines Rades gegen die Bahn, so ist unter obiger Voraussetzung:

$$i = \frac{L_1}{\mathfrak{P}}$$

Nun haben wir (Seite 24) die Regel aufgestellt, dass ein Rad von einem Durchmesser D nicht angegriffen wird und auch die Schienen nicht zu stark angreift, wenn es gegen die Schienen einen Druck von $5\sqrt{D}$ Tonnen ausübt. Wir dürfen daher setzen:

$$\mathfrak{P} = 5\sqrt{D}$$

Wir haben endlich (Seite 281) die Regel aufgestellt, dass

$$D = 0{\cdot}174\,V.$$

sein soll. Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$i = 0{\cdot}48\,\frac{L_1}{\sqrt{V}}$$

Setzen wir für L_1 denjenigen Werth, der aus der Gleichung (4) (Seite 279) folgt, so wird auch

$$i = 0{\cdot}48\,\frac{c}{1000\,f}\,\frac{590 + 22\,V}{V\sqrt{V}}\,L$$

oder weil $c = 1{\cdot}1 \quad f = \frac{1}{6}$ zu setzen ist:

$$i = 0{\cdot}00317\,\frac{590 + 22\,V}{V\sqrt{V}}\,L \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

für $V =$	5	6	8	10	12	14
wird $\frac{i}{L} =$	0·20	0·16	0·11	0·08	0·07	0·06

Da die Anzahl der Triebräder eine ganze und gerade Zahl sein muss, so muss man für die Anzahl der Triebräder diejenige ganze gerade Zahl nehmen, die dem berechneten Werthe von i am nächsten kommt.

Gewöhnlich nimmt man an, dass der Druck eines Rades von irgend einem Durchmesser gegen die Schienen 4 bis 5 Tonnen betragen dürfe, und bestimmt darnach die Anzahl der Triebräder; allein diese Regel ist nicht richtig, denn es ist klar, dass der Druck, den ein Rad gegen die Bahn ausüben darf, mit dem Durchmesser des Rades

wächst, und diess wird auch durch die Thatsache bestätiget, dass man in England Lokomotive mit sehr grossen Rädern bauet, die gegen die Bahn einen Druck ausüben, der viel mehr als 5 Tonnen beträgt.

Anzahl und Größe der Laufräder.

Die Bedingungen, denen die Laufräder zu entsprechen haben, sind sehr einfach. Nennen wir D_1 den Durchmesser eines Laufrades, $\mathfrak{P}_1$ den Druck eines Laufrades gegen die Bahn, i_1 die Anzahl der Laufräder, L das totale Gewicht der Lokomotive mit Wasserfüllung, L_1 den Druck aller Triebräder gegen die Bahn; so ist zunächst:

$$i_1 = \frac{L - L_1}{\mathfrak{P}_1}$$

Damit die Axenreibung nicht zu gross ausfällt, soll der Durchmesser D_1 dem Durchmesser des Axenzapfens oder des Axenhalses proportional sein. Dieser letztere Durchmesser ist aber annähernd der Quadratwurzel aus dem Druck $\mathfrak{P}_1$ proportional; wir können daher setzen:

$$D_1 = \mathfrak{A} \sqrt{\mathfrak{P}_1}$$

Der Durchmesser D_1 soll aber auch eine dem Druck $\mathfrak{P}_1$ angemessene Grösse erhalten, und diese ist nach (Seite 24):

$$D_1 = \frac{\mathfrak{P}_1^2}{25}$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt sowohl für D_1, als auch für $\mathfrak{P}_1$ ein constanter Werth, und dies stimmt auch mit den Thatsachen der Wirklichkeit gut überein, denn die Laufräder haben bei den meisten Lokomotiven einen Durchmesser von 1 Meter.

Wir stellen also die praktische Regel auf:

a) Durchmesser eines Laufrades einer Kokomotive = 1 Meter;

b) Druck eines Laufrades gegen die Bahn höchstens 5 Tonnen;

c) Anzahl der Laufräder wenigstens $= \frac{L - L_1}{5}$.

Bauart der Lokomotive.

Die Bauart einer Lokomotive wird im Wesentlichen durch die Anzahl und Lage der Axen und durch die Position der Cylinder bestimmt. Nach unsern Theorien der Störungen und der Bahnkrümmungen müssen wir von den bis jetzt in Anwendung gekommenen Anordnungen einige ganz verwerfen, andere aber mit Modifikationen empfehlen.

Wir verwerfen alle von *Stephenson* herrührenden Lokomotiven, weil sie eine zu geringe Stabilität gewähren, und in Bahnkrümmungen zu schwer laufen, empfehlen dagegen folgende Anordnungen:

A. Für Personen- und Schnellzüge ist zu empfehlen:

I. Die Lokomotive von *Crampton* ohne Blindaxe, jedoch mit folgenden Abänderungen: 1) Statt der gegen den Rahmenbau im horizontalen Sinne unveränderlich gelagerten Laufwerke einen um einen vertikalen Zapfen drehbaren vierrädrigen Laufwagen. 2) Eine richtige, d. h. eine solche Lagerung der Dampfcylinder, dass die mittlere Position der Gleitstücke genau in die quer durch den Schwerpunkt gehende Vertikalebene fällt. 3) Eine richtige Balanzirung der hin- und hergehenden Massen der Kolben, Kolbenstangen und Schubstangen, welche letztere, wenn man die Cylinder in die bezeichnete richtige Lage bringt, länger ausfallen, als sie in der Original-*Crampton*'schen Maschine sind. 4) Einen Kessel von ganz einfacher Form mit möglicht grossem Querschnitt und ohne Dom. 5) Eine richtige Zusammenhängung des Tenders mit der Lokomotive.

II. Die Lokomotive von *Crampton* mit Blindaxe, jedoch mit folgenden Abänderungen: 1) Einen um einen Vertikalzapfen drehbaren, vierrädrigen Laufwagen. 2) Aussen liegende Cylinder; denn wenn eine Blindaxe vorhanden ist, verursacht die äussere Lage der Cylinder weder ein Wanken, noch ein Wogen und das Nicken wird durch diese Lage nicht stärker; die äussere Lage gewährt aber den Vortheil, dass die Blindaxe keine inneren, sondern nur zwei äussere Kurbeln erhält, und dass sie nicht durch Torsion in Anspruch genommen ist, daher viel leichter gemacht werden kann, als wenn die Cylinder innen liegen.

III. Die Lokomotive mit Schleifenbewegung, welche weder ein Wanken, noch ein Wogen, sondern nur ein schwaches Nicken verursacht, dürfte wohl auch empfohlen werden. Ein Versuch wäre kein grosses Wagstück, weil, wenn sich eine solche Lokomotive im ungünstigsten Fall, aus irgend einem nicht vorauszusehenden Grund nicht bewähren sollte, ohne Schwierigkeiten und mit geringen Kosten in das *Crampton*'sche System umgebaut werden könnte.

B. Für leichtere Güterzüge ist zu empfehlen:

IV. Die im Wesentlichen nach dem System *Norris* erbauten Lokomotive der württembergischen Eisenbahn; jedoch mit folgenden Abänderungen: 1) Die Cylinder weiter zurücklegen, so dass die mittlere Position der Gleitstücke in die durch den Schwerpunkt gehende vertikale Querebene fällt. 2) Die hintern Triebräder durch Schubstangen mit den Gleitstücken verbinden. 3) Einen Kessel von einfacher Form mit grossen Querschnitten und ohne Dom anwenden. 4) Richtige Balanzirung der hin- und hergehenden Massen.

C. Für starke Güterzüge ist zu empfehlen:

V. Die Bauart der Alplokomotive (Tab. VI, Fig. 23, 24), jedoch mit folgenden Abänderungen: 1) Die hintern Triebräder vermittelst Schubstangen mit den Gleitstücken verbinden. 2) Die mittlere Triebaxe schwächer, als die beiden andern Axen belasten, daher auch die Federn der mittleren Axe weniger starr nehmen, als die Federn der andern Axen. 3) Jedes Rad mit einer besonderen von den übrigen Federn unabhängigen Feder versehen. 4) Einen einfachen Kessel mit möglichst grossem Querschnitt anwenden. 5) Eine richtige Balanzirung der Massen anbringen. 6) An den Rädern der Mittelaxe eine umgekehrte Konizität.

D. Berglokomotive.

Was die Befahrung von stark geneigten und stark gekrümmten Bahnstrecken betrifft, so ist meine Ansicht, dass man schliesslich die Monstrelokomotive aufgeben, und statt derselben zwei nach dem modifizirten System der Alplokomotive angeordnete Lokomotive mit richtiger Zusammenhängung anwenden, und jede derselben durch einen gut geübten Führer bedienen lassen wird. Mit dieser Aeusserung soll den achtenswerthen

Bestrebungen, eine dauernd entsprechende Riesenlokomotive zu Stande zu bringen, nicht im Mindesten nahe getreten werden.

Die Grenzen der Anwendbarkeit dieser drei Anordnungen sind folgende:

1) Die Anordnung von *Crampton* bis zu einem Gewicht von ungefähr 36 Tonnen.

2) Die württembergische Lokomotive bis zu einem Gewicht von ungefähr 50 Tonnen.

3) Die Lokomotive mit 6 bis 10 gekuppelten Rädern von 35 bis 70 Tonnen Gewicht.

Diese Grenzen bestimmen sich, wenn man die Belastungsverhältnisse und ferner die Regel beachtet, dass der Druck eines Rades gegen die Bahn $5 \sqrt{D}$ Tonnen betragen darf.

Bei der Maschine von *Crampton* beträgt der Druck der Triebräder gegen die Bahn $0{\cdot}44\,L$; man hat daher:

$$0{\cdot}44\,L = 2 \times 5 \sqrt{D}$$

mithin

$$L = \frac{10}{0{\cdot}44} \sqrt{D}$$

Die grössten Räder, welche bis jetzt angewendet wurden, haben einen Durchmesser von 2·5 Meter, und für diesen Durchmesser wird $L = \frac{10}{0{\cdot}44} \sqrt{2{\cdot}5} = 36$ Tonnen.

Bei der württembergischen Lokomotive ist der Druck der 4 Triebräder gegen die Bahn ebenfalls ungefähr $0{\cdot}44\,L$. Weil aber 4 Triebräder vorhanden sind, so hat man:

$$0{\cdot}44\,L = 4 \times 5 \times \sqrt{D}$$

Der Durchmesser eines Triebrades kann bei dieser Anordnung nicht leicht grösser als 1·44 Meter genommen werden, weil sonst der Schwerpunkt der Lokomotive zu hoch zu liegen kommt. Für $D = 1{\cdot}44$ wird aber:

$$L = \frac{4 \times 5 \times \sqrt{1{\cdot}44}}{0{\cdot}44} = 50.$$

Für eine Lokomotive mit i verkuppelten Rädern ist annähernd:

$$L = 5\,i \sqrt{D}$$

Für eine solche Lokomotive kann man D höchstens $= 1{\cdot}3$ Meter rechnen, und dann wird für $i = 6 \quad L = 35$ und für $i = 10 \quad L = 70$.

Es mag sein, dass man diese Grenzen überschreiten darf, wenn man aber Regeln aufstellen will, muss man sich vor Extravaganzen hüten.

Conizität der Räder eines vierrädrigen Wagens mit parallelen Axen und Geleisenerweiterung in Bahnkrümmungen.

Nennen wir:

R den kleinsten Krümmungshalbmesser, welcher auf der zu befahrenden Bahn vorkommt;

$\text{tang.}\,\alpha$ die Conizität der Räder eines vierrädrigen Wagens, d. h. die Tangente des Winkels, den die Seite des Radkegels mit seiner Axe bildet;

r den Halbmesser des mittleren Laufkreises eines Rades, d. h. den Halbmesser desjenigen Kreises, dessen Punkte mit der Bahn in Berührung kommen, wenn ein Wagen auf einer geraden Strecke in seiner mittleren Stellung auf der Bahn fortläuft;

$2e$ die Spurweite der Bahn auf einer geraden Strecke;

$2e + 2\sigma$ die Spurweite der Bahn in der stärksten Bahnkrümmung, welcher der Halbmesser R entspricht. Es ist also 2σ die Geleiserweiterung in der Krümmung R;

R_1 den Halbmesser irgend einer von den Bahnkrümmungen, die auf der zu befahrenden Bahn vorkommen;

$2e + 2\sigma_1$ die Spurweite, welche die Bahn in der Krümmung vom Halbmesser R_1 haben soll, also $2\sigma_1$ die Geleisveränderung in der Krümmung;

Diess vorausgesetzt hat man nach (Seite 10) zur Bestimmung von $\text{tang.}\,\alpha$ und von σ_1 folgende Formel:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang.}\,\alpha &= \frac{r\,e}{R\,\sigma} \\ \sigma_1 &= \sigma\,\frac{R}{R_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Die Geleiserweiterung darf im Maximum nicht wohl mehr als 0·03 Meter betragen, weil sonst die Wagen zwischen den Schienen zu viel Spiel haben, wodurch auffallende schlängelnde Bewegungen hervorgerufen werden könnten. Wir stellen also die Regel auf, dass

$$\sigma = 0{\cdot}015 \text{ Meter}$$

genommen wurde, d. h. dass eine Conizität der Räder so bestimmt werden soll, dass die Wagen in der stärksten auf der Bahn vorkommenden Krümmung um 0·015 Meter nach Aussen verschoben laufen müssen, damit die Halbmesser der Laufkreise der äusseren und inneren Räder das richtige Verhältniss erhalten.

Es sei z. B.:

$$r = 0{\cdot}5 \qquad e = \frac{1{\cdot}5}{2} = 0{\cdot}75 \qquad R = 200 \text{ Meter}$$

überdiess sollen auch noch Bahnstrecken von 300 und 400 Meter Radius vorkommen. Dann wird nach unserer Formel:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{0{\cdot}5 \times 0{\cdot}75}{200 \times 0{\cdot}015} = 0{\cdot}125 = \frac{1}{8}$$

ferner wird für

$$R_1 = \quad 300 \quad \text{und} \quad 400$$

$$\sigma_1 = 0{\cdot}015\,\frac{200}{300} = 0{\cdot}01 \quad \text{und} \quad 0{\cdot}015\,\frac{200}{400} = 0{\cdot}0075$$

Conizität der Räder eines Wagens mit mehr als zwei Axen.

Die Conizitäten der Räder der vordersten und der hintersten Axe eines Wagens mit mehr als zwei Axen sind genau nach der vorhergehenden Regel, Formel (8)

zu bestimmen. Zur Bestimmung der Conizität eines der mittleren Laufwerke hat man dagegen die nachstehende Regel zu befolgen.

Nennt man: Fig. 41

2Δ den Abstand der vordersten Axe des Wagens von der hintersten;

δ die Entfernung der Axe des Laufwerkes, dessen Conizität berechnet werden soll, von der hintersten Axe.

$\text{tang}\,\alpha_1$ die Conizität der Räder dieses Laufwerkes;

$2\,e$ die Spurweite der Bahn auf einer geraden Bahnstrecke;

R die Halbmesser der stärksten auf der Bahn vorkommenden Krümmung;

$2\,\sigma$ die Bahnerweiterung in dieser stärksten Krümmung;

r_1 den Halbmesser des mittleren Laufkreises des Laufwerkes, dessen Conizität bestimmt werden soll, so hat man nach (Seite 19) annähernd:

$$\text{tang.}\,\alpha_1 = \frac{2\,r\,e}{\Delta^2 - (\Delta - \delta)^2 - 2\,R\,\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Fällt der Werth von $\text{tang}\,\alpha_1$ *positiv* aus, so ist die Conizität jener der Vorder- und Hinterräder *entgegengesetzt*, wird $\text{tang.}\,\alpha_1$ *negativ*, so stimmt die Conizität der Räder des innern Laufwerkes mit der Conizität der Vorder- und Hinterräder überein. Sollte $\text{tang.}\,\alpha_1 = \infty$ werden, so ist es nicht möglich, diesen mittleren Rädern eine richtige Conizität zu geben.

Berechnen wir z. B. die Conizitäten der Räder der neuen Semmering-Lokomotive nach dem System von *Engerth*. Da die Lokomotive und der Tender gegeneinander beweglich sind, so ist der Tender als ein vierrädriger, die Lokomotive als ein sechsrädriger Wagen zu betrachten.

Die vier Tenderräder und die vordern, so wie die hintern Räder des Lokomotivwagens erhalten gleiche Conizitäten. Die mittleren Räder des Lokomotivwagens erhalten eine andere Conizität.

Die Halbmesser sämmtlicher Räder sind 0·5 Meter. Der kleinste auf der Bahn vorkommende Krümmungshalbmesser ist 190 Meter. Die Spurweite 1·43 Meter. Setzen wir in die erste der Formeln (8) (Seite 286):

$$e = \frac{1{\cdot}43}{2} = 0{\cdot}715 \qquad r = 0{\cdot}5 \qquad R = 190 \qquad \sigma = 0{\cdot}015$$

so erhalten wir:

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{0{\cdot}715 \times 0{\cdot}5}{190 \times 0{\cdot}015} = 0{\cdot}125 = \frac{1}{8}$$

Der Abstand Δ der Vorderaxe von der Hinteraxe des Lokomotivwagens ist 2·29 Meter, der Abstand δ der mittleren Axe von der Hinteraxe des Lokomotivwagens ist 1·145 Meter. Setzen wir in die Formel (9):

$$e = 0{\cdot}715 \qquad r = 0{\cdot}5 \qquad R = 190 \qquad \sigma = 0{\cdot}015 \qquad \Delta = 2{\cdot}29 \qquad \delta = 1{\cdot}145$$

so finden wir:

$$\text{tang.}\,\alpha_1 = \frac{2 \times 0{\cdot}715 \times 0{\cdot}5}{\overline{2{\cdot}29}^2 - \overline{1{\cdot}145}^2 - 2 \times 190 \times 0{\cdot}015} = -0{\cdot}404$$

Diese mittleren Räder des Lokomotivwagens sind in der Wirklichkeit übereinstimmend mit den übrigen Rädern geformt, sollten aber, wie es sich zeigt, eine bedeutend stärkere Conizität haben, als die übrigen Räder.

Kolbengeschwindigkeit und Kolbenschub.

Die Fahrgeschwindigkeit V, die Kolbengeschwindigkeit v, die Länge eines Kolbenschubes l und der Durchmesser D eines Triebrades hängen in einer Weise zusammen, die durch die Formel

$$\frac{V}{v} = \frac{D\pi}{2l}$$

ausdedrückt wird. Allein wir haben gefunden, dass der Durchmesser eines Triebrades der Fahrgeschwindigkeit proportional, dass nämlich:

$$D = 0{\cdot}174\, V$$

sein soll. Aus diesen zwei Gleichungen folgt:

$$\frac{l}{v} = 0\,174 \times \frac{\pi}{2} = 0{\cdot}273 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Das Verhältniss zwischen der Länge des Kolbenschubes und der Geschwindigkeit des Kolbens soll demnach den constanten Werth 0·273 haben und es handelte sich nun darum, diesem Verhältnisse mit den in jeder Hinsicht vortheilhaftesten Werthen von l und v zu entsprechen. Eine mässige Kolbengeschwindigkeit wäre zwar für die Kraftentwicklung des Dampfes und für Erhaltung der Maschine vortheilhaft, würde aber sehr grosse Cylinderquerschnitte und wegen des obigen Verhältnisses (10) einen sehr kleinen Kolbenschub, daher also ein für die Construktion sehr unpassendes Verhältniss der Cylinderabmessungen bedingen, und überdiess würde ein so kleiner Kolbenschub für die Wirkung des Dampfes nachtheilig werden, weil die Comunicationswechsel zu rasch auf einander folgten und auch der schädliche Raum der Cylinder zu gross ausfiele. Eine grössere Kolbengeschwindigkeit ist also einer kleineren vorzuziehen.

Nun ist hinsichtlich der Kraftentwicklung des Dampfes kein Grund vorhanden, für verschiedene Maschinen verschiedene Kolbengeschwindigkeiten anzunehmen, sondern es liegt in der Natur der Sache, dass die Kolbengeschwindigkeit bei allen Lokomotiven ein und denselben Werth haben soll. Allein so wie wir für v einen constanten Werth annehmen, wird vermöge (10) auch l constant, und dies ist mit den Thatsachen der Wirklichkeit nicht im Widerspruch, denn die Kolbenschublängen weichen bei den verschiedenartigsten Lokomotiven so wenig von einander ab, dass die Differenzen als Zufälligkeiten anzusehen sind. Wir setzen daher in Uebereinstimmung mit den Thatsachen:

$$l = 0{\cdot}63 \text{ Meter}$$

und dann wird

$$v = \frac{0{\cdot}63}{0{\cdot}273} = 2{\cdot}3 \text{ Meter}.$$

Es ist jedoch nicht nothwendig, sich jederzeit ganz streng an diese Regel zu halten, denn es entsteht durchaus kein Nachtheil, wenn der Kolbenschub etwas länger oder etwas kürzer genommen wird. Bei schweren Lastenmaschinen mit kleinen Triebrädern darf das Verhältniss des Kolbenschubes zum Durchmesser der Triebräder den Werth 0·6 nicht überschreiten, weil sonst der Kurbelzapfen dem Radumfang zu nahe käme.

Die grosse Geschwindigkeit von 2·3 Meter in 1 Sekunde ist allerdings ein Uebelstand, denn dieses hastige Hin- und Herlaufen der Kolben ist für das Aus- und Einströmen des Dampfes und für die Verbindung der Maschinentheile sehr nachtheilig, allein dieses Grundübel muss man sich einmal gefallen lassen, denn die Räderübersetzungen sind nicht anwendbar und die Raddurchmesser fallen nach unsern mit den Thatsachen zusammenstimmenden Regeln in den meisten Fällen schon sehr gross aus.

Länge der Schubstangen.

Die störenden Bewegungen entstehen vorzugsweise durch die Pressungen der Gleitstücke gegen die Führungslineale. Lange Schubstangen vermindern diese Pressungen, sind demnach vortheilhaft, und man kann überhaupt die Regel aufstellen, dass man die Schubstangen so lang machen soll, als es sich mit der gewählten Construktion nur immer verträgt. Allein diese Regel ist doch zu unbestimmt, und es ist insbesondere die Frage, wie lang die Schubstangen wenigstens genommen werden müssen, damit die störenden Bewegungen in keinem nachtheiligen Maass auftreten? Unsere Störungstheorie in Verbindung mit den Thatsachen der Wirklichkeit gibt uns hierüber Aufschluss.

In den Ausdrücken (8) (Seite 158) sind die Grössen s d_1 ε nur wenig, dagegen die Grössen W G V e beträchtlich veränderliche Grössen. Das Wanken und Wogen wird also innerhalb gewisser zulässiger Grenzen bleiben, wenn wir dafür sorgen, dass

$$\frac{W e V}{G l_1}$$

einen gewissen Werth $\mathfrak{A}$, den wir durch Thatsachen bestimmen werden, nicht überschreitet. Wir setzen daher

$$\frac{W e V}{G l_1} = \mathfrak{A}$$

Indem wir hier die Länge der Schubstange mit l_1 bezeichnen, weil wir das Gewicht der Lokomotive L nennen. Allein das Gewicht G des auf den Federn liegenden Baues ist jederzeit dem Totalgewicht L der Lokomotive proportional, man kann daher auch schreiben

$$\frac{W V}{L} \frac{e}{l_1} = \mathfrak{B}$$

wobei $\mathfrak{B}$ abermals eine durch Thatsachen zu bestimmende Constante ausdrückt. Allein wir haben Seite (277) die empirische Regel aufgestellt:

$$\frac{W V}{L} = 590 + 22 V$$

und haben ferner Seite (281) die Regel gefunden:

$$D = 0{\cdot}174\ V$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$l_1 = \frac{\left(590 + \frac{22}{0{\cdot}174}\ D\right) e}{\mathfrak{B}} = \frac{(590 + 126\ D)\ e}{\mathfrak{B}}$$

In diesem Ausdruck bedeutet D den Durchmesser eines Triebrades, e die halbe Distanz der Cylindermittel. Versuchen wir, ob uns verschiedene Lokomotive, die man für gute Construktionen hält, für $\mathfrak{B}$ annähernd einen constanten Werth liefern.

	D	e	l_1	$\mathfrak{B}$
Neue Semmering-Lokomotive nach *Engerth*	1·00	1	2·2	325
Personen-Lokom. von *Crampton*	2·2	0·9	2·5	348
Personen-Lokomotive von *Stephenson* mit innen liegenden Cylindern	1·7	0·5	1·6	251
			Mittel . . .	308

Mit diesem mittleren Werth von $\mathfrak{B}$ wird:

$$l_1 = (1{\cdot}9 + 0.41\ D)\ e$$

Diese Werthe von $\mathfrak{B}$ stimmen allerdings nicht so genau überein, dass man sagen dürfte, unsere Regel werde durch die Thatsachen bestätiget. Allein unsere Regel ist der Form nach mit der Natur der Sache in keinem Widerspruche, denn es wird wohl Niemand in Abrede stellen können, dass Lokomotive mit weit auseinander gelegten Cylindern längere Schubstangen erfordern, und wenn man bedenkt, dass wir zur Bestimmung des Werthes von $\mathfrak{B}$ drei nach ihrer Construktionsart im höchsten Grade abweichende Lokomotive gewählt haben, und dass ferner derlei Detailbestimmungen, wie z. B. die Schubstangenlänge, bis jetzt nie nach einer festeren Regel, sondern immer mehr oder weniger nach Gutdünken gemacht worden sind, so wird man die Abweichungen in den drei Werthen von $\mathfrak{B}$ nicht so beträchtlich finden.

Wir stellen also getrost die Regel auf, dass die Länge l_1 einer Schubstange nie kleiner als:

$$l_1 = (1{\cdot}9 + 0{\cdot}41\ D)\ e \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

und jederzeit so gross gemacht werden soll, als es die Bauart der Lokomotive erlaubt.

Spannung des Dampfes in den Cylindern.

Die Spannung des Dampfes in den Cylindern beträgt bei den Lokomotiven in der Regel ungefähr 5 Atmosphären, ist also eine verhältnissmässig hohe. Diese hohe Spannung wird aus mehreren gewichtigen Gründen gerechtfertigt.

Es ist zunächst hinsichtlich des zur Dampferzeugung erforderlichen Brennstoffaufwandes ziemlich gleichgiltig, ob man Dampf von niederer oder von hoher Spannung hervorzubringen hat, doch aber braucht man zur Erzeugung von hochgespanntem Dampf aus zwei Ursachen etwas mehr Brennstoff als für Niederdruckdampf. Es ist zunächst die zur Bildung von 1 Kilogramm Dampf aus Wasser von 0° Temperatur erforderliche Wärmemenge nach den äusserst genauen Versuchen von *Regnault* $606 \cdot 5 + 0 \cdot 305\, t$ Wärmeeinheiten, wobei t die Temperatur des Dampfes bedeutet. Hochgespannter Dampf erfordert also mehr Wärme, als schwach gespannter; allein die Temperatur der Dämpfe wächst mit der Spannkraft in einem so geringen Maasse, dass man für derlei praktische Fragen die zur Bildung von 1 Kilogramm Dampf von 3 bis 5 Atmosphären erforderliche Wärmemenge als eine constante Grösse betrachten kann.

Die bei hochgespanntem Dampf im Kessel herrschende höhere Temperatur ist für den Durchgang der Wärme durch die Heizfläche nachtheilig. Allein der Temperaturunterschied zwischen Dampf von 6 und von 3 Atmosphären beträgt 25°, ist also eine verschwindende kleine Grösse gegen die Temperatur der Verbrennungsgase, es ist daher für eine praktisch vortheilhafte Dampfbildung nicht nothwendig, die Heizfläche des Kessels nach der Dampfspannung einzurichten. Für die solide Herstellung des Kessels ist eine hohe Dampfspannung ein sehr erschwerender Umstand. Die Lokomotivkessel, so wie sie gegenwärtig gemacht werden, erfordern zu ihrer Anfertigung sehr viele Arbeit, allein hinsichtlich ihrer Festigkeit leisten sie sehr Befriedigendes.

Eine hohe Dampfspannung ist für die Benützung des Dampfes zum Betrieb der Lokomotive eine absolute Nothwendigkeit. Eine Lokomotive muss innerhalb eines äusserst eingeschränkten Raumes eine ungemein grosse Wirkung zu entwickeln vermögen, alle Dimensionen, und insbesondere die Abmessungen der Dampfmaschinen müssen auf das kleinste Maass zurückgeführt werden. Diess ist aber nur durch eine grosse Kolbengeschwindigkeit und durch eine hohe Dampfspannung möglich. Aber auch die für den Brennstoffverbrauch vortheilhafte Verwendung des Dampfes fordert eine hohe Dampfspannung. Das Condensationsprinzip ist in einer vollkommenen Weise nicht anwendbar, weil dazu eine zu grosse Quantität kaltes Wasser erforderlich wäre, auch kann der Dampf nicht condensirt werden, weil durch sein heftiges Ausströmen aus dem Blasrohr die Anfachung des Feuers bewirkt werden muss. Die vor dem Kolben herrschende Spannung beträgt desshalb immer wenigstens $\frac{5}{4}$ Atmosphären, und da eine günsige Wirkung des Dampfes nur erzielt werden kann, wenn seine Spannung im Verhältniss zu dem vor dem Kolben herrschenden Druck sehr gross ist, so ist für eine vortheilhafte Benutzung des Dampfes eine hohe Dampfspannung eine absolute Nothwendigkeit. Eine hohe Dampfspannung ist also 1) hinsichtlich der Brennstoffmenge, die die Bildung erfordert, kein praktisch merklicher Nachtheil; 2) für die solide Construktion des Kessels ein erschwerender Umstand, den man jedoch zu überwinden versteht; 3) für die vortheilhafte Verwendung des Dampfes eine absolute Nothwendigkeit, so lange die Feueranfachung durch den ausströmenden Dampf bewirkt werden muss. Die allgemein übliche hohe Dampfspannung von 5 Atmosphären ist also gerechtfertigt und ist auch eine zweckmäsige, denn es ist kein Grund vorhanden, der eine noch höhere Dampfspannung wünschenswerth macht. Die Maschinen fallen bei 5 Atmosphären Spannung schon so klein aus, dass man für ihre Unterbringung hinreichend Raum findet,

und das Verhältniss zwischen dem Hinterdruck und Vorderdruck, nämlich: $\frac{5}{1 \cdot 25} = 4$ ist bereits so günstig, dass man damit zufrieden sein kann; man würde also durch eine noch höhere Dampfspannung keinen erheblichen Vortheil erzielen, wohl aber bedeutende Schwierigkeiten für die solide Herstellung des Kessels veranlassen.

Wir wollen also für die Bestimmung der Dimensionen einer neu zu erbauenden Lokomotive die Regel annehmen, dass in den Cylindern eine Spannung von 5 Atmosphären eintreten soll, wenn die Lokomotive ihre stärkeren aber doch noch normalen Leistungen hervorbringt, das will sagen, dass die Triebräder noch nicht glitschen dürfen, wenn die Dampfspannung 5 Atmosphären beträgt. Für Berglokomotive, die sehr starke Widerstände zu überwinden haben, dürfte es jedoch zweckmässiger sein, für das Maximum der Dampfspannung 6 Atmosphären anzunehmen, und die Cylinder so zu bestimmen dass dieses Maximum eintritt, wenn die Lokomotive den grössten Widerstand überwindet, wobei die Triebräder zu glitschen beginnen.

Querschnitt und Durchmesser der Dampfcylinder.

Die Bestimmung des Cylinderquerschnittes unterliegt nun keiner Schwierigkeit. Wir nehmen an, dass die zu construirende Lokomotive mit zwei Dampfcylindern versehen werden soll, und nennen:

O den Querschnitt eines Cylinders in Quadratmetern;
p den Druck des Dampfes in Kilogrammen auf 1 Quadratmeter hinter dem Kolben;
r den vor dem Kolben herrschenden mittleren Gegendruck in Kilogr. auf 1 Quadratmeter;
v die Kolbengeschwindigkeit
V die Fahrgeschwindigkeit } in Metern und in 1 Sekunde;
l die Länge des Kolbenschubes;
l_1 den Weg, welchen der Kolben bei expandirenden Maschinen zurücklegt, bis die Absperrung eintritt;
m den Coeffizienten für den schädlichen Raum, d. h. die Zahl, mit welcher das Volumen $O l$, das der Kolben bei einem Schub beschreibt, multiplizirt werden muss, um zu erhalten: das Volumen zwischen Deckel und Kolben, wenn derselbe am Ende eines Schubes steht, mehr das Volumen eines Dampfkanales;

$\alpha = 0 \cdot 1427$
$\beta = 0 \cdot 00004729$
$\frac{\alpha}{\beta} = 3018$
} Zahlen, durch welche das Gewicht von einem Kubikmeter Dampf vermittelst des Ausdruckes $\alpha + \beta p$ berechnet werden kann;

W den totalen Widerstand des Trains, der durch die Kraft $2 O (p - r)$ überwunden werden muss.

Diess vorausgesetzt, hat man zur Bestimmung des Cylinderquerschnittes folgende Formeln:

A. Für nicht expandirende Maschinen:

$$O = \frac{V W}{2 v (p - r)} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

B. Für expandirende Maschinen:

$$O = \frac{V\,W}{2\,\upsilon\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}+p\right)k-\left(\frac{\alpha}{\beta}+r\right)\right]} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wird:

$$k = \frac{l_1}{l} + \left(\frac{l_1}{l} + m\right) \text{lognat} \frac{l + m\,l}{l_1 + m\,l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Gewöhnlich ist $m = 0{\cdot}05$ und dann gibt diese Formel:

für $\frac{l_1}{l} =$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
$k =$	0.958	0·846	0·685	0·568	0·535

Die Geschwindigkeit V ist gegeben. Der Widerstand muss nach der (Seite 277) aufgestellten Regel berechnet werden. Die Kolbengeschwindigkeit υ ist für alle Lokomotive gleich 2·3 Meter. Die Dampfspannung in den Cylindern soll in der Regel 5 Atmosphären betragen, bei sehr starken Rampenmaschinen, so wie bei expandirenden Maschinen kann man auf 6 Atmosphären gehen.

Es ist also zu setzen:

$$p = \left\{ \begin{array}{c} 5 \times 10330 = 51650 \text{ Kilogr.} \\ \text{bis} \\ 6 \times 10330 = 61980 \text{ Kilogr.} \end{array} \right.$$

Für den schädlichen Vorderdruck r wollen wir, um sicher zu gehen, $1 + \frac{1}{2}$ Atmosphären in Rechnung bringen; setzen also: $r = 15502$ Kilogramm.

Wie gross die Expansions $\frac{l_1}{l}$ angenommen werden soll, hängt von der Bestimmung der Lokomotive ab. Die Mehrzahl der Lokomotive wirken ohne wahre Expansion. Für gewöhnlich ist also O vermittelst (12) zu berechnen. Kleiner als $\frac{1}{2}$ kann man $\frac{l_1}{l}$ nicht wohl annehmen, weil sonst die Cylinder zu gross ausfallen, und die Ungleichförmigkeiten der Bewegung zu auffallend werden könnten.

Hauptabmessungen des Kessels.

Die wichtigsten Abmessungen eines Kessels sind: die Heizfläche desselben und die Grösse des Rostes. Zur Berechnung dieser Grössen dienen uns die in der Kesseltheorie gewonnenen Resultate nebst einigen Erfahrungsthatsachen.

Zunächst muss der Dampfverbrauch in einer Sekunde berechnet werden. Dieser ist, wenn wir auch den Fall von expandirenden Maschinen einschliessen:

$$S = 2\,O\,\upsilon\left(\frac{l_1}{l} + m\right)(\alpha + \beta\,p) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Die Bedeutung der Zeichen ist:

s der Dampfverbrauch in Kilogrammen in einer Sekunde;
p der Druck des Dampfes im Cylinder hinter dem Kolben bis zur Absperrung in Kilogrammen auf 1 Quadratmeter;
l die Länge des Kolbenschubes;
l_1 der Weg, den der Kolben zurücklegt, bis die Absperrung eintritt;

$\alpha = 0{\cdot}1427$
$\beta = 0.00004729$ } Zahlen, durch welche das Gewicht von einem Kubikmeter Dampf vermittelst der Formel $\alpha + \beta\, p$ berechnet werden kann;
$\frac{\alpha}{\beta} = 3018$

m in der Regel $= 0{\cdot}05$ der Coeffizient für den schädlichen Raum;

Nennt man $\mathfrak{p}$ das Güteverhältniss des Kessels, d. h. das Verhältniss zwischen der Wärmemenge, die in den Kessel eindringt und der Wärmemenge, die dem Brennstoff entspricht, F die totale Heizfläche des Kessels, so ist nach (Seite 65):

für $\mathfrak{p} =$	0·50	0.55	0·60	0·65	0.70
$\frac{F}{S} =$	94	99	106	111	123

Aus dieser Zahlenreihe folgt, dass man annähernd hat:

$$\frac{F}{S} = 22 + 145\,\mathfrak{p} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Aus den Gleichungen (15) und (16) findet man:

$$F = (22 + 145\,\mathfrak{p})\, 2\, O\, v \left(\frac{l_1}{l} + m\right)(\alpha + \beta\, p) \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Vermittelst dieses Ausdruckes kann man berechnen, wie gross die Heizfläche eines Kessels sein muss, wenn $O\, v\, \frac{l_1}{e}\, m\, p$ gegeben ist und ein gewisses Güteverhältniss $\mathfrak{p}$ gefordert wird. Aus diesem Ausdruck folgt auch:

$$\frac{F}{O} = (22 + 145\,\mathfrak{p})\, 2\, v \left(\frac{l_1}{l} + m\right)(\alpha + \beta\, p) \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

In der Voraussetzung, dass das Güteverhältniss $\mathfrak{p}$, die Kolbengeschwindigkeit v, das Expansionsverhältniss $\frac{l_1}{l}$ (in der Regel 0·75 bis 1) und die Dampfspannung für alle zu construirenden Lokomotive einerlei Werth haben soll, so darf vermöge dieser Gleichung (18) das Verhältniss zwischen der totalen Heizfläche F und dem Querschnitt eines Cylinders constant genommen werden. Diess ist auch in der Wirklichkeit der Fall; nur besteht der Unterschied, dass dieses Verhältniss im Allgemeinen bei englischen Lokomotiven grösser ist, als bei französichen. Es ist nämlich thatsächlich:

bei französischen Maschinen im Mittel $\frac{F}{O} = 730$

bei englischen Maschinen im Mittel $\frac{F}{O} = 900$

Bei diesem thatsächlichen Verhältniss fällt das Güteverhältniss $\mathfrak{p}$ sehr ungünstig

aus, wenn die Lokomotive stark angestrengt sind. Es ist z. B. für eine stark angestrengte nicht expandirende Lokomotive zu setzen:

$$v = 2\cdot3 \quad \frac{l_1}{l} = 1 \quad m = 0\cdot05 \quad p = 5 \times 10330 \quad \alpha + \beta p = 2\cdot58$$

demnach:

$$2 v \left(\frac{l_1}{l} + m\right)(\alpha + \beta p) = 11$$

Für diese Lokomotive wird also vermöge (18)

$$\frac{F}{O} = 11 (22 + 145 \mathfrak{p})$$

und hieraus folgt:

$$\mathfrak{p} = \frac{\frac{1}{11}\frac{F}{O} - 22}{145}$$

Für $\frac{F}{O} = 730$ wird $\mathfrak{p} = 0\cdot32$. Für $\frac{F}{O} = 900$ wird $\mathfrak{p} = 0\cdot41$. Die Heizkraft der Koks ist 7000 Wärmeeinheiten, und da die Lokomotivkessel mit siedendem Wasser gespeist werden, so erfordert die Bildung von 1 Kilogr. Dampf höchstens 550 Wärmeeinheiten, müsste man also, wenn $\mathfrak{p} = 1$ wäre, mit 1 Kilogr. Koks $\frac{7000}{550} = 13$ Kilogramm Dampf bilden können, man erhält also, wenn $\mathfrak{p} = 0\cdot32$ ist, mit 1 Kilogr. Koks $13 \times 0\cdot32 = 4.16$ und wenn $\mathfrak{p} = 0\cdot4$ ist, $13 \times 0\cdot4 = 5\cdot2$ Kilogr. Dampf. Es sind also selbst die englischen Lokomotivkessel für die zu erzeugenden Dampfmengen noch immer klein; daher wollen wir zur Bestimmung der Heizfläche folgende Regeln aufstellen:

1) Wenn die Kolbengeschwindigkeit einer nicht expandirenden Maschine ungefähr 2·3 Meter und die Dampfspannung ungefähr 5 Atmosphären betragen soll, soll die Heizfläche des Kessels 900 Mal so gross genommen werden, als der Querschnitt eines Dampfcylinders.

2) Für eine expandirende Lokomotive ist die totale Heizfläche des Kessels durch folgende Formel zu berechnen.

$$F = (22 + 145 \mathfrak{p})\, 2 v O \left(\frac{l_1}{l} + m\right)(\alpha + \beta p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und es ist darin zu setzen v in der Regel $= 2\cdot3$, p in der Regel $= 6 \times 10320 = 61980$ $\frac{l_1}{l}$ wenigstens $= 0\cdot5$ $\quad m = 0\cdot05$ $\quad \mathfrak{p}$ wenigstens $0\cdot41$.

Zur Bestimmung der Heizfläche F_1 der Feuerbüchse, der Rostfläche R und der Summen Ω der Querschnitte aller Röhren stellen wir folgende den Thatsachen der Wirklichkeit entnommene Regeln auf.

3) Verhältniss $\frac{F_1}{F}$ zwischen der Heizfläche der Feuerbüchse und der totalen Heizfläche des Kessels:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{1}{13\cdot5} = 0\cdot074$$

4) Verhältniss $\frac{R}{F}$ zwischen der Rostfläche und der totalen Heizfläche des Kessels:

$$\frac{R}{F} = \frac{1}{80} = 0{\cdot}013$$

5) Verhältniss $\frac{\Omega}{F}$ zwischen der Summe der Querschnitte aller Röhren und der totalen Heizfläche:

$$\frac{\Omega}{F} = \frac{1}{371} = 0{\cdot}00269$$

Die angemessenen Construktionsverhältnisse für die verschiedenen Detailabmessungen der Kessel findet man in der am Schlusse dieses Abschnittes folgenden Tabelle zusammengestellt.

Querschnitte der Oeffnung des Regulators, der Dampfkanäle an den Cylindern, der Blasrohröffnung.

Es ist der Natur der Sache angemessen, diese Querschnitte der Dampfmenge, die in einer Sekunde auf die Maschine wirkt, proportional zu machen; da aber diese Dampfmenge der Heizfläche proportional ist, so ist es eben so richtig, wenn man jene Querschnitte der Heizfläche proportional macht.

Die thatsächlichen Verhältnisse zwischen diesen Querschnitten und der Heizfläche sind folgende:

1) Verhältniss zwischen dem Querschnitt der Regulatoröffnung und der totalen Heizfläche:

$$\frac{1}{7000} = 0{\cdot}000143$$

2) Verhältniss zwischen dem Querschnitt eines Dampfkanales und der totalen Heizfläche:

$$\frac{1}{7570} = 0{\cdot}000132$$

3) Verhältniss zwischen dem Querschnitt der Mündung des Blasrohres und der totalen Heizfläche.

a) Für den grössten Querschnitt der Mündung $\frac{1}{7800} = 0{\cdot}000128$

b) Für den kleinsten Querschnitt der Mündung $\frac{1}{36660} = 0{\cdot}0000273$

Position und Belastung der Axen.

Für eine zu construirende Lokomotive sind die Pressungen der einzelnen Laufwerke gegen die Bahn und sind auch immer die Positionen einzelner Axen gegeben, und müssen die Positionen der übrigen Axen bestimmt werden. Wir wollen nun zeigen, wie diess bei den drei Lokomotiven, die wir als Muster aufgestellt haben, geschehen kann; dabei ist zu berücksichtigen, dass das Gewicht eines Laufwerkes (einer Axe und der daran

befestigten Räder) gefunden wird, wenn man die Belastung der Axe mit 0·36 multiplizirt. Der Druck der Räder eines Laufwerkes gegen die Bahn ist demnach 1·36 Mal die Belastung der Axe. Es sei nun für unsere Personenzuglokomotive (Fig. 27) $\mathfrak{P}_1$ der Druck der zwei Triebräder, $\mathfrak{P}_3$ der Druck der 4 Laufräder des vorderen Laufwerkes gegen die Bahn, Δ_1 der horizontale Abstand der Triebaxe von dem Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues, Δ_3 der Horizontalabstand des Mittelpunktes des vorderen vierrädrigen Laufwerkes von jenem Schwerpunkt. Diess voraussgesetzt, sind vermöge obiger Bemerkung annähernd $\frac{\mathfrak{P}_1}{1\cdot36}$ $\frac{\mathfrak{P}_3}{1\cdot36}$ die Belastungen der Triebaxe und des vorderen Laufwerkes; man hat daher:

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{1\cdot36}\,\Delta_1 = \frac{\mathfrak{P}_3}{1\cdot36}\,\Delta_3$$

und hieraus folgt:

$$\Delta_3 = \Delta_1\,\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Diese Gleichung bestimmt die Position des Mittelpunktes des vorderen Laufwerkes, wenn Δ_1 $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ bekannt sind. Die Pressungen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ werden jederzeit vorgeschrieben, sind also als bekannte Grössen anzusehen. Um Δ_1 ganz genau zu bestimmen, bleibt nichts anderes übrig, als den ganzen auf den Federn liegenden Bau mit allen construktiven Details aufzuzeichnen, die Gewichte aller Theile zu berechnen, und dann die Position des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues nach den bekannten statischen Regeln zu berechnen. Der Horizontalabstand dieses Schwerpunktes von dem Ort, an welchem man die Triebaxe anbringen will, gibt endlich den Werth von Δ_1. Bei den von *Crampton* erbauten Lokomotiven ist $\mathfrak{P}_1 = 0\cdot44\,\mathrm{L}$ und $\mathfrak{P}_3 = 0\cdot56\,\mathrm{L}$, wobei L das Gewicht der Lokomotive mit ihrer Wasserfüllung bedeutet. Für diese Lokomotive ist also $\Delta_3 = \Delta_1 \times \frac{0\cdot44\,\mathrm{L}}{0\cdot56\,\mathrm{L}} = 0\cdot786\,\Delta_1$. Es wäre zu wünschen, den Druck $\mathfrak{P}_1$ der Triebräder gegen die Bahn möglichst gross annehmen zu können, weil von diesem Druck die Zugkraft abhängt, welche die Lokomotive, ohne zu glitschen, auszuüben im Stande ist; allein grösser als $0\cdot44\,\mathrm{L}$ kann man diesen Druck nicht wohl annehmen, weil sonst der Radstand $\Delta_1 + \Delta_3$ zu gross ausfiele, dass die Drehscheiben einen ganz unverhältnissmässigen Durchmesser erhalten müssten.

Die Position des vorderen vierrädrigen Laufwerkes einer Güterlokomotive von der Construktion (Fig. 29) wird auf ähnliche Weise bestimmt.

Wir wollen annehmen, dass jedes der vier Triebräder und auch jedes der vier Laufräder gleich stark belastet werden sollen, denn es ist kein Grund vorhanden, eine Ungleichheit in der Belastung der einen oder der andern Räder anzunehmen.

Nennen wir $\mathfrak{P}_1$ die Summe der Pressungen der vier Triebräder gegen die Bahn, $\mathfrak{P}_3$ die Summe der Pressungen der vier Laufräder gegen die Bahn, Δ_1 den Horizontalabstand des Schwerpunktes des auf den Federn liegenden Baues von einer Linie, die von den beiden Triebaxen gleich weit absteht, Δ_3 den Horizontalabstand jenes Schwerpunktes von dem Mittelpunkt des vorderen Laufwerkes, so hat man auch hier zur Bestimmung von Δ_3 die Gleichung:

$$\Delta_3 = \Delta_1\,\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Bei den württembergischen Maschinen ist wie bei der Lokomotive von *Crampton* $\mathfrak{P}_1 = 0\cdot44\,\mathrm{L}$ $\mathfrak{P}_3 = 0.56\,\mathrm{L}$, demnach $\Delta_3 = 0\cdot786\,\Delta_1$ und es ist auch hier nicht möglich $\mathfrak{P}_1$

grösser als 0·44 L anzunehmen, weil der Radstand eine für die Construktion der Drehscheiben unverhältnissmässige Grösse erhielte.

Für eine Güterlokomotive mit sechs gleich grossen gekuppelten Rädern nach der (Fig. 23) dargestellten Bauart, wird die Position der Axen auf folgende Art bestimmt. Die Axe des hintersten Laufwerkes kommt ganz in die Nähe der vordern Wand der Umhüllung der Feuerbüchse zu liegen. Die Position der vordersten Axe wird theils durch den totalen Radstand, den man hervorbringen will, theils durch die Länge der Lokomotive und den Raum, welchen die Cylinder einnehmen, bestimmt. Die Horizontalabstände dieser Axen von dem Schwerpunkt des auf den Federn liegenden Baues sind also als gegebene Grössen anzusehen, oder müssen aus der Zeichnung entnommen werden, nachdem man die Position des Schwerpunktes bestimmt hat. Es bleibt also uur noch übrig, die Position der mittleren Axe zu bestimmen. Benehmen wir uns so, wie wenn diese hinter den Schwerpunkt fiele und nennen Δ_2 den Horizontalabstand vom Schwerpunkt, $\mathfrak{P}_1\ \mathfrak{P}_2\ \mathfrak{P}_3$ die Pressungen der drei Laufwerke gegen die Bahn, so sind annähernd $\frac{\mathfrak{P}_1}{1\cdot36}\ \frac{\mathfrak{P}_2}{1\cdot36}\ \frac{\mathfrak{P}_3}{1\cdot36}$ die Belastungen der drei Axen; man hat daher:

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{1\cdot36}\Delta_1 + \frac{\mathfrak{P}_2}{1\cdot36}\Delta_2 = \frac{\mathfrak{P}_3}{1\cdot36}\Delta_3$$

oder

$$\mathfrak{P}_2\,\Delta_2 = \mathfrak{P}_3\,\Delta_3 - \mathfrak{P}_1\,\Delta_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Auch ist:

$$\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 = \mathrm{L} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Da bei dieser Disposition der totale Radstand $\Delta_1 + \Delta_3$ im Verhältniss zur Länge des ganzen Lokomotivbaues klein ausfällt, so muss man sich gegen das Nicken theils durch lange Schubstangen, theils durch eine möglichst starke Belastung der Vorder- und Hinteraxe zu schützen suchen. Man wird also diese Axen so stark belasten, als es der Durchmesser der Räder erlaubt; es ist aber kein Grund vorhanden, die Pressungen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ ungleich anzunehmen. Hat man $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ angenommen, so bestimmt man $\mathfrak{P}_2$ aus (23) und dann findet man:

$$\Delta_2 = \frac{\mathfrak{P}_3\,\Delta_3 - \mathfrak{P}_1\,\Delta_1}{\mathfrak{P}_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Fällt Δ_2 negativ aus, so liegt die mittlere Axe vor dem Schwerpunkt.

Es kann aber auch geschehen, dass die Position der mittleren Axe durch die Position der beiden andern Axen bereits bestimmt ist. Diess ist der Fall, wenn man, um bei einem gegebenen Radstand möglichst grosse Räder anwenden zu können, sie so nahe als möglich aneinanderstellt, so dass zwischen je zwei der aufeinander folgenden Räder nur noch ein kleiner Zwischenraum übrig bleibt. Dann sind die äussersten Axen von der mittleren gleich weit entfernt; man hat daher:

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \Delta_3 + \Delta_2 \text{ oder } \Delta_2 = \frac{\Delta_1 - \Delta_3}{2}$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit (22) und (23) folgt dann:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_3 &= \mathrm{L}\,\frac{\Delta_1 - \Delta_3}{\Delta_1 + \Delta_3} + \mathfrak{P}_1 \\ \mathfrak{P}_2 &= \mathrm{L}\,\frac{2\,\Delta_3}{\Delta_1 + \Delta_3} - 2\,\mathfrak{P}_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

In diesem Falle ist also nur eine der drei Pressungen $\mathfrak{P}_1\ \mathfrak{P}_2\ \mathfrak{P}_3$ willkürlich, die beiden andern werden durch die Gleichungen (25) bestimmt. Sollte es sich fügen, dass $\Delta_1 = \Delta_3$ wäre, so wird $\mathfrak{P}_3 = \mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2 = L - 2\,\mathfrak{P}_1$. Ist $\Delta_1 > \Delta_3$, d. h. liegt der Schwerpunkt der hintern Axe näher, als der vordern, so wird $\mathfrak{P}_3 > \mathfrak{P}_1$, d. h. so wird der Druck auf die vorderste Axe grösser, als auf die hinterste Axe. Ist $\Delta_3 > \Delta_1$, so wird $\mathfrak{P}_3 < \mathfrak{P}_1$.

Zusammenhängung von Wagen, deren Radstände nicht gleich groß sind.

Nennt man (Fig. 42) $2\,\Delta$ und $2\,\Delta_1$ die Radstände der zusammen zu hängenden Wagen $AC = x$, $BC = x_1$ die Entfernungen des richtigen Zusammenhängungs-Punktes von den Mittelpunkten der Wagen, $x + x_1 = \delta$ die Entfernung der Mittelpunkte der Wagen wenn dieselben auf einer geraden Bahn stehen, so ist vermöge Gleichung (3) (Seite 21):

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\delta}{2} - \frac{\Delta_1^2 - \Delta^2}{2\,\delta} \\ x_1 &= \frac{\delta}{2} + \frac{\Delta_1^2 - \Delta^2}{2\,\delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

Bisweilen ist es angemessen $\Delta\ \Delta_1\ x_1$ anzunehmen und δ so wie x zu berechnen. Man findet:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= x_1 + \sqrt{x_1^2 + \Delta^2 - \Delta_1^2} \\ x &= \delta - x_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

Diese Regeln müssen insbesondere berücksichtigt werden, um die richtige Zusammenhängung des Tenders mit der Lokomotive zu finden.

Die Federwerke.

Die Schienen eines Federwerkes sollen im belasteten Zustand desselben vollständig übereinstimmende Krümmungen haben, so zwar, dass jede Schiene von den benachbarten Schienen der ganzen Ausdehnung nach berührt wird; auch sollen alle Schienen in der Mitte, wo sie am stärksten in Anspruch genommen sind, gleich stark in Anspruch genommen sein, so dass die Wahrscheinlichkeit eines Bruches für alle Schienen des Federwerkes gleich gross ist.

Federwerke, welche diese Eigenschaften haben, erhält man, wenn man sich an folgende Regeln hält. Es sei (Fig. 71):

$2\,l_1$ die ganze Länge des Federwerkes, oder die Länge der längsten Schiene;

$2\,P_1$ die Belastung des Federwerkes;

δ_1 die Metalldicke jeder Schiene des Federwerkes, die nothwendig für alle Schienen gleich sein muss, wenn das Federwerk die Eigenschaften besitzen soll, welche wir von demselben fordern;

n die Anzahl der Schienen des Federwerkes;

ε den Modulus der Elastizität des Materials der Schienen;

$\mathfrak{Z}_1$ die Intensität der Spannung, oder die auf die Flächeneinheit bezogene Spannung,

welche in jeder Schiene in der Mitte des Federwerkes eintreten darf, wenn dieselbe mit $2P_1$ belastet ist;

b die Breite jeder Schiene des Federwerkes;

γ eine Zahl, die gleich oder grösser als Eins und selbst unendlich gross genommen werden kann;

$2l_k$ die Länge der k^{ten} Schiene des Federwerkes von der längsten Schiene nach der kürzesten hin gezählt. Für die längste Schiene ist $k=1$, für die kürzeste $k=n$;

R der Halbmesser, nach welchem im unbelasteten Zustand des Federwerkes die längste Schiene gekrümmt ist. Wir nehmen an, dass auch im unbelasteten Zustand alle Schienen so aufeinander passen, dass jede von den benachbarten der ganzen Ausdehnung nach berührt wird.

f_1 die Entfernung des Mittelpunktes der längsten Schiene von den Verbindungslinien der Endpunkte dieser Schiene im unbelasteten Zustand des Federwerkes;

f die Senkung des Federwerkes durch die Belastung oder die durch die Belastung $2P_1$ entstehende Aenderung des Abstandes f.

Diess vorausgesetzt, erhält man Federwerke, welche die oben verlangten Eigenschaften besitzen, wenn man folgenden Gleichungen genügt:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{\mathfrak{S}_1 l_1^2}{\varepsilon \delta_1}\left(1 - \frac{1}{3\gamma}\right) \\ P_1 l_1 &= \frac{n \mathfrak{S}_1 b \delta_1^2}{6} \\ l_k &= l_1 \frac{1 - \frac{k-1}{n}}{1 - \frac{k-1}{n}\frac{1}{\gamma}} \\ R &= \frac{l_1^2}{2 f_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Setzt man die innerhalb 1 und ∞ willkürliche Grösse γ gleich 1, so wird $l_k = l_1$, d. h. man erhält ein Federwerk mit durchaus gleich langen Schienen. Setzt man $\gamma = \infty$, so erhält man ein Federwerk, in welchem die Längenunterschiede je zweier unmittelbar auf einander folgenden Schienen gleich gross sind, und dieses Federwerk besitzt die Eigenschaften, dass es im belasteten Zustand überall gleich stark in Anspruch genommen ist, demnach eine Körpermasse von gleicher statischer Festigkeit bildet. Wir wollen ein solches Federwerk ein Trapez-Federwerk nennen, weil seine Grundform, wenn die Schienen im ungebogenen Zustand aufeinander gelegt werden, ein Trapez bildet.

Setzt man zu den Gleichungen $\gamma = \infty$, so erhält man zur Bestimmung eines Trapez-Federwerkes folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\mathfrak{S}_1 l_1^2}{\varepsilon f} \\ n &= \frac{6 P_1 l_1}{\mathfrak{S}_1 l \delta_1^2} \\ R &= \frac{l_1^2}{2 f_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

Die erste derselben gibt die Dicke jeder Schiene, die zweite die Anzahl der Schienen, die dritte den Krümmungshalbmesser, der dem unbelasteten Zustand entspricht. Nehmen wir den Centimeter als Längeneinheit, den Quadratcentimeter als Flächeneinheit und drücken die Belastungen $2P_1$ in Kilogrammen aus, so ist nach den (Seite 215) angegebenen Erläuterungen in diese Formeln zu setzen:

Modulus der Elastizität des Federstahles $\varepsilon = 2000000$
Senkung der Federenden durch die Belastung $f = 5$ Centimeter
Intensität der Spannung per 1 Quadratcentimeter $\mathfrak{S}_1 = 4400$
Pfeilhöhe der unbelasteten Feder $f_1 = 10$

Trapez-Federwerke von gleicher Festigkeit, deren Schienen eine constante Dicke und eine constante Breite haben.

Die Lokomotivfedern haben alle fast einerlei Länge und Breite. Die erstere beträgt im Mittel $2l_1 = 96$ Centimeter, die letztere $b = 9$ Centimeter.

Setzen wir in die Gleichungen (29):

$$\varepsilon = 2000000 \quad f = 5 \quad \mathfrak{S} = 4400 \quad \frac{f_1}{f} = 2 \quad l_1 = 48 \quad b = 9$$

so finden wir:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = 1 \text{ Centimeter.} \\ R = 115 \text{ „} \\ P_1 = 137\,n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

für $n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
wird $P_1 =$	1370	1507	1644	1781	1918	2055	2192	2329	2466	2603	2740

Diese Regeln für die Construktion der Federwerke erleichtert die Anfertigung derselben im Grossen, weil die Schienen eine gleiche Dicke und Breite haben.

Die Endstücke der Schienen sind nach kubischen Parabeln zuzuspitzen.

Geometrisch ähnliche Trapez-Federwerke von gleicher Festigkeit.

Man kann auch von der Voraussetzung ausgehen, dass die Hauptdimensionen Länge $2l_1$, Breite b und Höhe $n\delta_1$ des Federwerkes in einem constanten Verhältniss zu einander stehen sollen. Diese Annahme ist insbesondere für sehr starke Federwerke eine angemessene. Setzen wir:

$$\varepsilon = 2000000 \quad \mathfrak{S} = 4400 \quad f = 5 \quad f_1 = 10 \quad \frac{b}{l_1} = 0{\cdot}2 \quad \frac{n\delta_1}{l_1} = 0{\cdot}335$$

so folgt aus den Gleichungen (29):

$$\left.\begin{array}{l} l_1 = \dfrac{762}{n} \\[2ex] \delta_1 = \dfrac{254}{n^2} \\[2ex] P_1 = \dfrac{9462346}{n^3} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Diese Formeln geben folgende numerische Resultate:

n	P_1	l_1	δ_1	b	$n\delta_1$
10	9462	76	2·54	15·24	25·4
11	7109	69	2·10	13·84	23·1
12	5476	64	1·76	14·70	21·1
13	4307	59	1·50	11·72	19·5
14	3447	54	1·29	10·88	18·1
15	2804	51	1·12	10·16	16·8
16	2310	48	1·00	9·52	16·0
17	1925	45	0·88	8·96	15 0
18	1794	42	0·78	8·46	14·0
19	1379	40	0·70	8·02	13·3
20	1182	38	0·63	7·62	12·6

Die Enden der Schienen sind nach kubischen Parabeln zuzuspitzen.

Hyperbel-Federwerke.

Bei allen Federwerken, welche die Gleichungen (28) liefern, wenn man γ weder gleich Eins, noch gleich unendlich setzt, sind die Endstücken der Schienen von ungleicher Länge, und wenn man die Schienen im ungebogenen Zustand aufeinander schichtet, so liegen die Endpunkte in zwei congruenten in der Mitte sich durchschneidenden Hyperbeln.

Setzen wir in die Gleichungen (28):

$$\varepsilon = 2000000 \qquad \mathfrak{Z}_1 = 4400 \qquad f = 5 \qquad l_1 = 48 \qquad b = 9 \qquad f_1 = 10 \qquad \gamma = \frac{3}{2}$$

so findet man:

$$\delta_1 = 0{\cdot}788 \text{ Centimeter.}$$

$$P_1 = 85{\cdot}4\, n \text{ Kilogr.}$$

$$R = 115 \text{ Centimeter.}$$

$$l_k = 48 \; \frac{3n + 3 - 3k}{3n + 2 - 2k}$$

Die folgende Tabelle enthält die Resultate, welche diese Formeln liefern.

Die Endstücke der Schienen sollen nach kubischen Parabeln zugespitzt werden.

Anzahl der Schienen n.	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P_1 halbe Belastung des Federwerks.	854	939	1025	1110	1195	1281	1366	1451	1537	1623	1708
Halbe Länge der Schienen der Federwerke in Centimetern.											
l_1	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48
l_2	46·3	46·4	46·4	46·7	46·8	46·9	46·9	47·0	47·0	47·1	47·1
l_3	44·3	44·7	45·0	45·2	45·5	45·6	45.8	45·9	46·1	46·2	46·2
l_4	42·0	42·5	43·2	43·6	44·0	44·3	44·5	44·8	45.0	45·2	45·3
l_5	39·2	40·3	41·1	41·8	42·3	42·8	43.2	43·5	43·8	44·1	44·3
l_6	36·0	37·5	38·8	39·7	40·5	41·1	41·7	42·1	42·5	42·9	43·2
l_7	32·0	32·8	36·0	37.3	38·4	39·2	40·0	40·6	41·1	41·6	42·0
l_8	27·0	30·3	32·7	34·5	36·0	36·3	38·1	38·9	39·6	40·2	40·7
l_9	20·6	25·4	28·8	31·3	33·2	34·7	35·0	37·9	37·8	38·6	39·2
l_{10}	12.0	19·2	24·0	27·4	30·0	32·0	33·6	34·9	36·0	36·9	37·7
l_{11}		11·0	18·0	22·7	26·1	28·8	30·8	32·5	33·8	35·0	36·0
l_{12}			10·3	16·3	21·6	25·0	27·7	29·8	31·5	32·9	34·1
l_{13}				9·6	16·0	20·6	24·0	26·6	28·8	30·5	32·0
l_{14}					9·0	15·1	19·6	23·0	25·7	27·8	29·6
l_{15}						8·5	14·4	18·8	22·1	24·8	27.0
l_{16}							8·0	13·7	18·0	21·3	24·0
l_{17}								7·6	13·1	17·2	20·5
l_{18}									7·2	12·5	16·7
l_{19}										6·8	12·0
l_{20}											6·5

Aeußere Axenzapfen für Lauf- und Triebaxen.

Die Zapfen der Wagenaxen und Lokomotivaxen erhalten Dimensionen, die eine genügende Festigkeit, und auch gegen das Abnützen und Warmlaufen hinreichenden Schutz gewähren, wenn man sie nach den (Seite 231) aufgestellten Formeln

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{0{\cdot}001\ Q\ (17 + n\,d)}{d} \\ Q &= \frac{243}{\sqrt{17 + n\,d}}\, d^2 \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

berechnet. In diesen Formeln bedeutet Q die Belastung des Zapfens in Kilogr., n die Anzahl der Umdrehungen des Zapfens in 1 Sekunde, d den Durchmesser des Zapfens in Centimetern, l die Länge des Zapfens in Centimetern. Die Resultate, welche diese Formeln liefern, sind in folgender Tabelle zusammengestellt. In den Feldern, welche

zwei Zahlen enthalten, bedeuten die oberen Zahlen die Zapfenbelastungen in Kilogr., die unteren Zahlen die Zapfenlängen in Centimetern.

Für einen Wagenzapfen, der in einer Sekunde sechs Umdrehungen macht und mit 1929 Kilogr. belastet ist, gibt die Tabelle einen Durchmesser von 8 und eine Länge von 15·7 Centimetern.

Für einen Lokomotivaxen-Zapfen, der in einer Sekunde drei Umdrehungen macht und mit 2969 Kilogr. belastet ist, gibt die Tabelle einen Durchmesser von 9 Centimetern und eine Länge von 14·5 Centimetern.

Axen-Zapfen von Schmiedeeisen.

Durchmesser in Centimeter.	Belastung der Zapfen in Kilogrammen. und Länge der Zapfen in Centimeter.						
	Umdrehungen des Zapfens in einer Sekunde.						
	0	1	2	3	4	5	6
2	284 2	269 2·5	256 2·68	244 2·8	234 2·9	225 3·0	218 3·16
3	530 3	489 3·3	456 3·5	428 3·7	407 3·9	386 4·1	369 4·2
4	895 4	805 4·2	737 4·6	685 4·9	642 5·3	606 5·6	576 5·9
5	1474 5	1295 5·7	1170 6·3	1073 6·8	1000 7·4	937 7·9	886 8·3
6	2113 6	1826 7·0	1626 7·8	1477 8·6	1367 9·3	1275 10·0	1201 10·6
7	2880 7	2435 8·3	2141 9·5	1933 10·5	1774 11·4	1651 12·3	1550 13·0
8	3774 8	3104 9·7	2709 11·1	2430 12·5	2221 13·6	2059 14·6	1929 15·7
9	4777 9	3859 11·1	3330 13·0	2969 14·5	2703 15·9	2501 17·2	2337 18·4
10	5898 10	4681 12·6	3996 14·8	3542 16·6	3218 18·3	2970 19·9	2770 21·3
11	7136 11	5558 14·1	4711 16·7	4158 18·6	3765 20 8	3467 22·6	3227 24·3
12	8493 12	6504 15·7	5467 18·8	4806 21·2	4341 23·5	3990 25·6	3710 27·5
13	9967 13	7494 17·3	6260 20·7	5490 23·6	4941 26·2	4507 28·0	4212 30·8
14	11560 14	8566 18·9	7098 22·8	6201 28·1	5577 29·0	5110 31·8	4739 34·1
15	13272 15	9659 20·6	8116 25·4	6947 28·7	6234 31·9	5701 35·0	5287 37·7
16	15098 16	10837 22·3	8744 26·7	7718 31·3	6866 34·7	6312 38·2	5852 41·3

Kurbelzapfen von Stahl.

Die Kurbelzapfen, welche in die Naben der Triebräder eingesetzt werden, können, damit sie möglichst schwache Dimensionen erhalten, von Stahl gemacht werden. Zur Bestimmung ihrer Durchmesser d und Länge l hat man die Formel:

$$d = l = 0{\cdot}09 \sqrt{Q}$$

wobei Q den Druck in Kilogrammen bedeutet, der gegen den Zapfen ausgeübt wird. Die Raumverhältnisse gestatten es in der Regel nicht, derlei Zapfen länger als den Durchmesser zu machen.

Stärke der Axen.

A) Axe eines Laufwerkes für einen Wagen oder für eine Lokomotive mit äusseren Zapfen (Fig. 62).

Nennt man Q die Belastung des Zapfens in Kilogr., l_1 den Abstand vom Mittel des Zapfens bis zum Mittel des Rades, d den Durchmesser des äusseren Zapfens, d_1 den Durchmesser der Axe in ihrer Mitte, d_2 den Durchmesser der Axe in der Nähe der Nabe, l die Länge des äusseren Zapfens, so ist zu nehmen;

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= d \sqrt[3]{\frac{2\, l_1}{l}} \\ d_2 &= 1{\cdot}1\, d_1 \end{aligned}\right\} \text{Centimeter,}$$

wobei d und l aus der Tabelle (Seite 304) zu nehmen ist.

B) Laufaxe oder Triebaxe einer Lokomotive mit äussern Cylindern und inneren Rahmen (Fig. 63).

Nennt man Q die Belastung in Kilogr. eines Axenhalses, d den Durchmesser, l die Länge des Halses, d_1 den Durchmesser der Axe in der Mitte, l_1 den Abstand vom Mittel des Halses bis zum Mittel des Rades, so hat man:

$$d = d_1 = l = 0{\cdot}32 \sqrt[3]{Q\, l_1}$$

C) Triebaxe mit inneren Kurbeln für Maschinen mit innen liegenden Cylindern und mit inneren Rahmen. (Fig. 64)

Nennt man Q die Belastung eines Axenhalses, P den Druck gegen einen Kurbelzapfen, l_1 den Abstand vom Mittel eines Axenhalses bis zum Mittel eines Rades, l_2 den Abstand vom Mittel eines Axenhalses bis zum Mittel der nebenan befindlichen Kurbel, d den Durchmesser eines Kurbelzapfens, d_2 den Durchmesser der Axe in der Mitte, r den Kurbelhalbmesser, so hat man zunächst:

$$d = d_2 = 0{\cdot}32 \sqrt[3]{Q\, l_1} \sqrt[6]{1 + \left(\frac{P\, l_2}{Q\, l_1}\right)^2}$$

Um den Durchmesser des Axenhalses zu finden, berechne man die Werthe der zwei Ausdrücke:

$$0{\cdot}32\,\sqrt[3]{Q\,l_1} \text{ und } 0{\cdot}335\,\sqrt[3]{P\,r}$$

und nehme den Durchmesser des Axenhalses gleich dem grösseren dieser zwei Werthe.

Balanzirungsgewichte, welche das Bucken und Schlingern verhindern.

Die störenden Bewegungen, welche durch die hin- und hergehenden Massen verursacht werden, können durch rotirende Massen vollständig aufgehoben werden. Die Gewichte und Positionen dieser Massen werden auf folgende Weise bestimmt.

Nennt man:

S die Summe der Gewichte eines Kolbens, einer Kolbenstange und einer Schubstange;

r den Halbmesser einer Triebkurbel;

q das Gewicht der Theile, welche eine Triebkurbel bilden;

ϱ den Abstand des Schwerpunktes von q vom Mittel der Triebaxe;

S_1 das Gewicht der auf einer Seite der Maschine befindlichen Kupplungsstangen. Für eine Maschine mit nicht gekuppelten Rädern ist $S_1 = 0$ zu setzen;

r_1 den Halbmesser einer Kupplungskurbel; hat die Maschine äussere Cylinder und gekuppelte Räder, so ist $r_1 = r$;

q_1 die Summe der Gewichte aller an einer Seite der Lokomotive befindlichen Kupplungskurbeln. Werden die Kupplungskurbeln durch Zapfen gebildet, die in die Naben der Räder gesteckt werden, so sind für q_1 nur die Gewichte der über die Naben hervorragenden Theile in Rechnung zu bringen. Hat die Maschine äussere Cylinder und gekuppelte Räder, so ist $q = 0$ zu setzen;

ϱ_1 den Abstand des Schwerpunktes einer Kupplungskurbel vom Mittel einer Axe;

Q die Summe der Gewichte der Balanzirungs-Massen, mit welchen die an einer Seite der Lokomotive befindlichen Räder versehen werden müssen.

ϱ_2 den Abstand des Schwerpunktes eines Balanzirungsgewichts vom Mittel der Axe;

γ den Winkel, durch welchen die Positionen der Balanzirungsgewichte auf folgende Weise bestimmt werden. Es sei (Fig. 44) O die Axe, an welcher sich die Triebkurbeln befinden, $O\,b$ die Triebkurbel der vordern (äusseren oder innen liegenden) Maschine, $O\,c$ die Triebkurbel der hinteren Maschine, Wir benehmen uns zunächst so, wie wenn der Schwerpunkt der Balanzirungsgewichte in den Quadranten $x\,O\,y$ fiele, der durch die Verlängerung der Richtungen der Triebkurbeln gebildet wird; und nehmen an, A sei die Position des Schwerpunktes des Balanzirungsgewichtes am vordern Rad, B die Position des Schwerpunktes des Balanzirungsgewichtes am hintern Rad. Dann ist Winkel $A\,O\,x =$ Winkel $B\,O\,y = \gamma$.

Ist einmal der Winkel γ (der nach Umständen jeden beliebigen zwischen 0 und 360° liegenden Werth haben kann) bekannt, so findet man die Richtungen der Radien $O\,A$ und $A\,B$, in welchen die Schwerpunkte der Balanzirungsgewichte liegen sollen, wenn man γ einmal von $O\,x$ ausgehend nach der rechten Drehungsrichtung und dann von $O\,y$ ausgehend nach der linken Drehungsrichtung aufträgt.

Wir nennen ferner noch:

$2\,e$ die Entfernung der Axen der Cylinder der Maschinen;

$2\,e_2$ die Entfernung der Mittelpunkte der an einer Axe befindlichen Räder;

$2\,e_1$ den Abstand der Kupplungsstange an der vordern Seite der Lokomotive von der Kupplungsstange an der hintern Seite der Lokomotive.

Diess vorausgesetzt hat man zur Bestimmung von Q und γ folgende Regeln:

A) Lokomotive mit nur zwei Triebrädern und mit innen oder aussen liegenden Cylindern.

In diesem Falle ist:

$$Q = \frac{S r + q \varrho}{\varrho_2} \sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e}{e_2}\right)^2\right]}$$

$$\sin.\gamma = \frac{q\varrho + S r}{2 \varrho_2 Q}\left(1 - \frac{e}{e_2}\right)$$

$$\cos.\gamma = \frac{q\varrho + S r}{2 \varrho_2 Q}\left(1 + \frac{e}{e_2}\right)$$

Wenn die Cylinder innen liegen ist $\frac{e}{e_2} < 1$, wird also sowohl $\sin.\gamma$, als auch $\cos.\gamma$ positiv, kommen also die Balanzirungsgewichte so zu liegen, wie (Fig. 49_a) zeigt.

Wenn die Cylinder aussen liegen ist $\frac{e}{e_2} < 1$; wird also $\sin.\gamma$ negativ, $\cos.\gamma$ positiv, kommen also die Balanzirungsgewichte so zu liegen, wie (Fig. 50_b) zeigt.

B) Lokomotive mit aussen liegenden Cylindern und mit gekuppelten Rädern.

In diesem Falle wird:

$$Q = \frac{S r}{\varrho_2} \sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e}{e_2}\right)^2\right] + \left(1 + \frac{e e_1}{e_2^2}\right)\frac{q_1 \varrho_1 + S_1 r}{S r} + \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2\right]\left(\frac{q_1 \varrho_1 + S_1 r}{S r}\right)^3\right\}}$$

$$\sin.\gamma = \frac{1}{2 \varrho_2 Q}\left[S r\left(1 - \frac{e}{e_2}\right) + (q_1 \varrho_1 + S_1 r)\left(1 - \frac{e_1}{e_2}\right)\right]$$

$$\cos.\gamma = \frac{1}{2 \varrho_2 Q}\left[S r\left(1 + \frac{e}{e_2}\right) + (q_1 \varrho_1 + S_1 r)\left(1 + \frac{e_1}{e_2}\right)\right]$$

In diesem Falle ist $e > e_1 > e_2$, wird also $\sin.\gamma$ negativ, $\cos.\gamma$ positiv, fällt also γ in den vierten Quadranten, kommen die Gewichte so zu liegen, wie (Fig. 50_b) zeigt.

C) Lokomotiven mit innen liegenden Cylindern, mit gekuppelten Rädern.

In diesem Falle hat man:

$$Q = \frac{q\varrho + S r}{\varrho_2} \sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e}{e_2}\right)^2\right] \pm \left(1 + \frac{e e_1}{e_2^2}\right)\frac{q_1 \varrho_1 + S_1 r_1}{q\varrho + S r} + \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2\right]\left(\frac{q_1 \varrho_1 + S_1 r_1}{q\varrho + S r}\right)^2\right\}}$$

$$\sin.\gamma = \frac{1}{2 \varrho_2 Q}\left[(q\varrho + S r)\left(1 - \frac{e}{e_2}\right) \pm (q_1 \varrho_1 + S_1 r_1)\left(1 - \frac{e_1}{e_2}\right)\right]$$

$$\cos.\gamma = \frac{1}{2 \varrho_2 Q}\left[(q\varrho + S r)\left(1 + \frac{e}{e_2}\right) \pm (q_1 \varrho_1 + S_1 r_1)\left(1 + \frac{e_1}{e_2}\right)\right]$$

Von den Doppelzeichen sind die oberen, nämlich $+$ zu nehmen, wenn die äusseren Kupplungskurbeln den inneren Triebkurbeln parallel sind und die unteren, nämlich $-$, wenn die äusseren Kupplungskurbeln den inneren Triebkurbeln diametral gegenüber stehen. Das letztere soll jederzeit der Fall sein, damit die Balanzirungs-Gewichte nicht

zu gross ausfallen. Die Fig. (49), (50) zeigen die Positionen der Balanzirungsgewichte in folgenden 4 Fällen:

Wenn $\sin.\gamma$	und $\cos.\gamma$	gilt (Fig.)
+	+	49_a
+	−	49_b
−	−	50_a
−	+	50_b

Der in diesen vier Figuren angegebene jederzeit spitze Winkel γ_1 ist derjenige, dessen Sinus und Cosinus gleich sind dem numerischen Werthe von $\sin.\gamma$ und $\cos.\gamma$.

Metallstärke cylindrischer Gefäße.

Nennt man:

D den inneren Durchmesser des Cylinders, δ die Wanddicke desselben } Centimeter;

n die Anzahl der Atmosphären, welche dem im Innern des Cylinders herrschenden Druck entspricht;

n_1 die Anzahl der Atmosphären, welche dem ausserhalb des Cylinders herrschenden Druck entspricht;

$\mathfrak{A}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung des Materials an der innern Fläche der Wand;

so ist:

$$\mathfrak{A} = \frac{n + (n - 2n_1)\left(\frac{2\delta}{D} + 1\right)^2}{\left(\frac{2\delta}{D} + 1\right)^2 - 1}$$

$$\delta = \frac{D}{2}\left[\sqrt{\frac{\mathfrak{A} + n}{\mathfrak{A} + 2n_1 - n}} - 1\right]$$

Diese Formeln sind genau und gelten für jeden im Innern herrschenden Spannungsgrad. Für nicht zu starke innere Spannungen hat man annähernd:

$$\mathfrak{A} = \frac{D}{2\delta}(n - n_1) + n - 2n_1$$

$$\delta = \frac{D}{2}\,\frac{n - n_1}{\mathfrak{A} + 2n_1 - n}$$

Metallstärke cylindrischer Dampfkessel.

Nennt man:

D den innern Durchmesser eines cylindrischen Dampfkessels, δ die Metalldicke der Kesselwand } Centimeter;

n die Anzahl der Atmosphären, welche der innern Dampfspannung entspricht, so hat man zur Bestimmung von δ folgende Formel:

$$\delta = D\frac{1\cdot315 + 0\cdot495\,n}{363 - n}$$

Diese Formel gibt:

für n =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{\delta}{D}$ =	0·0050	0·0064	0·0077	0·0092	0·0106	0·0120	0·0134	0·0149	0·0163	0·0177

Metallstärke kugelförmiger Gefäße.

Nennt man:

D den innern Durchmesser eines kugelförmigen Gefässes } Centimeter;
δ die Wanddicke desselben }
n die Anzahl der Atmosphären, welche dem im Innern herrschenden Druck entspricht;
n_1 die Anzahl der Atmosphären, welche dem äusseren Druck entspricht;
$\mathfrak{A}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung im Material an der innern Fläche der Gefäswand;

so ist:

$$\mathfrak{A} = \frac{2\,n + (n - 3\,n_1)\left(\frac{2\,\delta}{D} + 1\right)^3}{2\left[\left(\frac{2\,\delta}{D} + 1\right)^3 - 1\right]}$$

$$\delta = \frac{D}{2}\left[\sqrt[3]{\frac{2\,(\mathfrak{A} + n)}{2\,\mathfrak{A} + 3\,n_1 - n}} - 1\right].$$

Diese Formeln sind genau und gelten für jede Spannung im Innern;
Ist die innere Spannung nicht sehr gross, so hat man annähernd:

$$\mathfrak{A} = \frac{D}{4\,\delta}(n - n_1) + \frac{1}{2}(n - 3\,n_1)$$

$$\delta = \frac{D}{2}\,\frac{n - n_1}{2\,\mathfrak{A} + 3\,n_1 - n}$$

Metallstärke kugelförmiger Theile der Dampfkessel.

Nennt man:

D den innern Durchmesser } in Centimetern;
δ die Metalldicke der Wand }
n die Anzahl der Atmosphären, welche der innern Spannung entspricht; so ist:

$$\delta = D\frac{3\cdot125 + 0\cdot495\,n}{725 - n}$$

Diese Formel gibt:

für n =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 Atmosphären
$\frac{\delta}{D}$ =	0·0050	0·0057	0·0064	0·0071	0·0077	0·0085	0·0092	0·0098	0·0105	0·0113

Der Feuer- und der Wasserkasten eines Lokomotivkessels.

Stärke der Wand- und Deckbolzen.

Nennt man:

Ω die Fläche in Quadratcentimetern eines Bolzenfeldes, welches man findet, wenn man die Fläche einer Wand durch die daran vorkommende Anzahl Bolzen dividirt;

n die Anzahl der Atmosphären, welche der Dampfspannung entspricht;

Δ den Durchmesser eines Bolzens in Centimetern; so hat man:

$$\Delta = 0{\cdot}07 \sqrt{(n-1)\Omega}$$

Decke des Feuerkastens.

Nennt man:

δ die Blechdicke der Decke in Centimetern;

e dio Entfernung zweier Bolzen in Centimetern;

n die Anzahl der Atmosphären, welche der Dampfspannung entspricht; so hat man:

$$e = 24 \frac{\delta}{\sqrt{n-1}}$$

Wände des Feuerkastens.

Nennt man:

δ die Blechdicke der Wände des Feuerkastens
e die Entfernung der Bolzen in einer Horizontalreihe
e_1 „ „ „ „ „ „ Vertikalreihe } Centimeter;

B die Breite
L die Länge } des Feuerkastens;

n die Anzahl der Atmosphären, welche der Dampfspannung entspricht; so ist zu nehmen:

$$e = 24 \frac{\delta}{\sqrt{n-1}}$$

$$e_1 = \sqrt{582 \frac{\delta^2}{n-1} + \frac{B\,L\,\delta}{B+L}}$$

Wände des Wasserkastens.

Nennt man:

e die Entfernung zweier Bolzen in einer Horizontalreihe
e_1 „ „ „ „ „ „ Vertikalreihe
δ die Blechdicke der Umfangswände des Wasserkastens
B die Breite
L die Länge } des Feuerkastens;
B_1 die Breite
L_1 die Länge } des Wasserkastens;
} Centimeter;

so hat man zu nehmen:

$$e = \sqrt{582 \frac{\delta^2}{n-1} - (L_1 - L)\,\delta}$$

$$e_1 = \sqrt{582 \frac{\delta^2}{n-1} - \frac{B_1 L_1 \delta}{B_1 + L_1}}$$

Stärke der Deckbarren.

Nennt man:

L die Länge der Barren, i ihre Anzahl
b die Dicke } einer Barre;
h die Höhe }
B die Breite des Feuerkastens
δ die Metalldicke des Deckbleches } Centimeter;
n die Anzahl der Atmosphären, welche der Dampfspannung entspricht:

$$h = \frac{1}{7} L \qquad \delta = \frac{1}{12} h \qquad \frac{i\,b}{B} = 0{\cdot}063\,(n-1)$$

Verbindungen in einem ellyptischen Kessel.

In einem Kessel, dessen Querschnitt ellyptisch, müssen die Wände nach der Richtung der kleinen Axe durch Stangen, oder vermittelst einer durchbrochenen Platte zusammengehängt werden. Die Summe der Querschnitte dieser Verbindungsstangen kann auf folgende Art berechnet werden:

Nennt man:

a die halbe Grösse, b die halbe kleine Axe der Ellypse des Querschnittes,
δ die Metalldicke der Kesselwand,
β die Länge des Kessels, } Centimeter;
$\mathfrak{A}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung, welche in den Verbindungsstangen eintreten darf;
n die Anzahl der Atmosphären, welche der Spannung des Dampfes entspricht;
Ω die Summe der Querschnitte aller Verbindungsstangen in Quadratcentimetern;
so ist:

$$\Omega = \frac{2(n-1)(a-b)a^3 + a\,b\,(n-1)\,\delta^2 - b\,\mathfrak{A}\,\delta^3}{12\,a^3\,\mathfrak{A}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\,b\,\mathfrak{A}\,\delta^3}\;\beta$$

Für $\mathfrak{A}$ darf man den Werth 300 in Rechnung bringen. In der Regel fält Ω sehr klein aus.

Verbindungsstangen in einem Blasenkessel. (Fig. 84.)

Nennt man:

β die Länge des Kessels;

δ die Dicke des Kesselbleches;
r den Halbmesser der Blasenrundung;
b den Abstand des Scheitels der Blase von der Ebene der Verbindungsstangen;
Ω die Summe der Querschnitte aller Verbindungsstangen; so ist zu nehmen:

$$\Omega = 2\beta\delta\frac{b-r}{r}$$

Vernietungen. (Fig. 88.)

Nennt man:
δ die Dicke der Bleche;
d den Durchmesser eines Nietbolzens;
e die Entfernung der Mittel zweier in der Reihe der Nieten unmittelbar aufeinander folgenden Bolzen;
e_1 die Entfernung eines Bolzenumfanges vom Rand des Bleches, so ist für Kesselvernietungen zu nehmen:

$$d = 2\delta \qquad e = 5{\cdot}14\,\delta \qquad e_1 = 1{\cdot}56\,\delta$$

Tabelle

der

wesentlichsten Abmessungen von 18 Lokomotiven.

Aus dem Werke: Guide du mecanicien constructeur et conducteur de machines lokomotives par Le Chatellier, E. Flachat, J. Petiet et Polonceau.

Einheiten:

Meter, Quadratmeter, Kubikmeter, Tonne à 1000 Kilogrammen.

Benennung der Bahn und Art der Lokomotive.	Versailles. Pers.-Z.-L.	Rouen. Pers.-Z.-L.	Nord. Pers.-Z.-L.	Nord. Gemischt.	Nord. Güt.-Z.-L.	Nord. Crampton.	Lyon. Pers.-Z.-L.
Name des Constructeurs.	*Sharp Robert.*	*Buddicom.*	*Derosne et Cail.*	*Werkstätte d. Gesellsch.*	*Derosne et Cail.*	*Derosne et Cail.*	*Derosne et Cail.*
Zeit der Anfertigung.	1840.	1840.	1846.	1849.	1847.	1849.	1847.
Dampfapparat.							
Feuerbüchse und Röhren.							
Länge des Rostes	1,628	1,016	0,925	1,255	0,925	1,370	1,050
Breite „ „	1,018	0,067	0,914	0,915	0,914	1,018-1,040	0,900
Fläche „ „	1,046	0,084	0,845	1,148	0,845	1,4179	0,945
Höhe der untersten Röhre über dem Rost .	0,530	0,512	0,680	0,680	0,680	0,560	0,697
Höhe der Decke über dem Rost . . .	1,168	1,187	1,230	1,250	1,230	1,313	1,350
Anzahl der Röhren	162	145	125	125	125	178	145
Länge „ „	2,550	2,867	3,800	3,470	3,800	3,615	3,488
Innerer Durchmesser der Röhren . . .	0,039	0,045	0,045	0,046	0,045	0,047	0,046
Metalldicke „ „ . .	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
Innere Fläche aller Röhren	50,012	58,870	66,500	68,098	66,500	94,962	76,250
Heizfläche der Feuerbüchse	5,868	5,798	5,012	6,250	5,012	7,377	5,900
Totale Heizfläche des Kessels	55,880	64,668	71,512	74,348	71,512	102,339	82,150
Entfernung der Rückwand der Feuerbüchse von der Rückwand der Umhüllung	0,080	0,076	0,076	0,076	0,076	0,066	0,076-0,126
Entfernung der Seitenwände der Feuerbüchse von den Seitenwänden der Umhüllung	0,080	0,076	0,076	0,076	0,076	0,077-0,066	0,076
Innerer Durchmesser des Röhrenkessels	1,115	1,098	0,950	0,950	0,950	1,200	1,036-1,076
Länge dieses Kessels	2,434	2,743	3,685	3,355	3,685	3,550	3,410
Metalldicke dieses Kessels	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,012
„ der Umhüllung der Feuerbüchse	0,010	0,010	0,012	0,011	0,012	0,012	0,012
Metalldicke der Decke der Feuerbüchse	0,010	0,012	0,011	0,011	0,011	0,012	0,012
Metalldicke in den Seitenwänden der Feuerbüchse	0,010	0,012	0,011	0,011	0,011	0,012	0,012
Metalldicke in der Röhrenwand . . .	0,020	0,020	0,025-0,012	0,025-0,012	0,025-0,012	0,025-0,012	0,022-0,012
Normale Kesselfüllung. Kubik-Meter Wasser	1,615	1,671	2,228	2,427	2,228	2,779	2,300
Dampfraum des Kessels bei normaler Wasserfüllung	1,195	1,150	1,167	1,469	1,167	0,613	0,928
Höhe des Dampfraumes im Röhrenkessel	0,350	0,260	0,170	0,170	0,170	0,245	0,206
Rauchkammer							
Länge im Lichten	0,634	0,670	0,665	0,665	0,849	0,675	0,623
Weite „ „	1,250	1,270	1,156	1,156	1,156	1,200	1,244
Höhe „ „	1,740	1,440	1,100	1,220	1,100	1,200	1,200
Volumen (das der Cylinder nicht mitgerechnet)	0,969	1,108	0,850	0,841	0,955	0,763	0,754

Lyon. Gemischt.	Lyon. Güt.-Z.-L.	Strassburg. Pers.-Z.-L.	Strassburg. Güt.-Z.-L.	Orleans. Güt.-Z.-L.	Orleans. Pers.-Z.-L.	Orleans. Güt.-Z.-L.	Nantes Pers.-Z.-L.	Nantes. Güt.-Z.-L.	West. Gemischt.	St. Germain.
E. Gouin.	*Dersone et Cail.*	*Derosne et Cail.*	*Derosnè et Cail.*	*Stephenson.*	*Stephenson.*	*C. Polonceau.*	*André Köchlin.*	*André Köchlin.*	*Cavé.*	*E. Flachat.*
1849.	1850.	1847.	1850.	1845.	1843.	1849.	1847.	1847.	1848.	1849.
1,203	1,210	0,925	1,050	0,960	0,925	0,922	1,000	1,000	1,000	1,000
1,042	0,904	0,914	0,904	0,920	0,910	1,072	0,910	0,910	0,920	0,960
1,253	1,0938	0,845	0,9492	0,8832	0,851	0,9883	0,910	0,910	0,920	0,960
0,870	0,860	0,656	0,738	0,660	0,566	0,555	0,760	0,795	0,680	0,595
1,505	1,550	1,230	1,350	1,297	1,400	1,320	1,385	1,360	1,280	1,205
155	154	125	143	139	160	180	151	125	145	120
3,226	4,017	3,772	3,927	3,945	3,680	3,760	2,951	3,781	3,920	4,115
0,046	0,046	0,045	0,045	0,037	0,037	0,043	0,045	0,045	0,045	0,0475
0,002	0,002	0,002	0,002	0,0025	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,00225
77,600	92,755	69,587	82,910	63,713	63,300	90,396	65,770	70,000	80,330	73,800
7,860	7,188	5,008	5,810	5,085	5,090	6,252	6,992 (*a*)	6,775 (*a*)	5,500	5,895
85,460	99,943	74,595	88,720	6,8798	68,390	96,648	72,762	76,775	85,800	79,695
0,084-0,073	0,076	0,071	0,076	0,080	0,076	0,100	0,076	0,076	0,077	0,076
0,076	0,106-0,076	0,076	0,106-0,076	0,080	0,071	0,100	0,076	0,076	0,077	0,074
1,146	1,238	0,950	1,190	1,048-0,998	0,982-0,921	1,270	1,060	0,956	1,060	1,080
3,100	3,940	3,695	3,850	3,840	3,564	3,620	2,830	3,660	3,845	4,000
0,012	0,011	0,010	0,011	0,011	0,010	0,011	0,010	0,010	0,010	0,010
0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,011	0,010
0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,011
0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,011
0,025-0,014	0,023-0,012	0,025-0,012	0,023-0,012	0,020	0,022	0,024	0,024	0,024	0,025	0,025
2,000	2,750	1,942	2,370	1,905	1,754	3,060	1,730	1,950	2.536	2,335
1,540	1,620	0,890	1,450	1,760	0,824	1,120	0,940	0,690	1,326	1,415
0,326	0,353	0,183	0,365	0,336	0,205	0,350	0,240	0,190	0,270	0,290
0,762	0,850	0,775	0,805	0,724	0,820	0,800	0,748	0,848	0,822	0,755
1,304	1,238	1,154	1,196	1,170	1,120	1,400	1,215	1,110	1,234	1,190
1,367	ronde.	1,134	ronde.	1,085	1,120	1,395	1,250	1,340	1,100	1,775
0,898	0,939	0,724	0,895	0,716	1,018	1,237	0,914	1,025	1,000	1,597

Benennung der Bahn und Art der Lokomotive.	Versailles. Pers.-Z.-L.	Rouen. Pers.-Z.-L.	Nord. Pers.-Z.-L.	Nord. Gemischt.	Nord. Güt.-Z.-L.	Nord. Crampton.	Lyon. Pers.-Z.-L.
Name des Constructeurs.	*Sharp Robert.*	*Buddicom.*	*Derosne et Cail.*	*Werkstätte d. Gesellsch.*	*Derosne et Cail.*	*Derosne et Cail.*	*Derosne et Cail.*
Zeit der Anfertigung.	1840.	1845.	1846.	1849.	1847.	1849.	1847.
Metalldicke in der Röhrenwand . . .	0,016	0,018	0,015	0,015	0,015	0,015	0,017
Metalldicke der Seitenwände und Decke	0,007	0,006	0,008	0,008	0,008	0,010	0,008
Kamin.							
Innerer Durchmesser	0,350	0,330 0,355	0,328	0,328	0,328	0,400	0,380
Blechdicke	0,003	0,004	0,006	0,006	0,006	0,003	0,003
Höhe über der Decke der Rauchkammer	1,680	1,873	1,710	1,710	1,815	1,950	1,820
Pumpen.							
Durchmesser der Kolben	0,045	0,0508	0,105	0,060	0,105	0,064	0,050
Kolbenschub	0,464	0,558	0,116	0,560	0,116	0,550	0,600
Volumen eines Schubes	0,00073	0,00113	0,001	0,00158	0,001	0,00176	0,001274
Durchmesser der Ventilsitze	0,038	0,050	0,052	0,045	0,052	0,060	0,050
Erhebung der Ventile	0,024	0,013	0,050	0,020	0,050	0,012	0,016
Ventilausströmungs-Querschnitt . . .	0,00113	0,0019	0,0021	0,0018	0,0021	0,0016	0,00176
Durchmesser des Saugrohres	0,040	0,054	0,052	0,060	0,052	0,064	0,052
Durchmesser des Druckrohres	0,040	0,050	0,052	0,055	0,052	0,064	0,052
Blechdicke dieser Röhren	0,004	0,0025	0,003	0,0025	0,003	0,003	0,0025 0,003
Dampfzuleitung.							
Querschnitt der Regulatoröffnung . . .	0,0136	0,02035	0,0120	0,0112	0,012	0,0132	0,0132
Innerer Durchmesser des Dampfrohres .	0,120	0,165	0,125	0,120	0,125	0,145	0,125
Blechdicke dieses Rohres	0,004	0,004	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,003
Querschnitt " "	0,01131	0,02138	0,01227	0,0113	0,01227	0,0163	0,01227
Durchmesser der Röhren, die in die Dampfkammern führen	0,090	0,114	0,100	0,094	0,100	0,120	0,100
Querschnitt dieser Röhren	0,0063	0,0102	0,0078	0,0069	0,0078	0,0113	0,0078
Blasrohr.							
Durchmesser dieses Rohres	0,100	0,152	0,125	0,120	0,125	0,160	0,140
Querschnitt " "	0,00785	0,018145	0,01227	0,0113	0,01227	0,0209	0,01539
Grösste Ausströmungsöffnung	0,0100	0,0095	0,0106	0,018	0,0106	0,0220	0,01595
Kleinste Autströmungsöffnung	0,0040	0,0095	0,00424	0,00424	0,0 424	0,0025	0,0031
Länge d. Leitung von d. Dampfkammer bis zur Ausströmungsöffnung . . .	1,950	1,350	2,500	1,000	2,500	2,425	2,100
Metalldicke des Blasrohres	0,004	0,0025	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003
Steuerung.							
Voreilungswinkel	30°	34°	30°	30°	30°	15°	30°
Lineares Voreilen für den Eintritt . . .	0,006	0,006	0,004	0,004	0,004	0,004	0,005
Lineares Voreilen für das Entweichen .	0,027	0,035	0,026	0,026	0,026	0,032	0,028

Lyon. Gemischt.	Lyon. Güt.-Z.-L.	Strassburg. Pers.-Z.-L.	Strassburg. Güt.-Z.-L.	Orleans. Güt.-Z.-L.	Orleans. Pers.-Z.-L.	Orleans. Güt.-Z.-L.	Nantes. Pers.-Z.-L.	Nantes. Güt.-Z.-L.	West. Gemischt.	St. Germain.
E. Gouin.	*Derosne et Cail.*	*Derosne et Cail.*	*Derosne et Cail.*	*Stephenson.*	*Stephenson.*	*C. Polonceau.*	*André Köchlin.*	*André Köchlin.*	*Cavé.*	*E. Flachat.*
1849.	1850.	1847.	1850.	1845.	1843.	1849.	1847.	1847.	1848.	1849.
0,016	0,017	0,017	0,017	0,015	0,015	0,016	0,015	0,015	0,015	0,015
0,006	0,011	0,008	0,010	0,010	0,009	0,008	0,007	0,008	0,008	0,010
0,400	0,400	0,330	0,400	0,333	0,330	0,400	0,340	0,340	0,330	0,370
0,004	0,003	0,004	0,003	0,004	0,004	0,004	0,005	0,005	0,005	0,005
1,917	1,710	1,710	1,570	1,610	1,925	1,965	1,825	1,895	1,705	2,050
0,052	0,055	0,105	0,105	0,106	0,107	0,105	0,055	0,104	0,105	0,052
0,560	0,600	0,116	0,116	0,114	0,114	0,140	0,560	0,116	0,116	0,700
0,00118	0,001425	0,001004	0,001004	0,001005	0,001025	0,00121	0,00133	0,00098	0,001004	0,00148
0,048	0,050	0,052	0,052	0,061	0,060	0,060	0,060	0,070	0,045	0,062
0,012	0,013	0,012	0,012	0,018	0,020	0,010	0,016	0,016	0,012	0,018
0,00118	0,00144	0,001356	0,001356	0,00166	0,0016	0,0019	0,00159	0,00195	0,0011	0,0033
0,052	0,052	0,052	0,052	0,048	0,050	0,055	0,050	0,050	0,045	0,058
0,054	0,052	0,052	0,052	0,048	0,050	0,055	0,050	0,050	0,045	0,058
0,0025	0,0025 0,003	0,0025 0,003	0,0025 0,003	0,003	0,003	0,0025	0,0025	"	0,003	0,0035
0,0134	0,01308	0,01154	0,0132	0,0132	0,0125	0,0105	0,01008	0,01008	0,0132	0,0187
0,138	0,140	0,130	0,125	0,125	0,125	0,115	0,125	0,125	0,125	0,154
0,010	0,0025	0,012	0,012	0,005	0,004	0,0013	0,003	0,003	0,003	0,012
0,01327	0,015393	0,01227	0,01327	0,01224	0,01227	0,01038	0,01227	0,01227	0,01227	0,0186
0,138	0,100	0,100	0,100	0,100	0,087	0,100	0,100	0,100	0,100	0,125
0,0095	0,0078	0,0078	0,0078	0,0078	0,0059	0,0078	0,0078	0,0078	0,0078	0,0122
0,230-0,080	0,130	0,120	0,110	0,074	0,060	0,130	0,120	0,120	0,115	0,145
0,0144	0,0132	0,0113	0,0095	0,0043	0,0028	0,0126	0,0113	0,0113	0,01038	0,0165
0,01375	0,01539	0,0132	0,011309	0,0120	0,0120	0,01474	0,011875	0,011875	0,0103	0,0108
0,00472	0,00386	0,0031	0,00386	0,0023	0,0023	0,0027	0,0021	0,0021	0,0025	0,0043
1,882	1,900	2,000	1,600	1,300	1,400	2,150	2,100	1,400	1,500	1,800
0,008	0,010	0,003	0,003	0,007	0,003	0,003	0,003	0,003	0,005	0,005
33°	14°	30°	30°	30°	av. 30° 3/5 ar. 36° 3/6	21° av. 10° ar.	30°	30°	30°	36°
0,0065	0,006	0,005	0,005	R. 1 et R. 6.	R. 5 et R. 4.	0,002	0,004	0,004	0,005	0,005
0,009	0,029	0,028	0,028	0,025	0,016	0,035	0,028	0,028	0,030	0,0285

Benennung der Bahn und Art der Lokomotive.	Versailles. Pers.-Z.-L.	Rouen. Pers.-Z.-L.	Nord. Pers.-Z.-L.	Nord. Gemischt.	Nord. Güt.-Z.-L.	Nord. Crampton.	Lyon. Pers.-Z.-L.
Name des Constructeurs.	*Sharp Robert.*	*Buddicom.*	*Derosne et Cail.*	*Werkstätte d. Gesellsch.*	*Derosne et Cail.*	*Derosne et Cail.*	*Derosne et Cail.*
Zeit der Anfertigung.	1840.	1840.	1846.	1849.	1847.	1849.	1847.
Innere Ueberdeckung	0,003	0,002	0,001	0,001	0,001	0,0068	0,001
Aeussere Ueberdeckung	0,023	0,046	0,025	0,025	0,024	0,028	0,024
Dampf-Einströmung (Länge des Kolbenschubes = 1) – Maximum	0,808	0,56-0,50	0,800	0,800	0,800	0,800	0,790
Dampf-Einströmung (Länge des Kolbenschubes = 1) – Minimum	»	»	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250
Excentricität der Scheiben	0,048	0,055	0,058	0,058	0,058	0,092	0,058
Schieberbewegung	0,115	0,110	0,116	0,116	0,116	0,184	0,116
Einströmung in die Cylinder – Breite	0,192	0,305	0,250	0,250	0,250	0,300	0,300
Einströmung in die Cylinder – Höhe	0,044	0,032	0,040	0,040	0,040	0,050	0,040
Einströmung in die Cylinder – Querschnitt	0,00836	0,00976	0,010	0,010	0,010	0,015	0,012
Länge eines Dampfkanales	0,250	0,350	0,360	0,440	0,440	0,400	0,380
Volumen eines Dampfkanales	0,00209	0,003828	0,0036	0,0044	0,0044	0,006	0,0045
Ausströmungsöffnung – Breite	0,192	0,305	0,250	0,250	0,250	0,300	0,300
Ausströmungsöffnung – Höhe	0,070	0,055	0,076	0,075	0,076	0,090	0,080
Ausströmungsöffnung – Querschnitt	0,01344	0,016775	0,019	0,0187	0,019	0,027	0,024
Schieber – Breite	0,260	0,221	0,310	0,310	0,312	0,360	0,358
Schieber – Länge	0,270	0,355	0,245	0,245	0,244	0,286	0,248
Schieber – Fläche	0,0702	0,0786	0,0759	0,0759	0,0761	0,1029	0,08378
Maschine.							
Entfernung der Cylindermittel	0,713	1,855	1,880	1,880	2,076	1,850	1,862
Neigungswinkel der Cylinderaxen	0°	7° 45′	0°	0°	0°	0°	0°
Durchmesser der Cylinder	0,330	0,3556	0,380	0,380	0,380	0,400	0,380
Innere Länge der Cylinder	0,600	0,686	0,692	0,720	0,742	0,682	0,732
Kolbenschub	0,460	0,535	0,560	0,560	0,610	0,550	0,600
Spielraum zwischen Deckel und Kolben	0,010	0,008-0,012	0,023	0,025	0,023	0,020	0,011-0,013
Länge der Schubstangen	1,425	1,562	1,375	1,825	1,470	2,310	1,610
Durchmesser der Kurbelzapfen	0,150	0,089	0,080	0,080	0,080	0,125	0,085
Länge der Kurbelzapfen	0,090	0,101	0,090	0,100	0,090	0,120	0,100
Rahmen und Lager.							
Entfernung der Rahmen	1,810	2,000	1,221	1,223	1,223	1,282-2,418	1,210
Höhe der Rahmen	0,240	0,216	0,200	0,200	0,200	0,220	0,200
Dicke – Eisen	0,010	0,010	0,030	0,030	0,030	0,025	0,030
Dicke – Holz	0,070	0,080	»	»	»	»	»
Höhe der Buffer über den Bahnschienen	0,880	0,950	0,955	0,955	0,955	0,950	0,980
Entfernung der Buffer	1,800	1,776	1,727	1,727	1,727	1,727	1,710
Federn (belastet.)							
Mitttlere – Länge	0,778	0,762	0,950	0,950	0,950	0,966	0,950
Mitttlere – Breite	0,100	0,088	0,090	0,090	0,090	0,100	0,090
Mitttlere – Dicke	0,125	0,112	0,158	0,158	0,140	0,115	0,179
Mitttlere – Pfeil	0,100	0,0888	0,075	0,054	0,080	0,115	0,075

Lyon. Gemischt.	Lyon. Güt.-Z.-L.	Strassburg. Pers.-Z.-L.	Strassburg. Güt.-Z.-L.	Orleans. Güt.-Z.-L.	Orleans. Pers.-Z.-L.	Orleans. Güt.-Z.-L.	Nantes Pers.-Z.-L.	Nantes. Güt.-Z.-L.	West. Gemischt.	St. Germain.
E. Gouin.	*Dersone et Cail.*	*Derosne et Cail.*	*Derosne et Cail.*	*Stephenson.*	*Stephenson.*	*C. Polonceau.*	*André Köchlin.*	*André Köchlin.*	*Cavé.*	*E. Flachat.*
1849.	1850.	1847.	1850.	1845.	1843.	1849.	1847.	1847.	1848.	1849.
0,001	0,001	0,001	0,001	0,00425	0,0068	0,005	0,001	0,001	0,0055	0,004
0,021	0,024	0,024	0,024	0,031	0,0315	0,025	0,025	0,025	0,023	0,0275
0,770	0,780	0,790	0,790	0,750	0,760	0,700	0,800	0,800	0,820	0,701
0,260	0,230	0,250	0,250	0,349	0,320	0,180	0,400	0,400	0,250	0,185
0,065	0,074	0,058	0,058	0,052	0,057	0,070	0,058	0,058	0,058	0,055
0,103	0,115	0,116	0,116	0,116	0,114	0,100	0,116	0,116	0,116	0,110
0,305	0,310	0,250	0,250	0,254	0,2535	0,320	0,250	0,270	0,250	0,310
0,046	0,042	0,040	0,040	0,032	0,033	0,038	0,040	0,040	0,040	0,045
0,014	0,0130	0,010	0,010	0,00812	0,00835	0,012	0,010	0,0108	0,010	0,0139
0,310	0,340	0,370	0,320	0,320	0,320	0,360	0,380	0,376	0,275	0,420
0,00434	0,0044	0,0037	0,0032	0,0026	0,00267	0,0043	0,0038	0,0041	0,00275	0,00588
0,305	0,310	0,250	0,250	0,254	0,2535	0,320	0,250	0,270	0,250	0,310
0,086	0,084	0,076	0,076	0,062	0,060	0,073	0,076	0,076	0,075	0,100
0,026	0,026	0,019	0,019	0,016	0,015	0,02336	0,019	0,021	0,01875	0,031
0,365	0,370	0.314	0,314	0,313	0,3155	0,370	0,310	0,340	0,200	0,368
0,262	0,256	0,244	0,244	0,240	0,228	0,243	0,246	0,246	0,243	0,281
0,0956	0,09472	0,0766	0,0766	0,0751	0,0719	0,0899	0,076	0,0836	0,073	0,1034
0,670	0,690	1,888	0,750	0,750	0,752	1,020	1,882	1,860	0,750	2,015
5°	7°	0°	7°	7° 15′	0°	0°	0°	16°	0°	4° 35′
0,400	0,420	0,380	0,380	0,380	0,355	0,440	0,380	0,380	0,380	0,450
0,692	0,736	0,692	0,735	0,730	0,666	0,731	0,733	0,733	0,680	0,840
0,560	0,600	0,560	0,610	0,610	0,510	0,600	0,560	0,600	0,560	0,700
0,014-0,011	0, 1 -0,008	0,011-0,013	0,016-0,008	0,020	0,020	0,020	0,025	0,025	0,021	0,022
1,670	1,550	1,405	1,550	1,460	1,294	1,450	1,510	1,680	1,400	2,970
0,165	0,176	0,085	0,160	0,158	0,155	0,180	0,080	0,090	0,160	0,096
0,096	0,102	0,100	0,102	0,105	0,102	0,110	0,090	0,090	0,100	1,100
1,260	1,226	1,226	1,226	1,220	1,220	2,080	1,220	1,225	1.225	1,220
0,260-0,340	0,220	0,200	0,200	0,203	0,117	0,230	0,200	0,200	0,200	0,240
0,026	0,030	0,030	0,030	0,032	0,025	0,008 } 0,08	0,030	0,030	0,030	0,030
"	"	"	"	0,022	0,022	0,064 } 0,08	"	"	"	"
0,980	0,980	0,990	0,990	1,060	1,055	1,020	1,020	1,020	1,000	1,000
1,710	1,710	1,710	1,710	1,835	1,860	1,740	1,740	1,740	1,740	1,835
0,710	0,860	0,950	0,860	1,060	0,930	0,925	0,870	0,872	1,010	0,900
0,090	0,090	0,090	0,090	0,090	0,085	0,090	0,090	1,090	0,090	0,091
0,140	0,120	0,0758	0,103	0,162	0,152	0,108	0,166	0,158	0,190	0,165
0,060	0,045	0,075	0,045	0,064	0,050	0,082	0,075	0,079	0,025	0,050

Benennung der Bahn und Art der Lokomotive.	Versailles. Pers.-Z.-L.	Rouen. Pers.-Z.-L.	Nord. Pers.-Z.-L.	Nord. Gemischt.	Nord. Güt.-Z.-L.	Nord. Crampton.	Lyon. Pers.-Z.-L.
Name des Constructeurs.	*Sharp Robert.*	*Buddicom.*	*Derosne et Cail.*	*Werkstätte d. Gesellsch.*	*Derosne et Cail.*	*Derosne et Cail.*	*Derosne et Cail.*
Zeit der Anfertigung.	1840.	1840.	1846.	1849.	1847.	1849.	1847.
Vordere: Länge	0,778	0,711	0,950	0,950	0,950	0,966	0,950
Vordere: Breite	0,100	0,088	0,090	0,090	0,090	0,100	0,090
Vordere: Dicke	0,118	0,102	0,174	0,174	0,158	0,150	0,179
Vordere: Pfeil	0,100	0,0285	0,080	0,083	0,076	0,172	0,070
Hintere: Länge	0,675	0,709	0,950	0,950	0,950	0,966	0,976
Hintere: Breite	0,074	0,088	0,090	0,090	0,090	0,100	0,060
Hintere: Dicke	0,070	0,088	0,142	0,132	0,158	0,150	0,190
Hintere: Pfeil	0,090	0,123	0,081	0,080	0,080	0,172	0,070
Räder.							
Durchmesser: Mittelräder	1,660	1,675	1,680	1,740	1,220	1,220	1,800
Durchmesser: Vorderräder	1,050	1,220	1,000	1,040	1,220	1,350	1,100
Durchmesser: Hinterräder	1,050	1,070	1,000	1,740	1,220	2,100	1,100
Axen.							
Mittlere Axe: Diameter d. Zapfens oder des Halses	0,102	0,152	0,160	0,160	0,160	0,180	0,165
Mittlere Axe: Länge	0,144	0,167	0,150	0,150	0,150	0,250	0,160
Mittlere Axe: Durchmesser d. Radkopfes	0,165	0,178	0,180	0,180	0,180	0,190	0,185
Mittlere Axe: Durchmesser in der Mitte	0,152	0,152	0,155	0,160	0,155	0,150	0,160
Vorderaxe: Durchmesser des Zapfens oder des Halses	0,087	0,101	0,140	0,140	0,150	0,150	0,160
Vorderaxe: Länge	0,150	0,203	0,160	0,170	0,150	0,300	0,180
Vorderaxe: Durchmesser d. Radkopfes	0,127	0,139	0,160	0,160	0,180	0,230	0,180
Vorderaxe: Durchmesser in der Mitte	0,108	0,120	0,135	0,180	0,145	0,160	0,145
Hinteraxe: Durchmesser des Zapfens oder des Halses	0,087	0,088	0,140	0,160	0,150	0,180	0,160
Hinteraxe: Länge	0,150	0,178	0,160	0,150	0,150	0,260	0,180
Hinteraxe: Durhmesser d. Radkopfes	0,127	0,127	0,160	0,180	0,180	0,210	0,180
Hinteraxe: Durchmesser in der Mitte	0,108	0,108	0,135	0,190	0,145	0,172	0,145
Innere Entfernung der Räder	1,360	1,365	1,355	1,355	0,355	1,355	1,360
Innere Entfernung der Bahnschienen	1,440	1,450	1,440	1,440	1,440	1,440	1,450
Radstand	3,444	3,658	3,015	4,420	2,935	4,860	4,015
Entfernung d. Vorderaxe von d. Mittelaxe	1,824	1,778	1,600	2,200	1,585	2,300	1,800
Spurkränze.							
Breite derselben	0,135	0,130	0,140	0,140	0,140	0,140	0,140
Mittlere Dicke	0,040	0,040	0,050	0,055	0,055	0,055	0,050
Höhe des Spurrandes	0,025	0,030	0,039-0,355	0,039	0,039	0,039	0,040
Conicität	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20
Gewichte.							
Das mittlere Laufwerk	„	1,700	2,610	2,610	1,987	1,554	2,600
Das vordere Laufwerk	„	1,236	1,070	1,070	1,820	1,767	1,300
Das hintere Laufwerk	„	1,025	1,070	2,610	1,820	3,185	1,300

Lyon. Gemischt. *E. Gouin.* 1849.	Lyon. Güt.-Z.-L. *Derosne et Cail.* 1850.	Strassburg. Pers.-Z.-L. *Derosne et Cail.* 1847.	Strassburg. Güt.-Z.-L. *Derosne et Cail.* 1850.	Orleans. Güt.-Z.-L. *Stephenson.* 1845.	Orleans. Pers.-Z.-L. *Stephenson.* 1843.	Orleans. Güt.-Z.-L. *C. Polonceau.* 1849.	Nantes. Pers.-Z.-L. *André Köchlin.* 1847.	Nantes. Güt.-Z.-L. *André Köchlin.* 1847.	West. Gemischt. *Cavé.* 1848.	St. Germain. *E. Flachat.* 1849.
0,710	0,860	0,960	0,860	0,060	0,950	0,950	0,876	0,875	1,010	0,850
0,090	0,090	0,090	0,090	0,090	0,088	0,090	0,090	0,090	0,090	0,090
0,140	0,120	0,0758	0,108	0,156	0,135	0,144	0,150	0,158	0,180	0,150
0,060	0,045	0,080	0,045	0,068	0,058	0,070	0,078	0,088	0,029	0,072
1,200	0,860	0,960	0,860	0,060	0,950	0,925	0,810	0,874	1,010	0,900
0,105	0,090	0,090	0,090	0,090	0,088	0,090	0,075	0,090	0,090	0,091
0,170	0,120	0,174	0,108	0,165	0,150	0,120	0,125	0,158	0,190	0,165
0,158	0,045	0,085	0,045	0,0756	0,050	0,082	0,100	0,076	0,025	0,085
1,600	1,500	1,680	1,420	1,450	1,700	1,500	1,830	1,300	1,600	1,210
1,600	1,500	1,000	1,420	1,450	1,102	1,100	1,000	1,300	1,100	1,210
1,100	1,500	1,000	1,420	1,450	2,102	1,500	1,000	1,300	1,600	1,210
0,165	0,170	0,160	0,165	0,160	0,152	0,140	0,160	0,150	0,160	0,150
0,170	0,180	0,150	0,150	0,152	0,153	0,170	0,150	0,150	0,152	0,165
0,186	0,180	0,180	0,180	0,177	0,177	0,176	0,180	0,180	0,178	0,165
0,160	0,165	0,155	0,155	0,148	0,146	0,170	0,155	0,145	0,152	0,135
0,165	0,160	0,150	0,160	0,158	0,127	0,120	0,140	0,150	1,145	0,150
0,180	0,200	0,170	0,180	0,154	0,178	0,190	0,150	0,150	0,180	0,170
0,186	0,180	0,170	0,180	0,176	0,147	0,161	0,160	0,180	0,160	0,165
0,155	0,150	0,135	0,150	0,150	0,129	0,140	0,135	0,145	0,135	0,135
0,130	0,160	0,150	0,160	0,158	0,118	0,140	0,140	0,150	0,160	0,160
0,150	0,200	0,170	0,180	0,154	0,160	0,190	0,150	0,150	0,180	0,160
0,150	0,180	0,170	0,180	0,177	0,146	0,176	0,160	0,180	0,178	1,185
0,125	0,150	0,135	0,150	0,140	0,120	0,145	0,135	0,145	0,146	0,150
1,360	1,360	1,355	1,355	0,365	1,375	1,370	1,370	1.370	1,365	1,370
1,450	1,450	1,440	1,440	1,440-1,450	1,440-1,450	1,440-1,450	1,450	1,450	1,450	1,440
4,230	3,435	3,015	3,350	3,330	3,338	3,125	3,610	3,200	3,440	3,220
2,215	1,845	1,615	1,845	1,807	1,858	1,545	1,700	1,820	1,740	1,770
0,140	0,140	0,140	0,140	0,141	0,128-0,160	0,135	0,140-0,130	0,140-0,130	0,140	0,140
0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	1,050	0,050	0,050
0,030-0,040	0,040	0,040	0,040	0,050	0,025	0,033	0,035	1,035	0,038	0,035
1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20	1/20
2,155	2,000	2,113	2,090	2,136	2,445	1,963	2,220	1,809	2,324	„
1,880	1,676	1,080	1,811	1,712	995	1,135	1,015	1,620	1,105	„
1,095	1,676	1,080	1,811	1,712	995	1,908	1,015	1,620	2,112	„

Benennung der Bahn und Art der Lokomotive.	Versailles. Pers.-Z.-L.	Rouen. Pers.-Z.-L.	Nord. Pers.-Z.-L.	Nord. Gemischt.	Nord. Güt.-Z.-L.	Nord. Crampton.	Lyon. Pers.-Z.-L.
Name des Constructeurs.	*Sharp Robert.*	*Buddicom.*	*Derosne et Cail.*	*Werkstätte d. Gesellsch.*	*Derosne et Cail.*	*Derosne et Cail.*	*Derosne et Cail.*
Zeit der Anfertigung.	1840.	1840.	1846.	1849.	1847.	1849.	1847.
Belastung der Mittelaxe bei normaler Kesselfüllung	1,20	6,300	4,800	8,412	5,113	3,337	9,312
Belastung der Vorderaxe	„	5,264	5,925	6,856	6,380	9,376	8,087
Belastung der Hinteraxe	„	1,501	6,025	2,839	5,180	8,100	2,614
Gewicht der gefüllten Maschine	„	17,026	21,500	24,397	22,300	27,319	25,213
Gewicht der leeren Maschine	„	14,851	18,886	21,710	20,072	24,197	22,600
Tender.							
Wassergehalt	„	4,000	5,438	5,783	5,783	6,390	6,000
Belastung mit Koks	„	1,776	1,400	1,750	1,750	1,225	1,500
Gewicht des leeren Tenders	„	5,300	7,219	7,366	7,366	9,951	11,826
Gewicht des belasteten Tenders . . .	„	11,076	14,057	14,899	14,899	17,566	19,326

Lyon. Gemischt.	Lyon. Güt.-Z.-L.	Strassburg. Pers.-Z.-L.	Strassburg. Güt.-Z.-L.	Orleans. Güt.-Z.-L.	Orleans. Pers.-Z.-L.	Orleans. Güt.-Z.-L.	Nantes Pers.-Z.-L.	Nantes. Güt.-Z.-L.	West. Gemischt.	St. Germain.
E. Gouin.	*Dersone et Cail.*	*Derosne et Cail.*	*Derosne et Cail.*	*Stephenson.*	*Stephenson.*	*C. Polonceau.*	*André Köchlin.*	*André Köchlin.*	*Cavé.*	*E. Flachat.*
1849.	1850.	1847.	1850.	1845.	1843.	1849.	1847.	1847.	1848.	1849.
8,904	7,049	8,200	6,551	6,300	6,810	8,065	7,300	6,790	8,400	1/20
7,217	7,049	6,400	6,551	4,100	2,335	6,140	5,900	5,125	6,100	„
4,175	7,049	5,053	6,551	6,335	5,100	3,660	3,800	6,135	3,000	„
25,426	26,500	23,926	25,365	22,295	19,190	25,865	21,250	23,090	23,041	„
22,080	22,700	20,875	22,200	20,160	16,750	22,460	19,220	20,660	20,500	„
5,500	6,000	5,000	5,000	4,520	4,520	4,520	5,130	5,130	4,000	„
1,000	1,500	2,000	2,000	1,350	1,350	2,475	1,800	2,400	1,800	„
8,900	12,546	8,589	8,720	4,870	4,870	4,870	7,325	7,325	8,000	„
15,400	20,046	15,589	15,720	10,740	10,740	11,865	14,255	14,855	13,800	„

Constructions-Verhältnisse nach ausgeführten Lokomotiven.

Durch Vergleichung der in der vorhergehenden Tabelle enthaltenen Abmessungen von 18 Lokomotiven haben sich durchschnittlich die nachfolgenden Verhältnisse ergeben

Es bedeutet:

- d den Durchmesser eines Dampfcylinders;
- O den Querschnitt eines Dampfcylinders;
- F die totale Heizfläche des Kessels;
- δ den Durchmesser einer Röhre des Kessels;

Der Dampfapparat.

Länge des Rostes	$= 0{\cdot}114 \sqrt{F}$
Breite " "	$= 0{\cdot}114 \sqrt{F}$
Fläche " "	$= 0{\cdot}013\, F$
Höhe der untersten Heizröhre über dem Rost	$= 0{\cdot}080 \sqrt{F}$
Innerer Durchmesser der Röhren { Min.	$= 0{\cdot}037$ Meter
Innerer Durchmesser der Röhren { gew.	$= 0{\cdot}045$ "
Anzahl der Heizröhren	$= 0{\cdot}0033 \frac{F}{\delta^2}$
Länge der Röhren	$= 87\, \delta$
Metalldicke einer Röhre	$= 0{\cdot}002$ Meter.
Heizfläche sämmtlicher Röhren . .	$= 0{\cdot}92\, F$
Summe der Querschnitte aller Röhren	$= 0{\cdot}00269\, F$
Heizfläche der Feuerbüchse . . .	$= 0{\cdot}08\, F$
Totale Heizfläche des Kessels . . .	$= F$
Entfernung der Rückwand der Feuerbüchse von der Rückwand der Umhüllung im Lichten	$= 0{\cdot}08$ Meter
Entfernung der Seitenwände der Feuerbüchse von der Seitenwänden der Umhüllung im Lichten	$= 0{\cdot}08$ Meter
Entfernung der Bolzen, welche die Wände der Feuerbüchse mit den Wänden der Umhüllung verbinden . .	$= 0{\cdot}12$ Meter
Durchmesser dieser Bolzen	$= 0{\cdot}02$ "
Innerer Durchmesser des die Röhren umschliessenden, in der Regel cylindrischen Kessels	$= 0.124 \sqrt{F}$
Länge dieses Kessels	$= 84\, \delta$
Metalldicke der Wand dieses Kessels	$= 0{\cdot}0013 \sqrt{F}$

Blechdicke der äusseren Umhüllung der Feuerbüchse	$= 0{\cdot}0014 \sqrt{F}$
Blechdicke der Decke (Kupfer) der Feuerbüchse	$= 0{\cdot}0014 \sqrt{F}$
Blechdicke der Seitenwände und der Rückwand der Feuerbüchse (Kupfer)	$= 0{\cdot}0014 \sqrt{F}$
Blechdicke der Röhren an der Feuerbüchse	$= 0{\cdot}0024 \sqrt{F}$
Querschnitt der Oeffnung eines Sicherheitsventils	$= 0{\cdot}0001$ F

Die Pumpen.

Durchmesser eines Kolbens einer Pumpe	$= 0{\cdot}0128 \sqrt{F}$
Kolbenhut	$= 0{\cdot}12$ Meter
Durchmesser einer Ventilöffnung . .	$= 0.0058 \sqrt{F}$
Durchmesser der Saug- u. Druckröhren	$= 0{\cdot}0058 \sqrt{F}$

Dampfzuleitung und Regulator.

Grösster Querschnitt der Regulatoröffnung	$= 0{\cdot}00015$ F
Innerer Durchmesser des Dampfzuleitungsrohres	$= 0{\cdot}016 \sqrt{F}$
Querschnitt dieses Rohres	$= 0{\cdot}0002$ F
Querschnitt der Röhren, durch welche der Dampf nach der Dampfkammer strömt	$= 0{\cdot}0001$ F

Blasrohr.

Querschnitt des Blasrohrs		$= 0{\cdot}0002$ F
Querschnitt der Mündung des Blasrohrs	Maximum	$= 0{\cdot}00017$ F
	Minimum	$= 0{\cdot}0000273$ F

Steuerung.

Voreilungswinkel		$= 30^{\circ}$
Lineares Voreilen des Schiebers . .		$= 0{\cdot}013$ d
Innere Ueberdeckung der Schieber .		$= 0{\cdot}012$ d
Aeussere „ „ „ .		$= 0{\cdot}065$ d
Halbmesser der Steurungsexcentra .		$= 0{\cdot}15$ d
Einströmungsöffnung	Verhältniss der Breite z. Höhe	$= 6{\cdot}91$
	Querschnitt .	$= 0{\cdot}000132$ F $= 0{\cdot}071$ O
Ausströmungsöffnung	Verhältniss der Breite z. Höhe	$= 3{\cdot}65$
	Querschnitt .	$= 0{\cdot}000237$ F $= 0{\cdot}14$ O

Schieber	Länge	$= 0{\cdot}03 \sqrt{F}$	$= 0{\cdot}63\ d$
	Breite	$= 0{\cdot}04 \sqrt{F}$	$= 0{\cdot}82\ d$
	Fläche	$= 0{\cdot}0012\ F$	$= 0{\cdot}59\ O$

Cylinder und Transmission.

Querschnitt eines Cylinders bei Lokomotiven mit zwei Cylindern . . .	$= 0{\cdot}00136\ F$
Durchmesser eines Dampfcylinders .	$d = 0{\cdot}0416 \sqrt{F}$
Länge des Kolbenschubes	$= 1{\cdot}57\ d$
Länge einer Schubstange	$= 3{\cdot}84\ d$

Verbesserungen.

Seite	Ort	statt	soll es heissen
46	In der Formel (36)	$_1\Delta - \Delta^2$	$\Delta_1 - \Delta_2$
72	Zeile 14 von oben	$X = 2R + \ldots$	$X = 2P + \ldots$
76	Zeile 1 von oben	$\frac{\int_0^1 \varrho\, dx}{1}$	$\frac{\int_0^1 \varrho\, dx}{1} = r_m$
76	In der Formel (2)	$\left(\frac{l_1}{e} + m\right)$	$\left(\frac{l_1}{1} + m\right)$
80	Zeile 22 von oben	W	$\mathfrak{W}$
81	Gleichung (1)	$O\, p\, l$	$O\, p\, l_1$
85	Gleichung (13)	$\frac{D}{e}$	$\frac{D}{1}$
86	Gleichung (3)	$\pi_1 \quad \pi_2$	π
87	Gleichung (7)	$\frac{S_2}{1 + m_1}$	$\frac{S_2}{1 + m_2}$
109	Zeile 12 von oben	z	s
118	Zeile 6 von unten	S_1	S
121	Gleichung (5)	$(x_1 - \xi^2)$	$(x_1 - \xi)^2$
123	Zeile 2 von unten	$]\}$	$)]\}$
124	Zeile 5 von oben	$q(r^2 + 2e^2)$	$q(\varrho^2 + 2e^2)$
135	Formel (3)	$\frac{g \frac{1}{2} G + \mathfrak{p}}{Q}$	$g \frac{\frac{1}{2} G + \mathfrak{p}}{Q}$
135	Zeile 16 von unten	$\frac{1}{\varrho}$	$\frac{1}{\varrho_2}$
141	Zweite der Gleichungen (4)	ζ^2	ζ_2
143	Zeile 2 von oben	$\zeta\, \psi$	$\varepsilon\, \psi$
147	Erste der Gleichungen (11)	φ	φ_1
147	Dritte der Gleichungen (11)	$p\, e$	p_2
149	Zeile 2 von oben	$\alpha \cos.^2$	wegzulassen
149	Zeile 6 von oben	$\mathfrak{N}\, m_2$	$- \mathfrak{N}\, m_2$
154	Formel (4)	$\frac{1}{2} \frac{d_1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2s}{g}}$	$\frac{1}{2} \frac{d_1}{\varepsilon} v \sqrt{\frac{2s}{g}}$
155	Formel (5)	$\sqrt{\frac{23}{g}}$	$\sqrt{\frac{2s}{g}}$
158	Zeile 10 von unten	$x =$	$X =$
159	Zeile 4 von unten	$n_1\, \mathfrak{P}$	$m_1\, \mathfrak{P}$
160	Erste der Gleichungen (9)	$m + n_1$	$(m + n_1)^2$
161	Zeile 1 von unten	$\frac{- m_1}{a_1^2 - m_1}$	$\frac{- m_1}{a_1^2 - n_1}$

Seite	Ort	statt	soll es heissen
183	Gleichungen (13)	$\frac{F^2}{B}$	$\frac{F_2}{B}$
185	Erste der Gleichungen (1)	$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{B}$
192	Zeile 4 von oben	$\zeta\varphi$	$\zeta_1 \varphi_1$
196	In dem Ausdruck $\mathfrak{H}$	$\frac{q\, m_1}{a_2^2 - n_1}$	$\frac{p\, m_1}{a_2^2 - n_1}$
205	Unrichtige Seitenzahl	405	205
207	Formel (29)	J^2	J
209	Formel (3)	$c_1\, x_2$	$c_2\, x_2$
212	Erste der Gleichungen (15)	δ_3^1	d_1^3
225	Gleichung (8)	J_1^2	$\mathfrak{J}_1^2$
236	Gleichung (6)	r_0^1	r_0^2
241	Gleichung (5)	$\frac{4}{3}\left(\xi^3 - \varrho_0^3\right)$	$\frac{4}{3}\pi\left(\xi^3 - \varrho_0^3\right)$
243	Gleichung (2)	$2\mathfrak{A} + 3\, n_1 - n_1$	$2\mathfrak{A} + 3\, n_1 - n$
251	Zeile 1 von unten	$\lambda^2 = \frac{12\, S}{q\, \varepsilon\, \delta^3}$	$\lambda^2 = \frac{12\, S}{b\, \varepsilon\, \delta^3}$
267	Gleichung (4)	$-\frac{\beta\, p}{2\, \xi}$	$-\frac{\beta\, p}{2}$
273	Zweite der Gleichungen (2)	$\left(\frac{\delta}{\delta}\right)^2$	$\left(\frac{d}{\delta}\right)^2$
300	Zweite der Gleichungen (29)	$\frac{6\, P_1\, l_1}{\mathfrak{J}_1\, l\, \delta_1^2}$	$\frac{6\, P_1\, l_1}{\mathfrak{J}_1\, b\, \delta_1^2}$

XVIII

FIGUREN TAFELN

zu den

GESETZEN

des

LOCOMOTIVBAUES

1855.

Tab. I.

Stephenson.

Fig. 1.

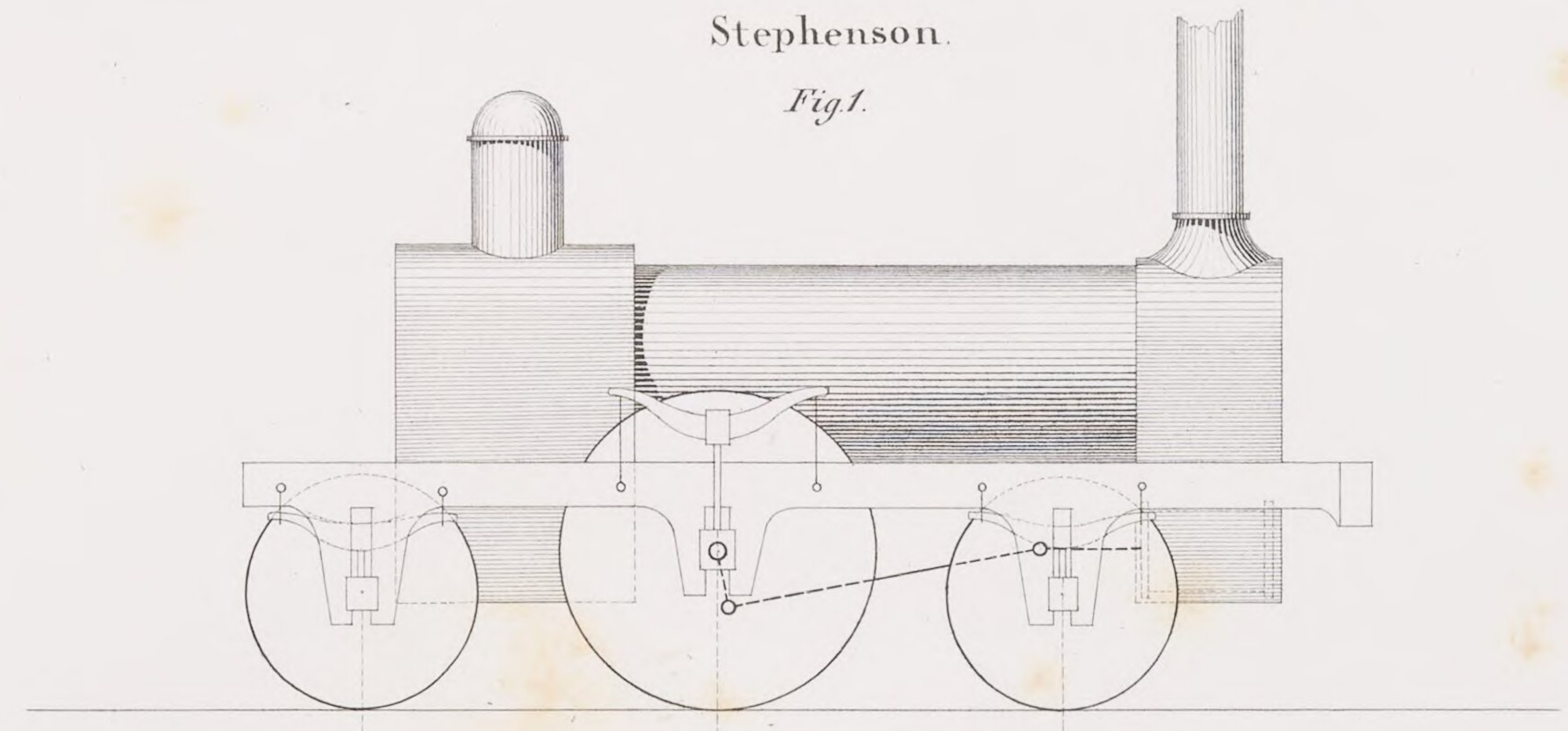
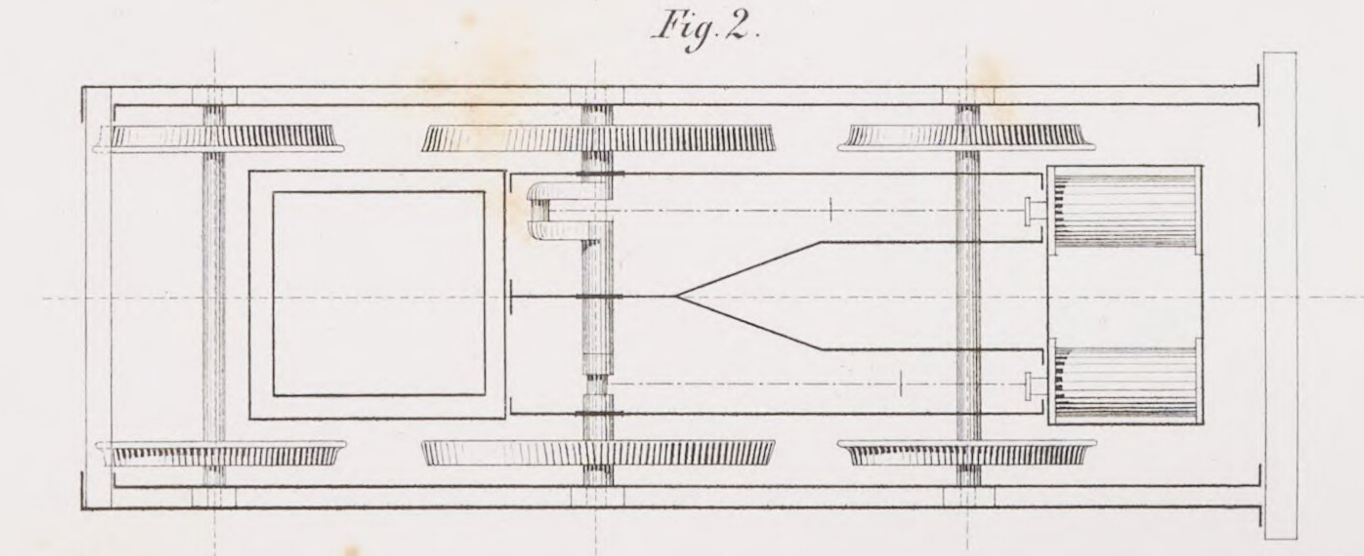


Fig. 2.



Stephenson

Fig. 3.

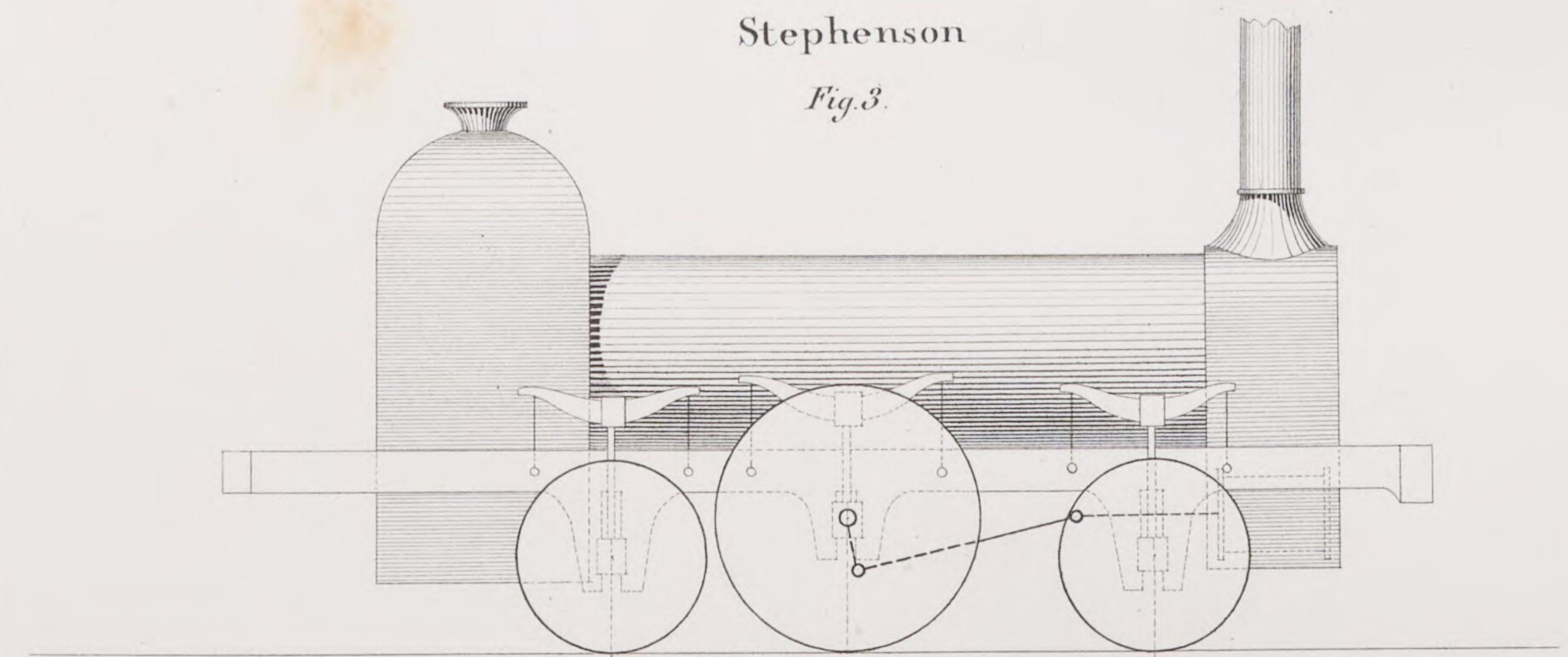
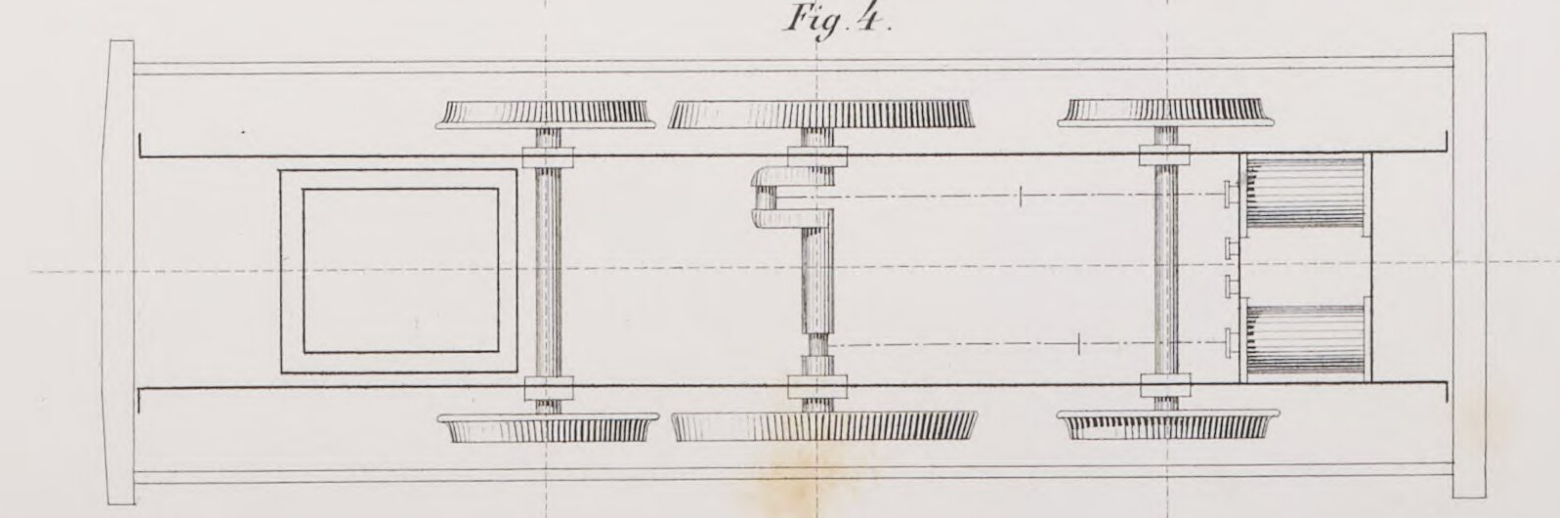


Fig. 4.



sc. v. L. Geißendörfer

Carlsruhe W. Creuzbauer's Lith.

Tab. I.

Stephenson.

Fig. 1.

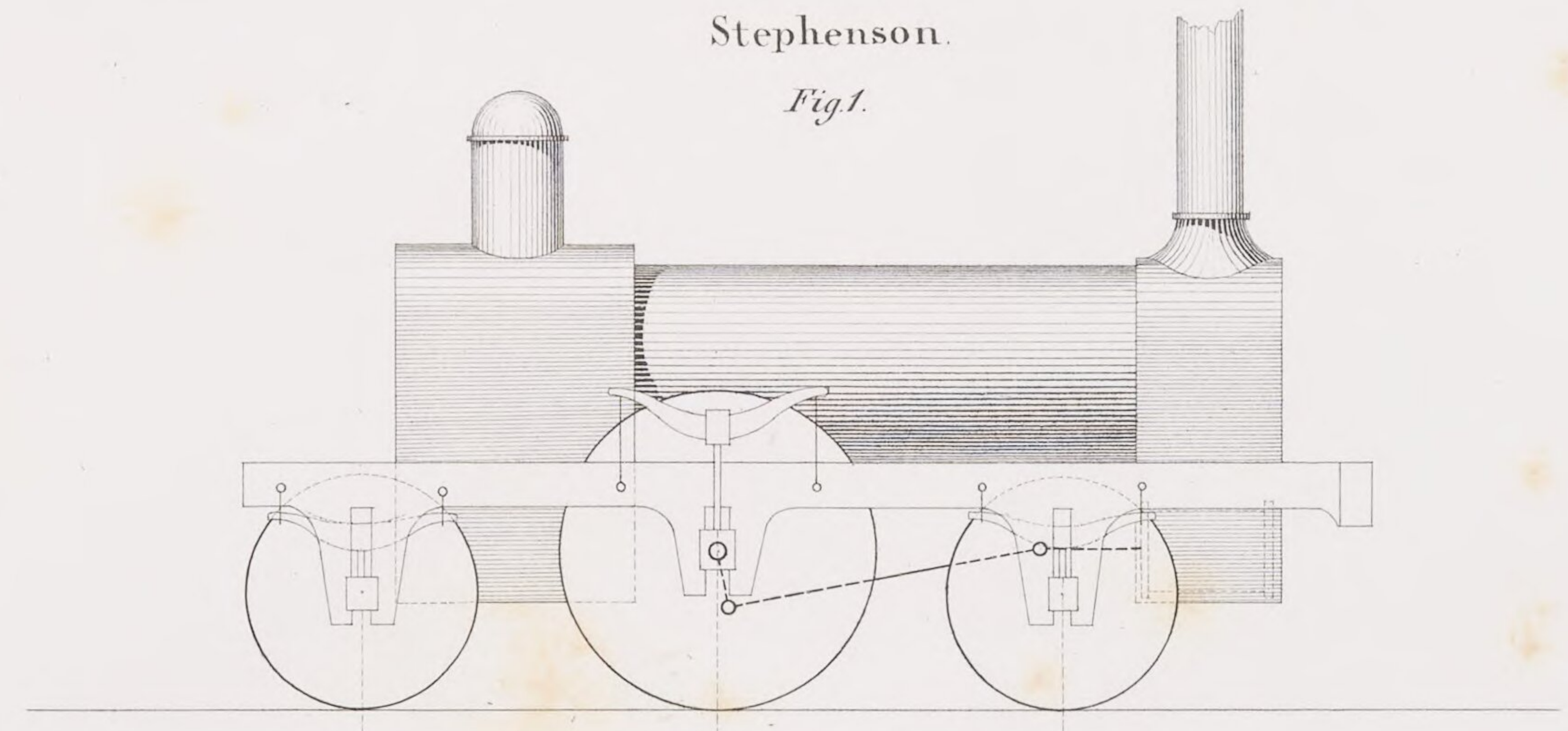
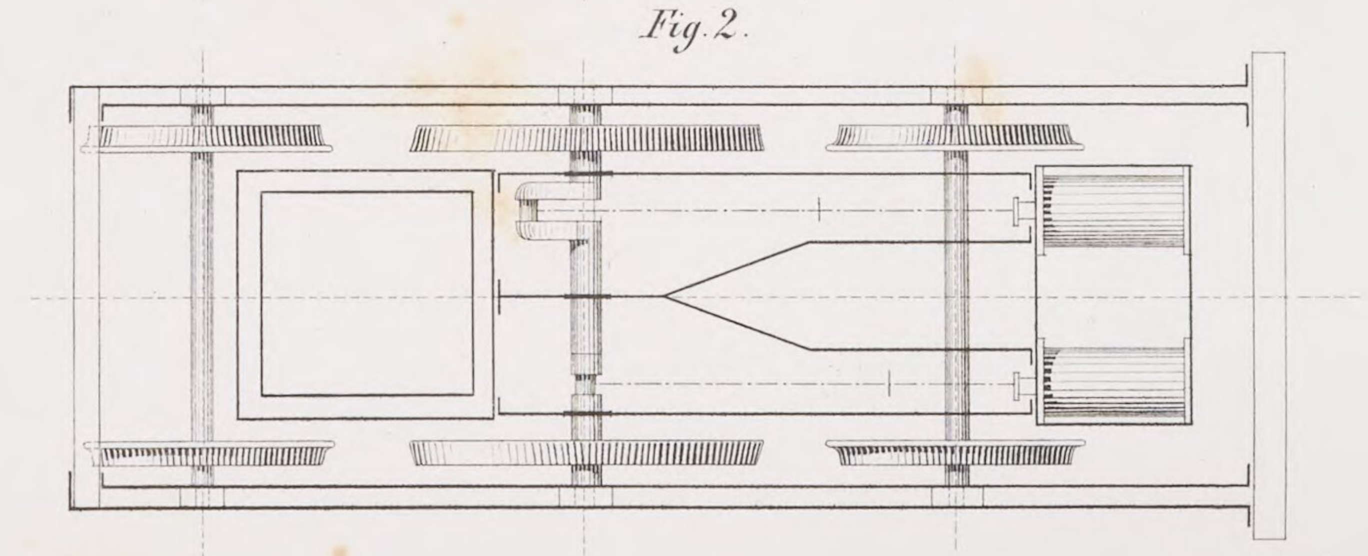


Fig. 2.



Stephenson

Fig. 3.

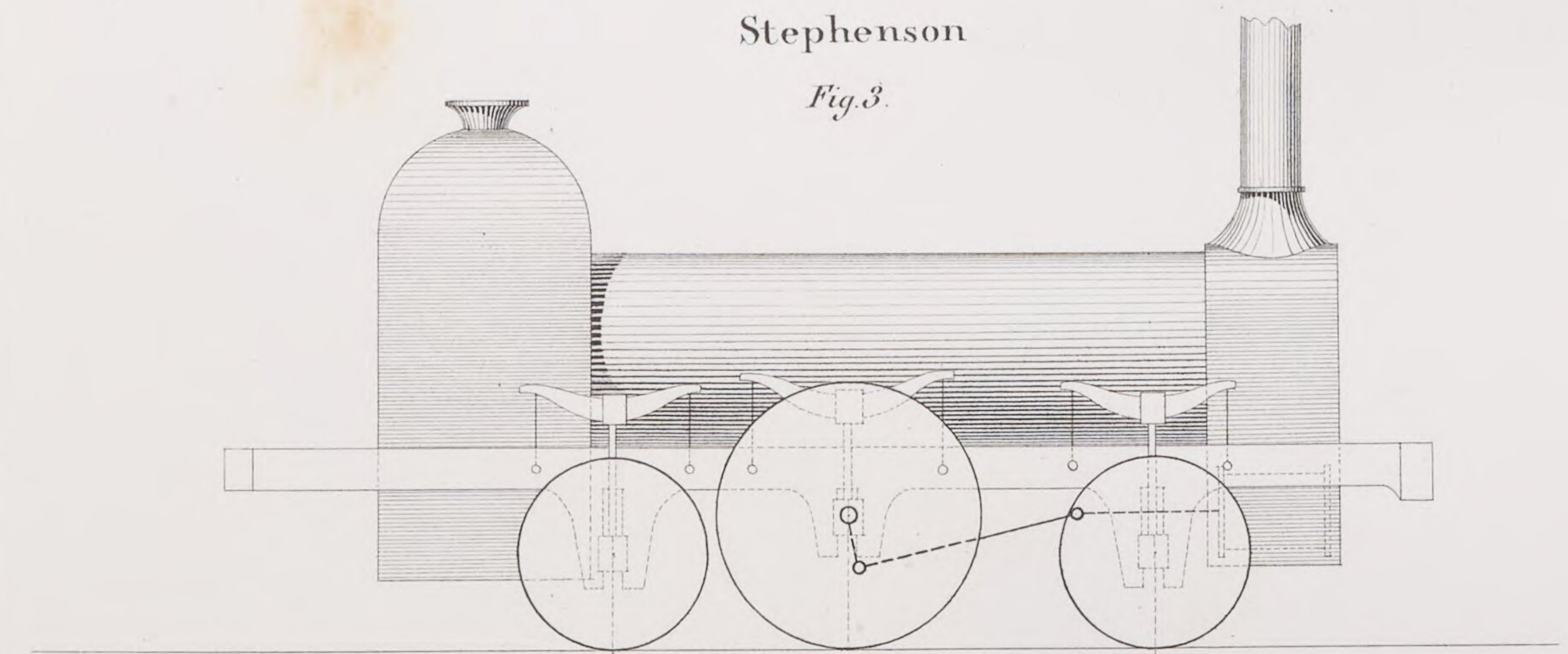
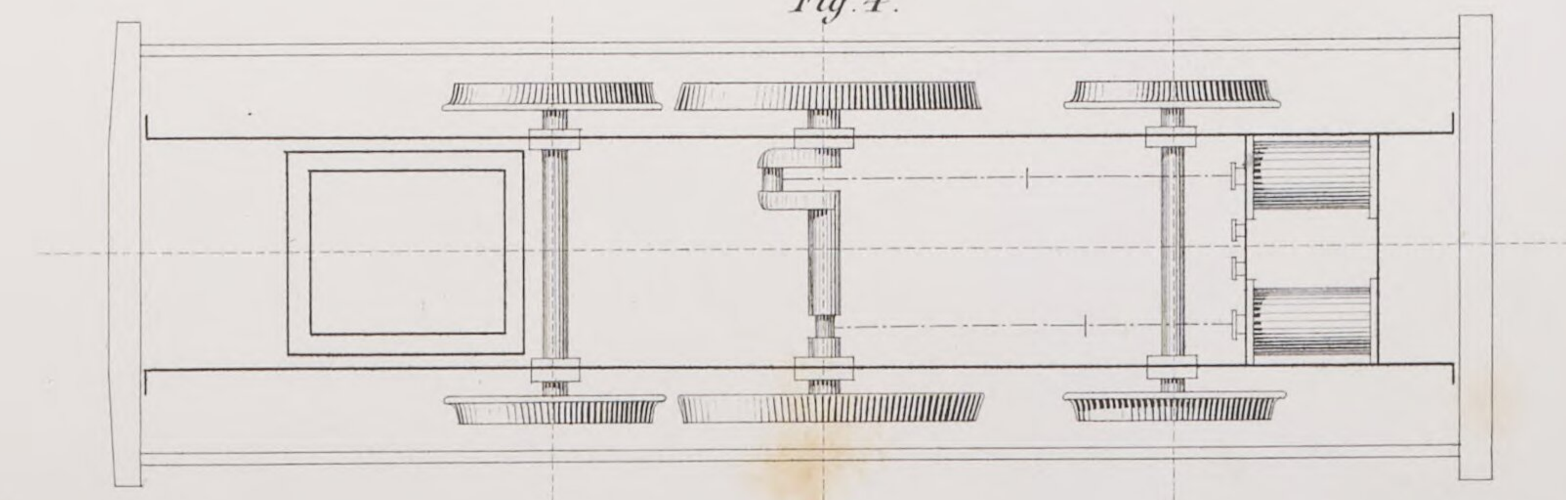


Fig. 4.



sc. v. L. Geißendörfer

Carlsruhe W. Creuzbauer's Lith.

Tab. I.

Stephenson.

Fig. 1.

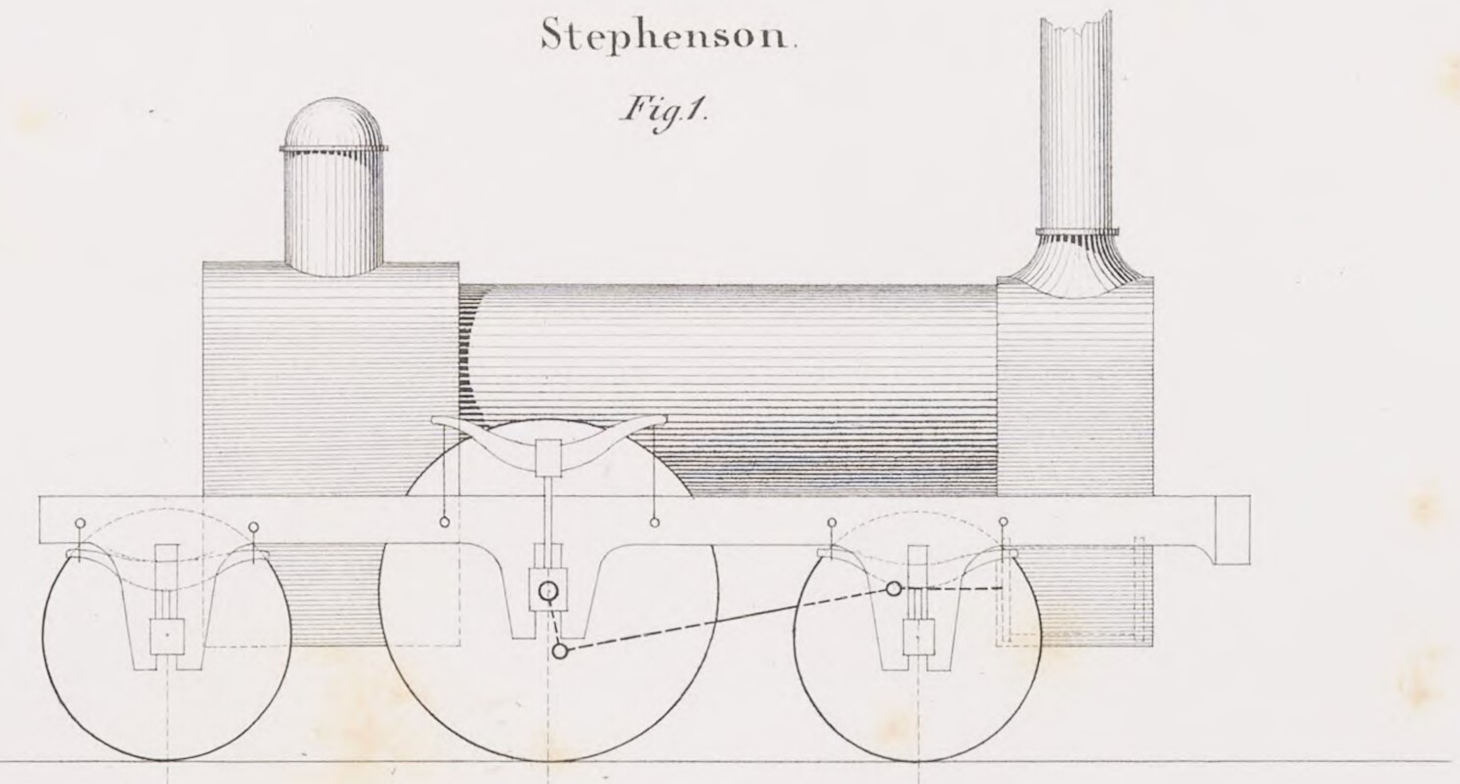
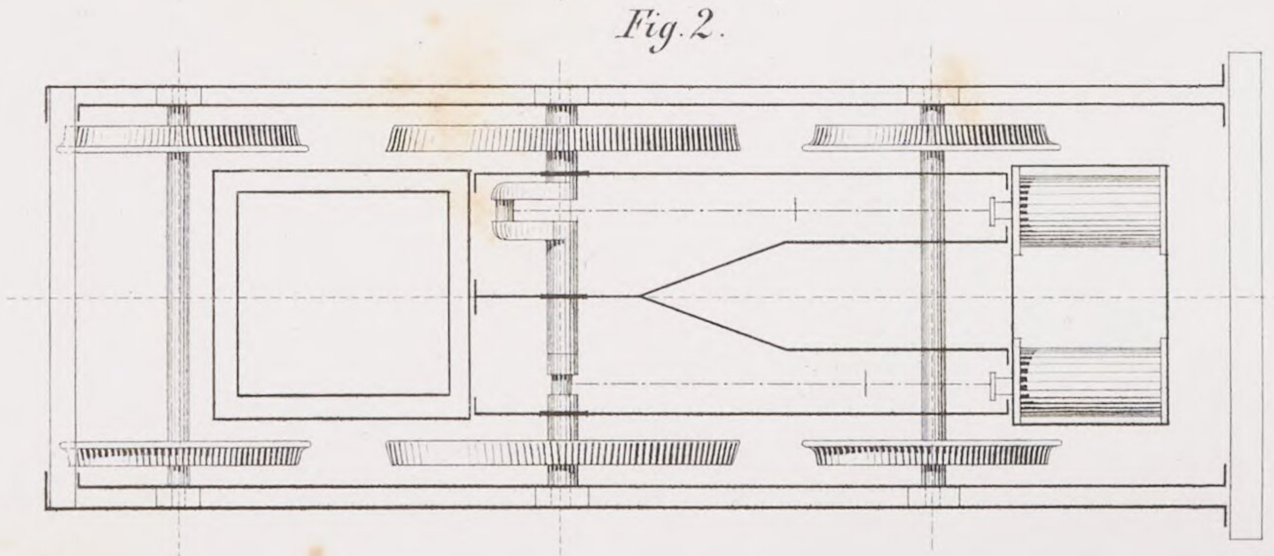


Fig. 2.



Stephenson

Fig. 3.

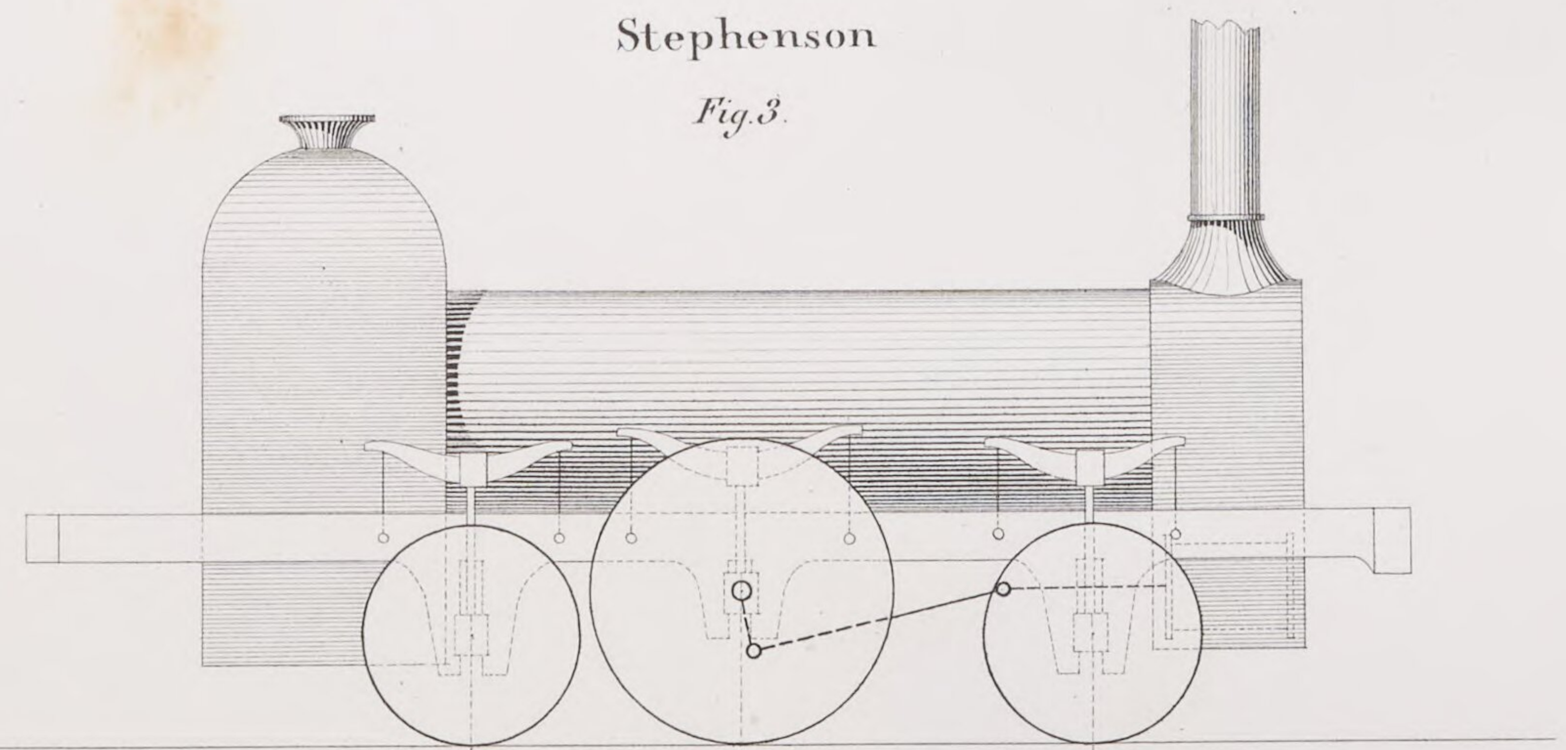
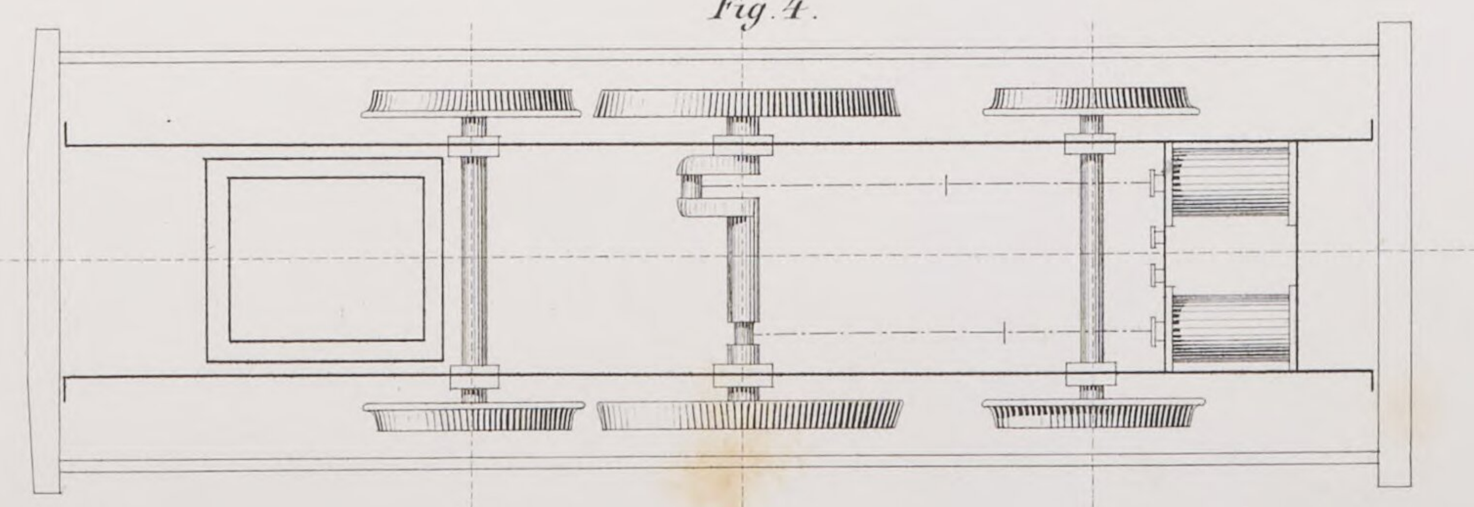


Fig. 4.



sc. v. L. Geissendörfer

Carlsruhe W. Creuzbauer's Lith.

Tab. I.

Stephenson.

Fig. 1.

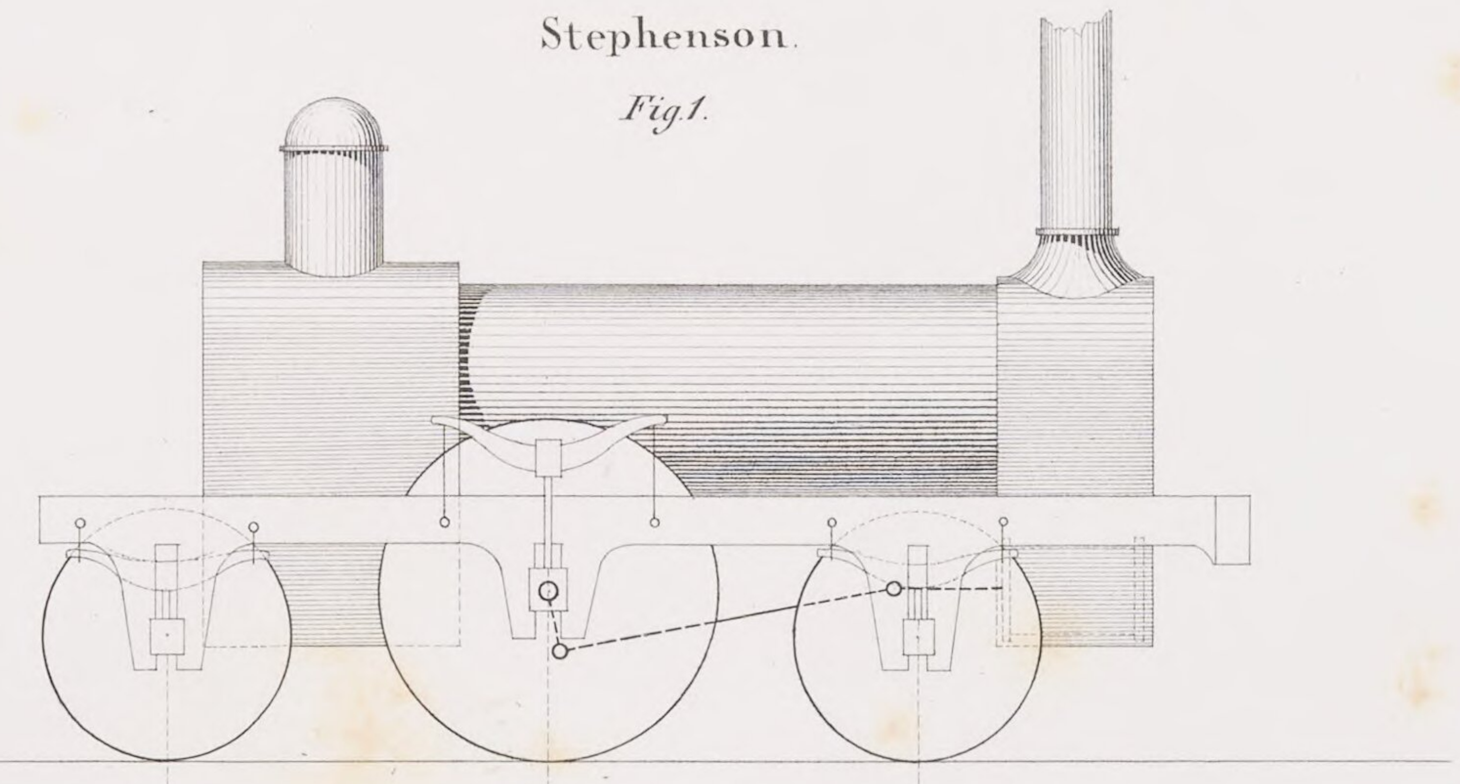
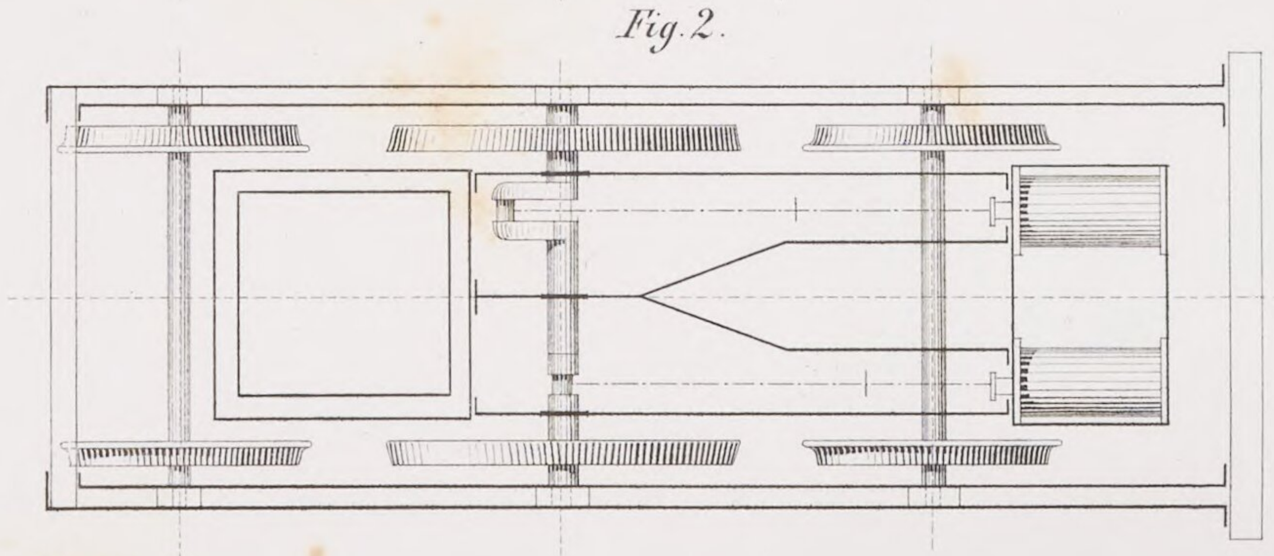


Fig. 2.



Stephenson

Fig. 3.

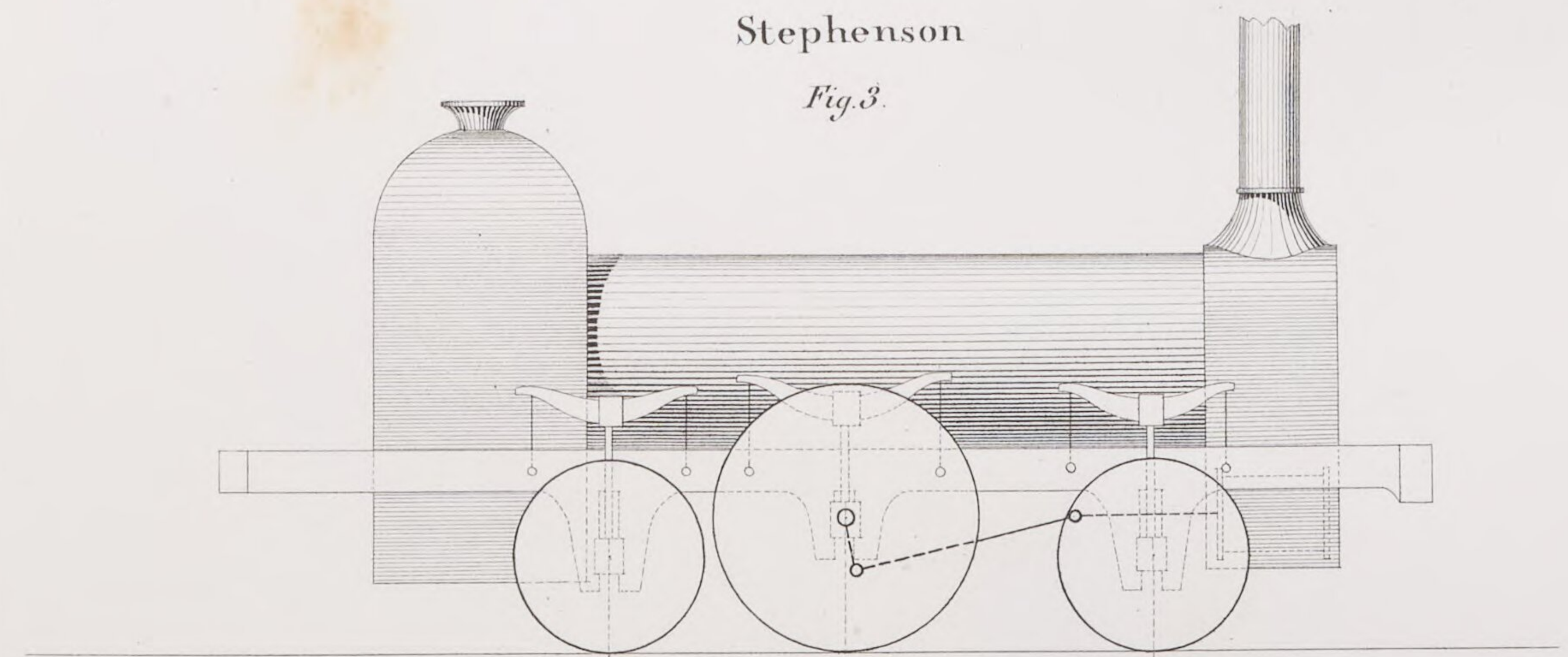
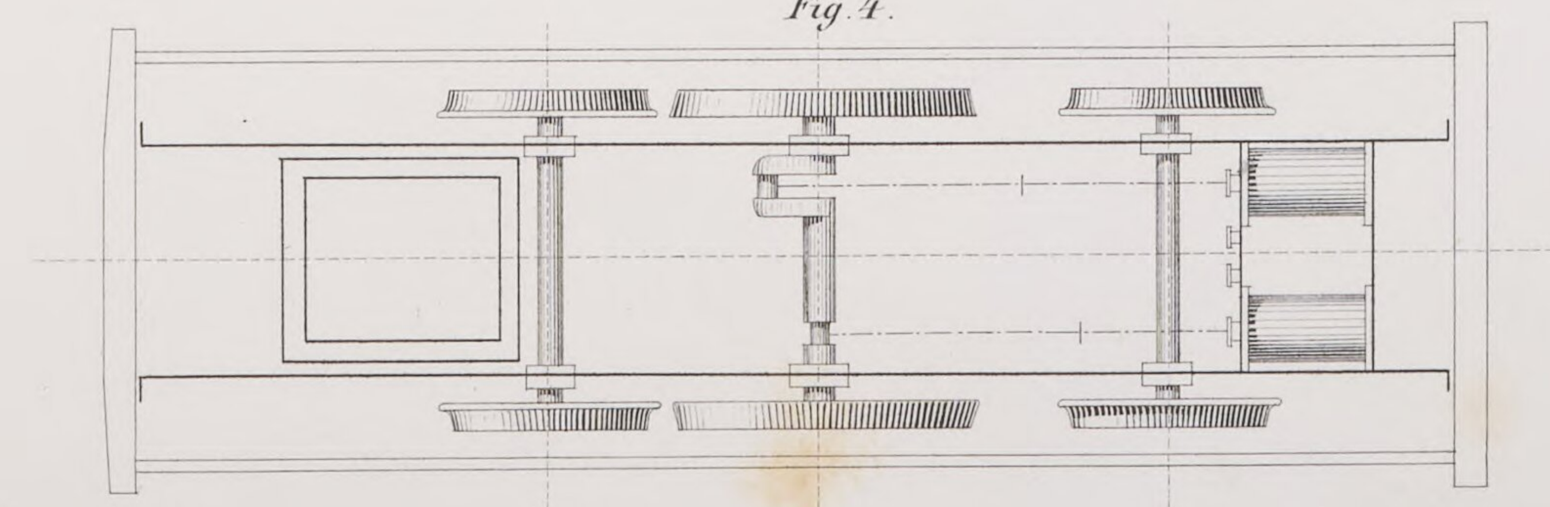


Fig. 4.



sc. v. L. Geissendörfer
Carlsruhe W. Creuzbauer's Lith.

Stephenson.

Fig. 5.

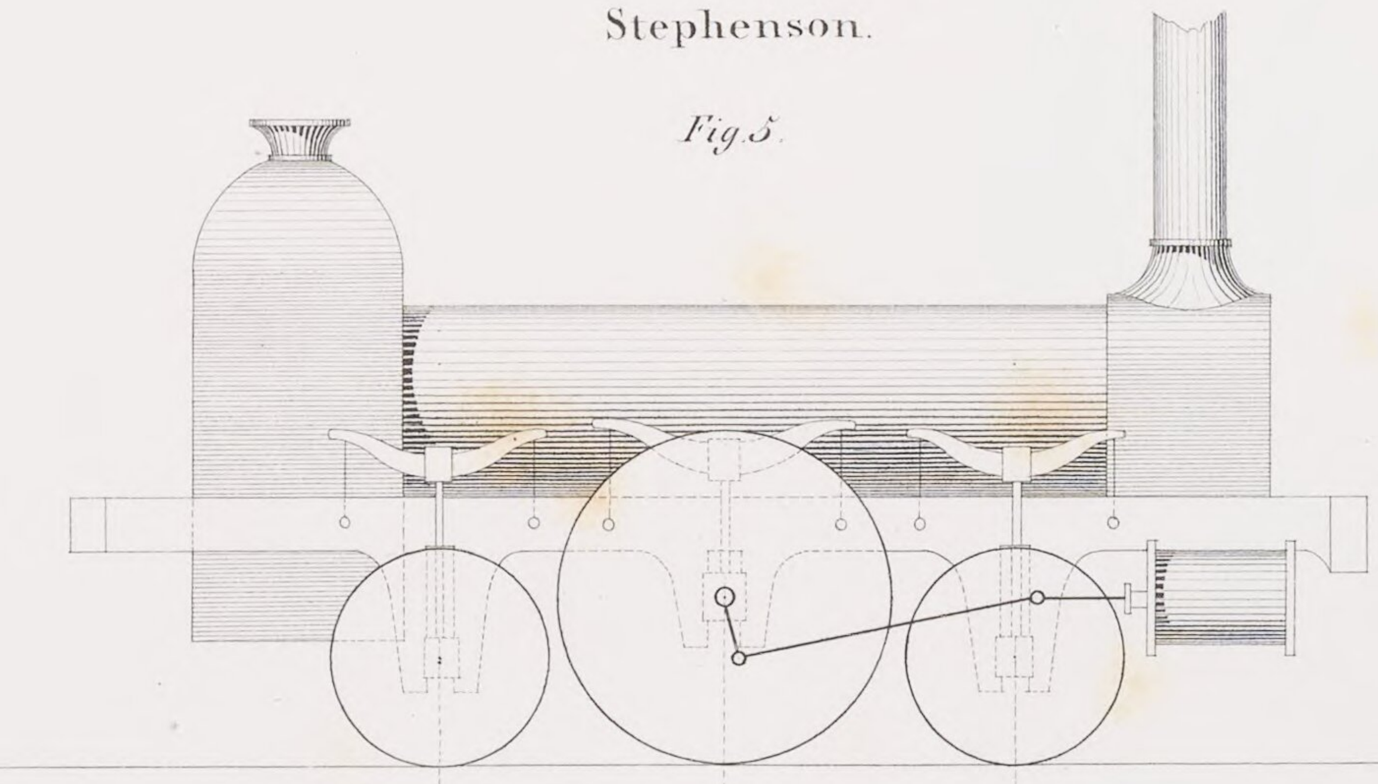
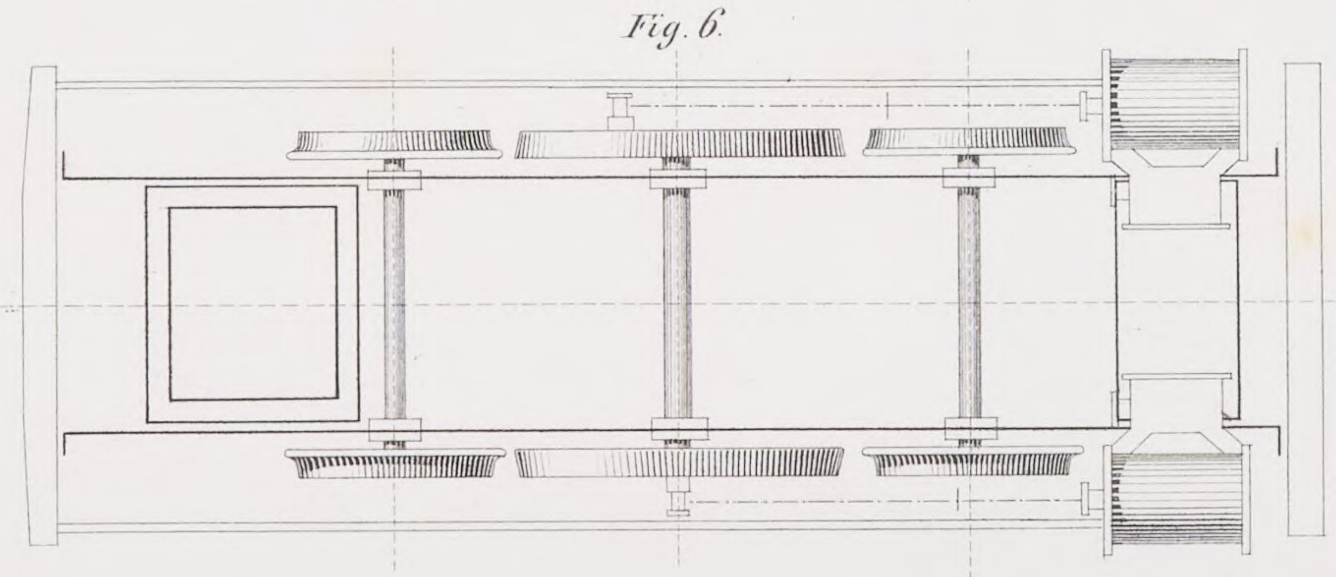


Fig. 6.



Stephenson

Fig. 7.

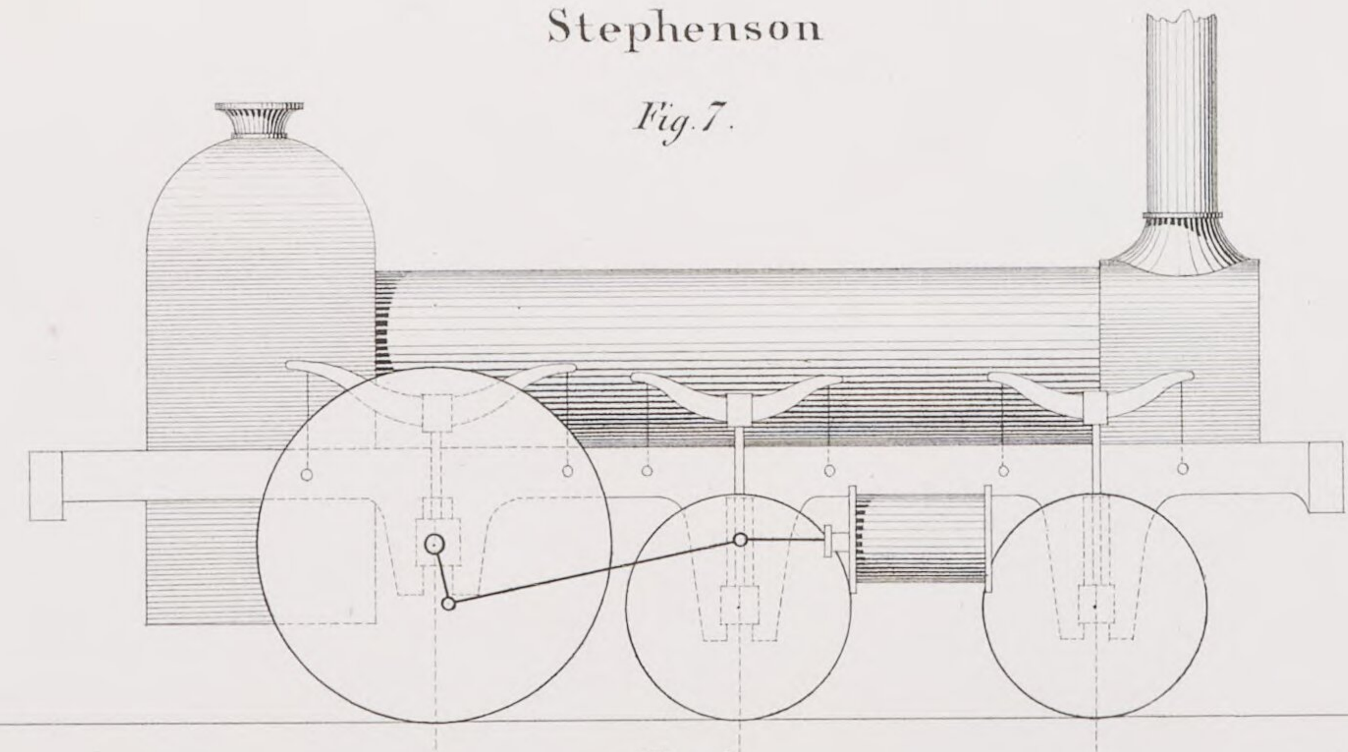
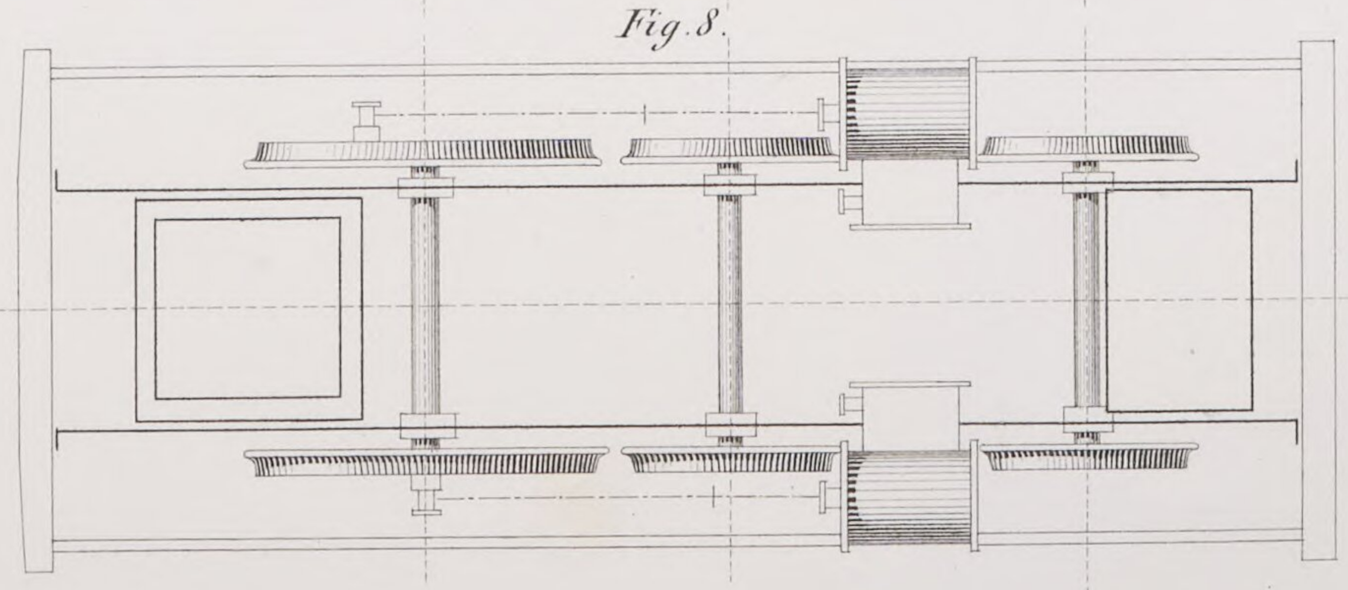


Fig. 8.



Tab. II.

Stephenson.

Fig. 5.

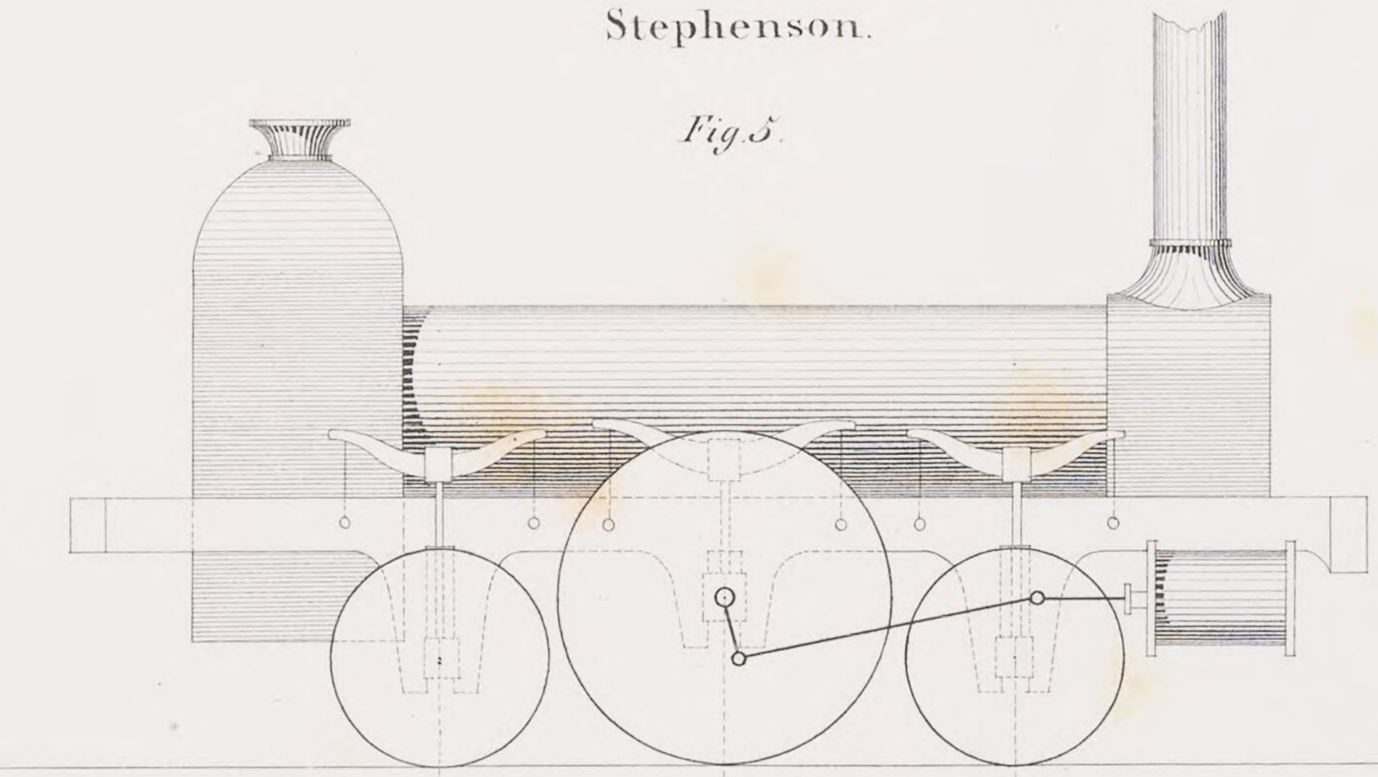
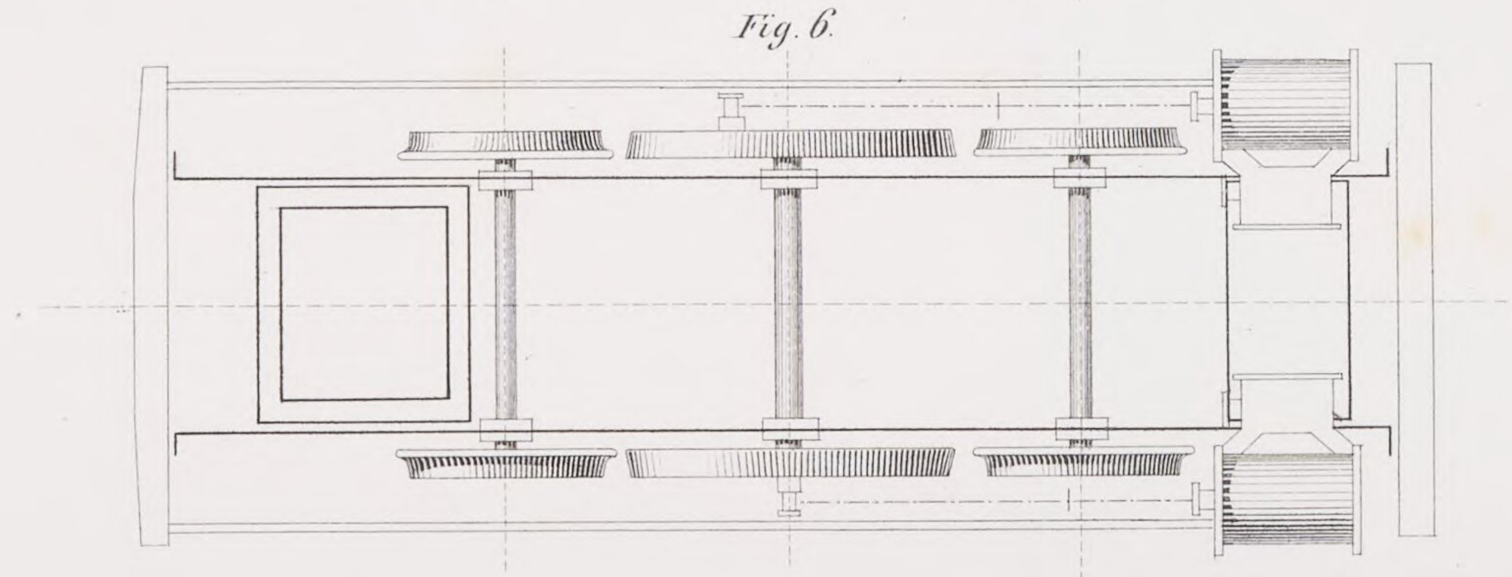


Fig. 6.



Stephenson

Fig. 7.

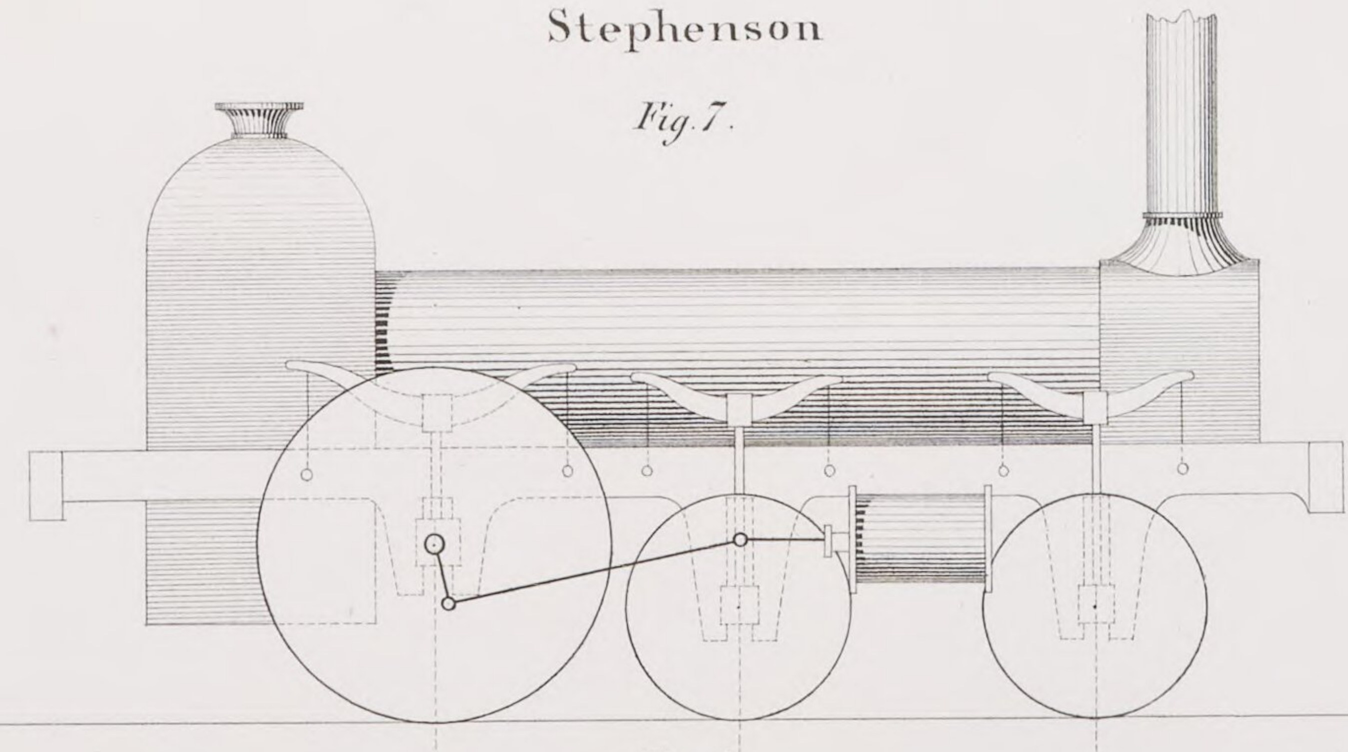
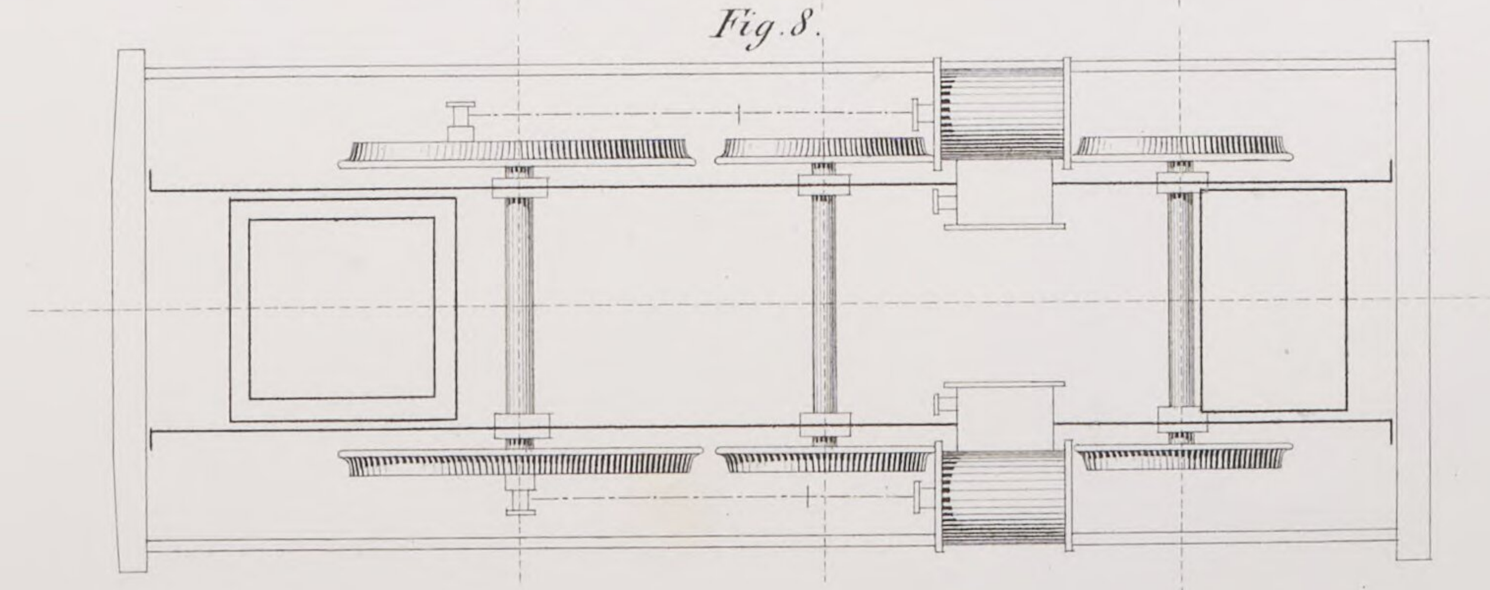


Fig. 8.



Tab. II.

Stephenson.

Fig. 5.

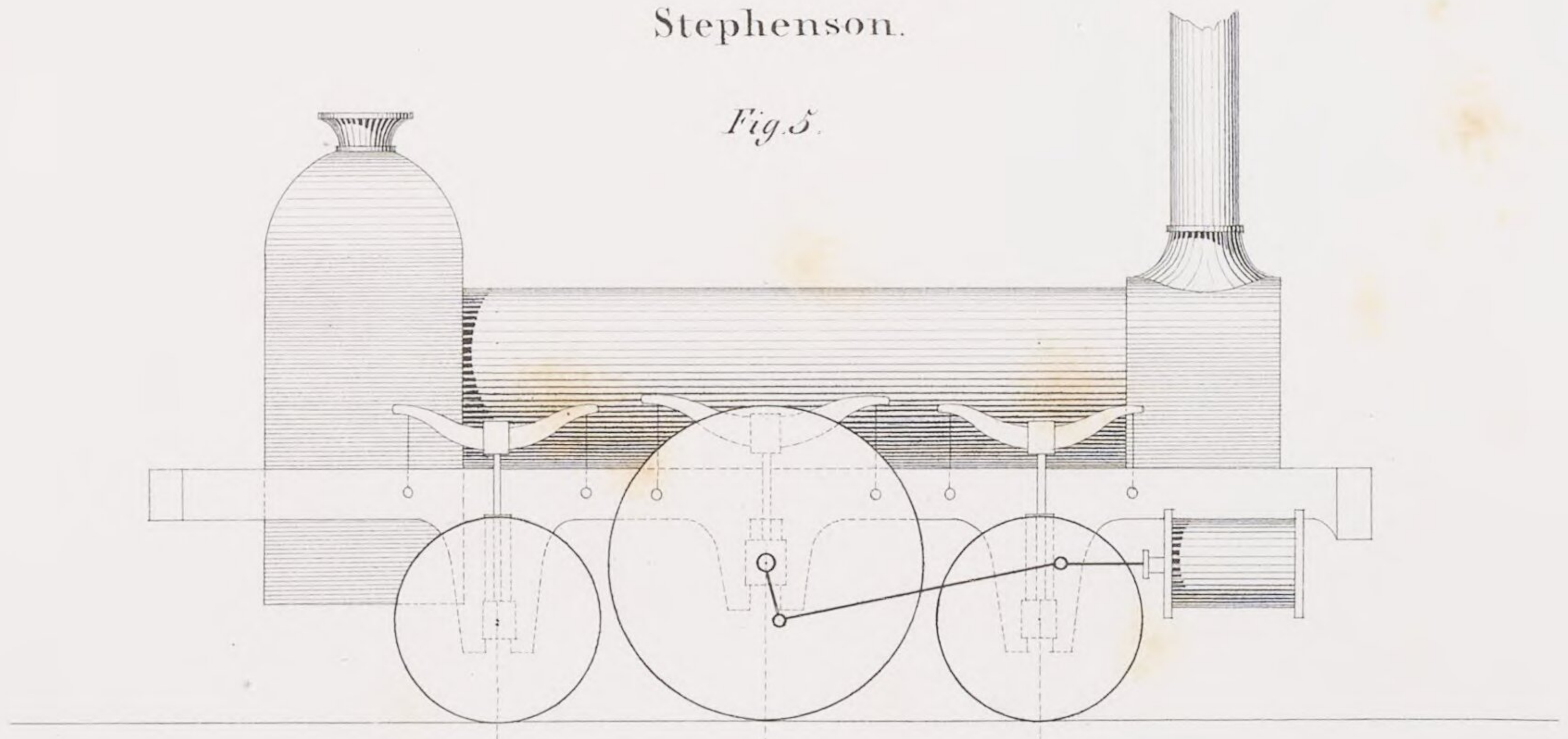
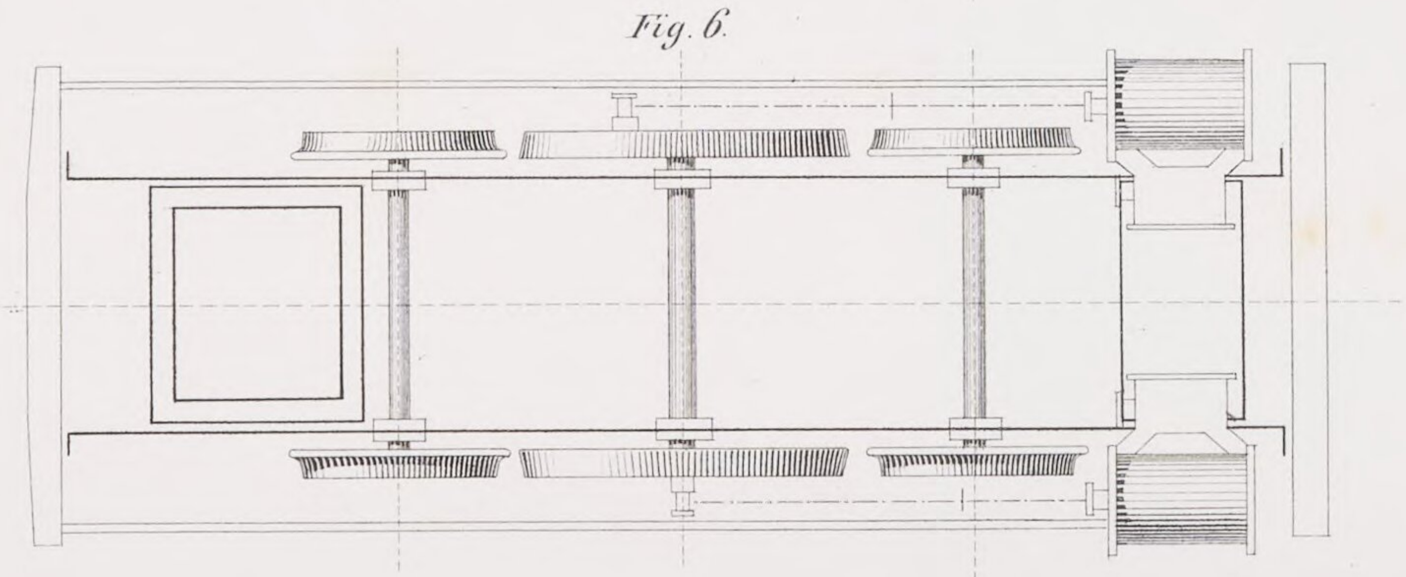


Fig. 6.



Stephenson

Fig. 7.

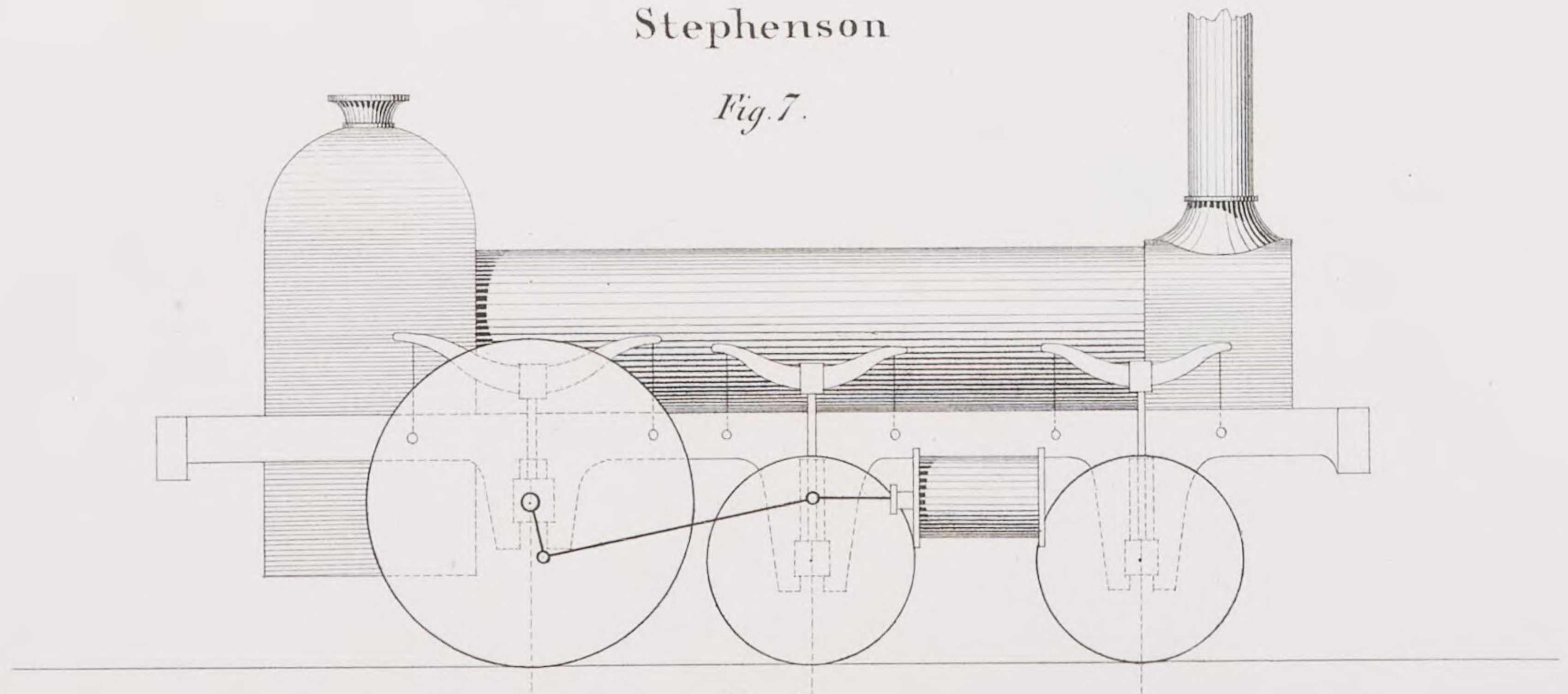
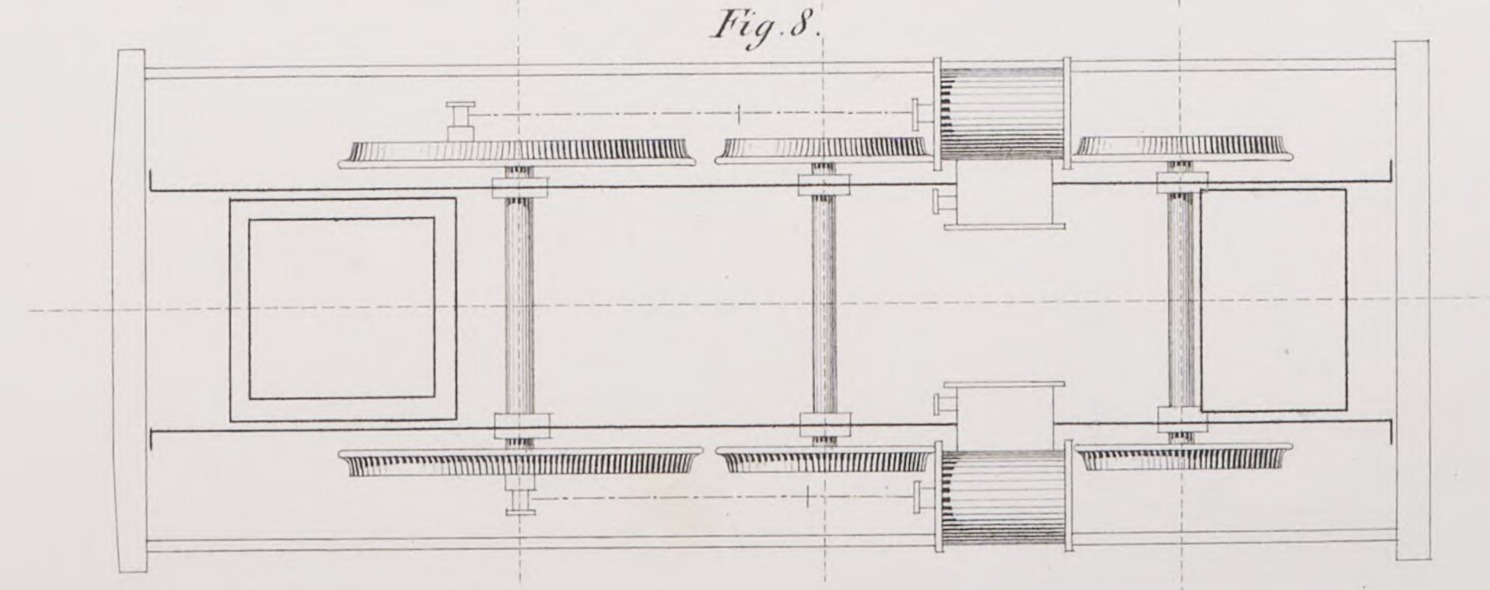


Fig. 8.



Stephenson.

Fig. 5.

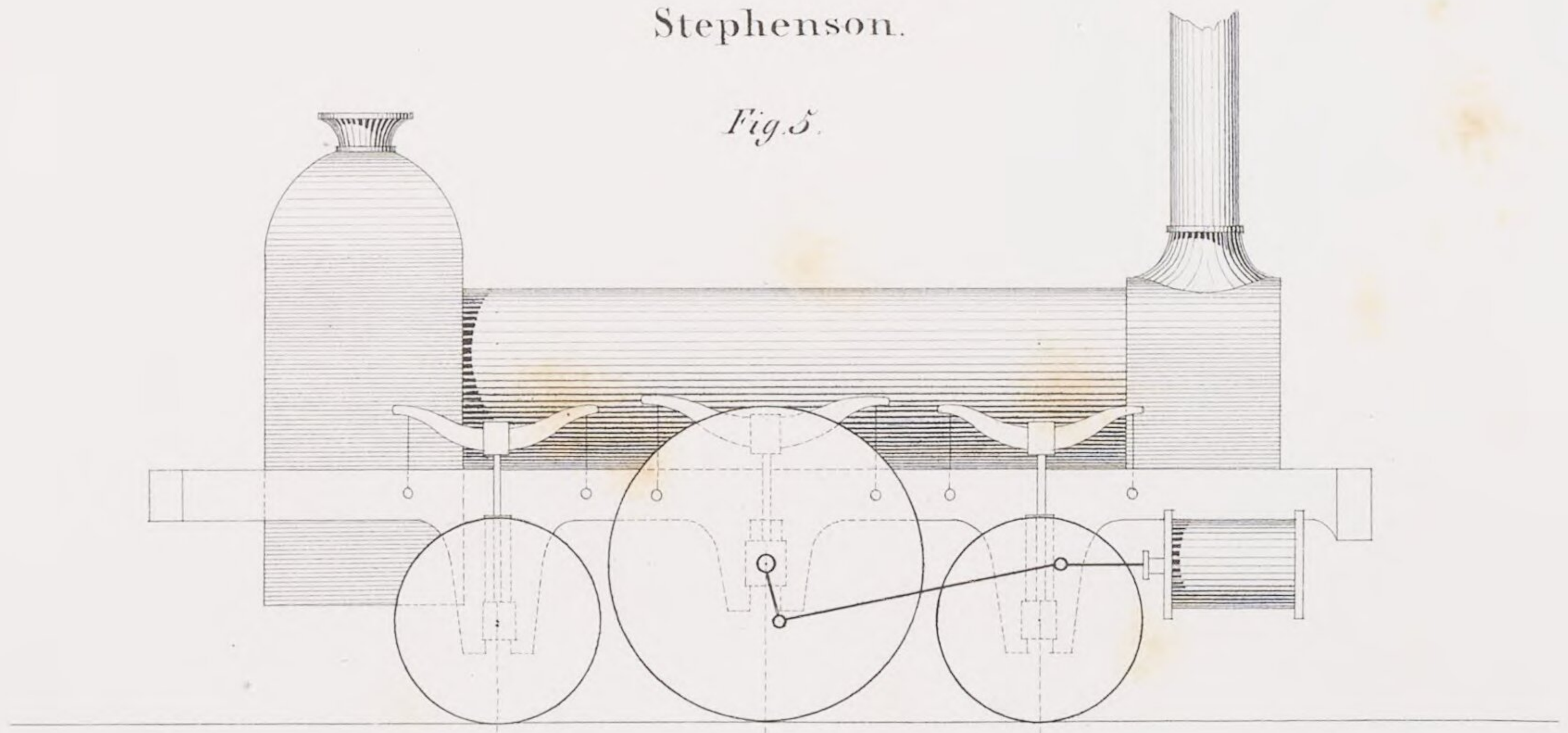
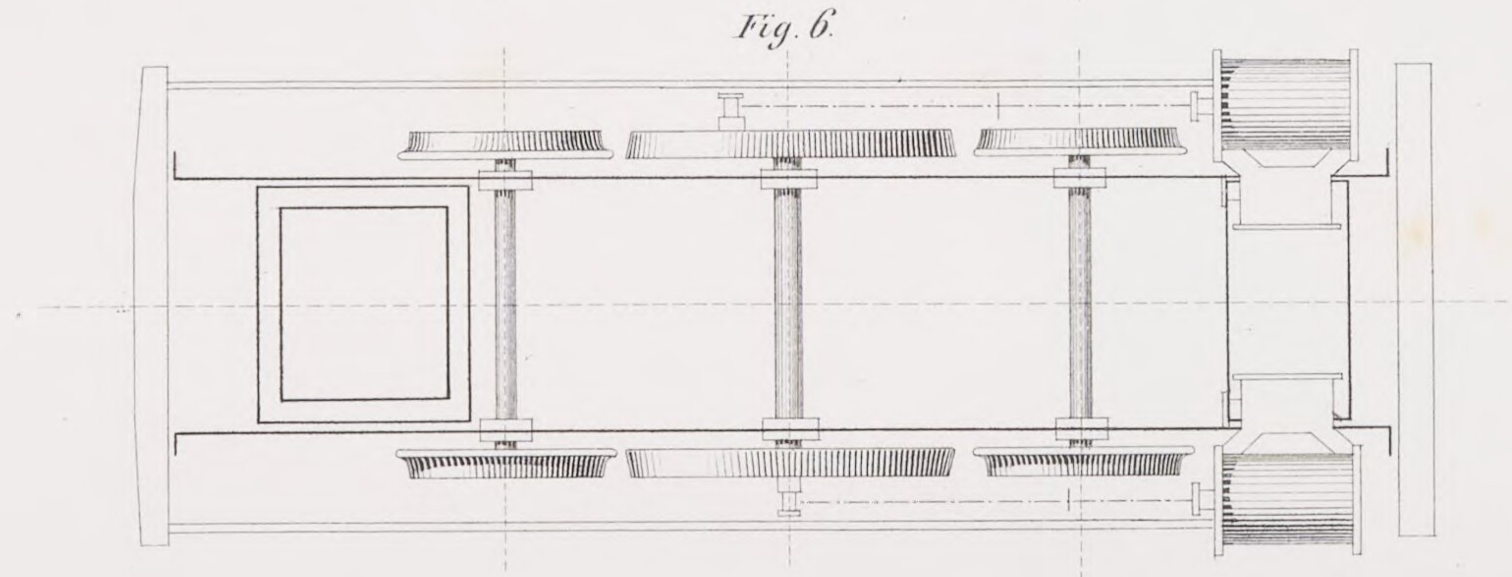


Fig. 6.



Stephenson

Fig. 7.

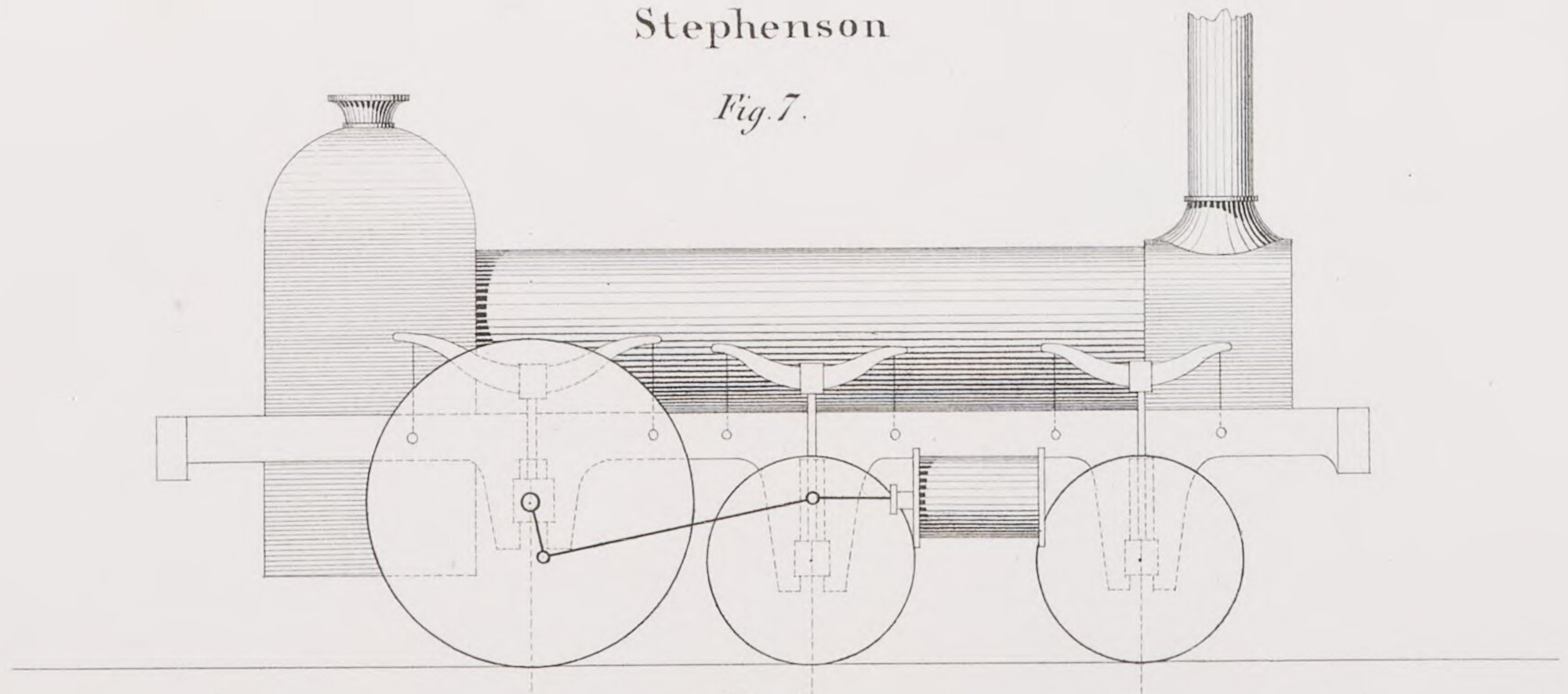
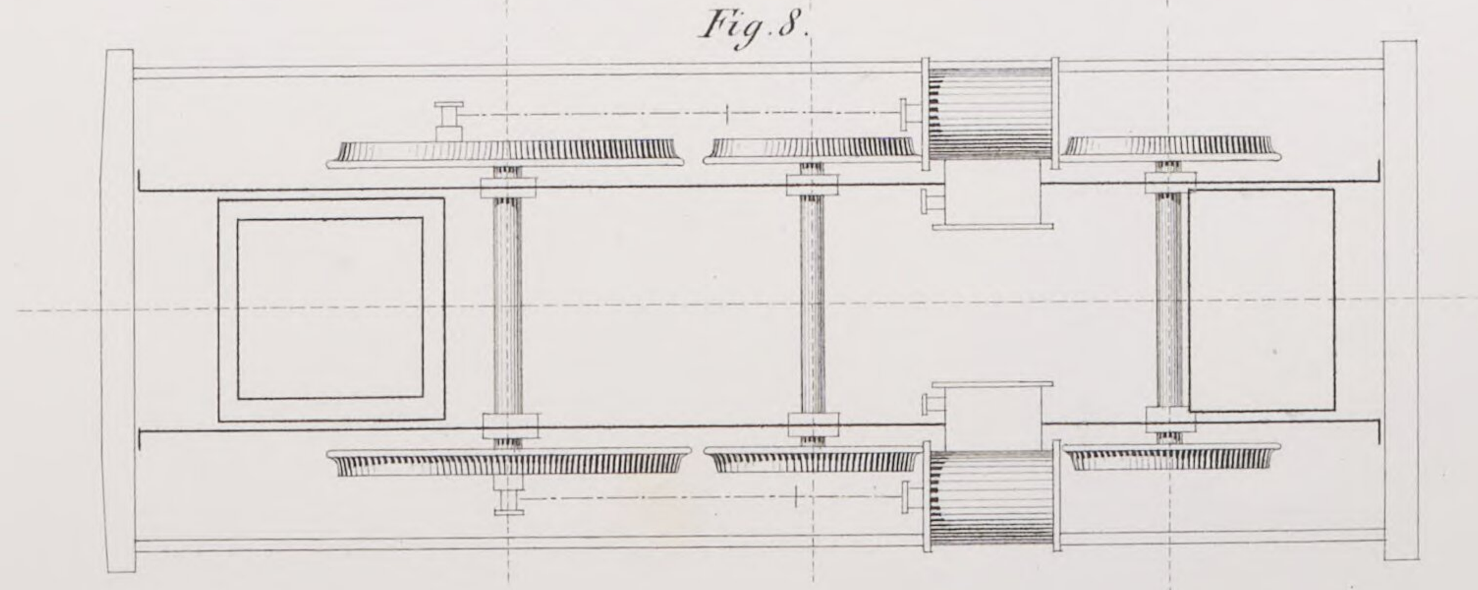


Fig. 8.



Tab. III.

Crampton

Fig. 9.

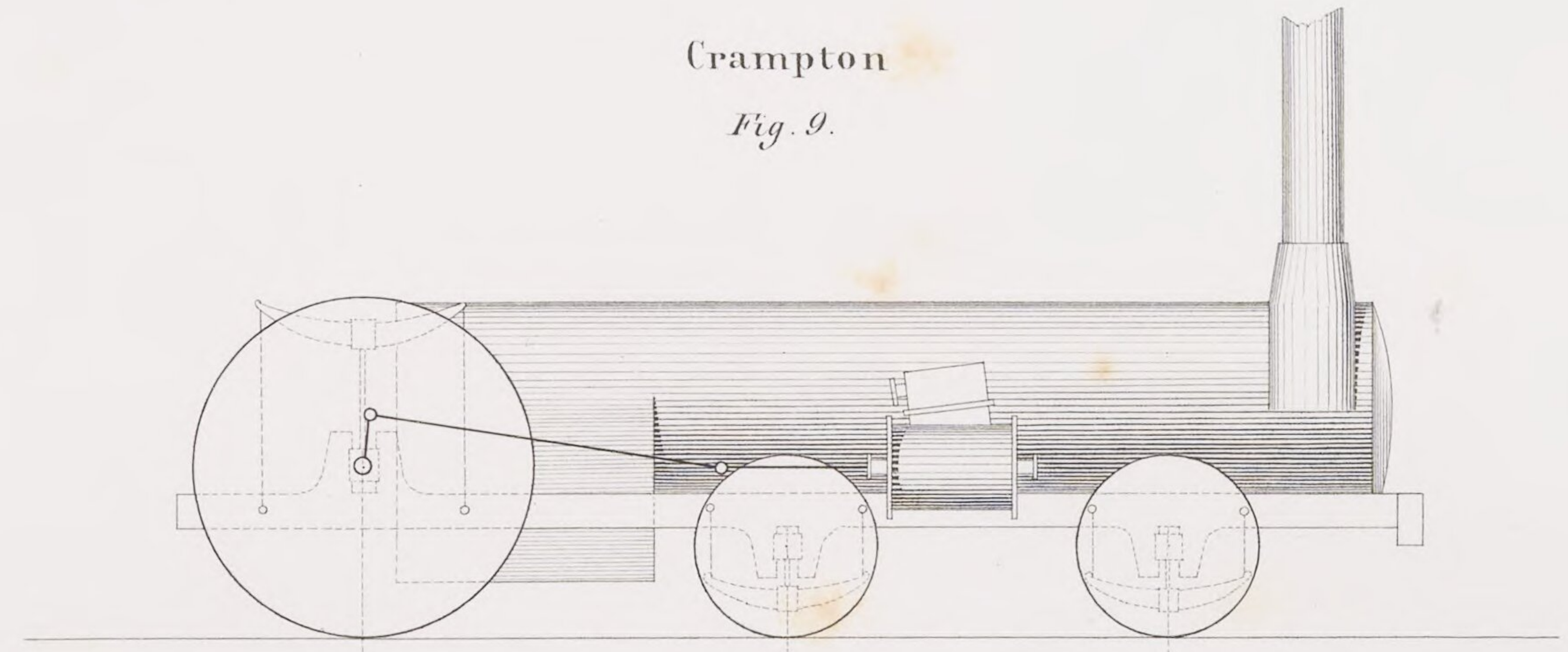
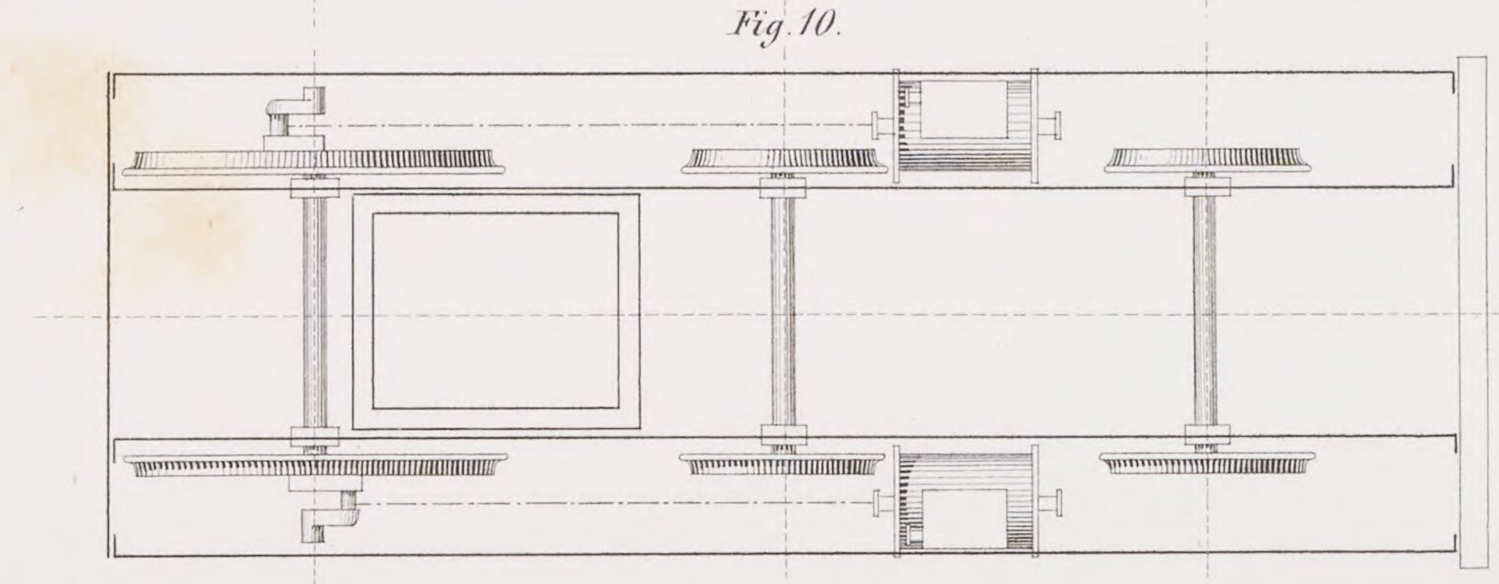


Fig. 10.



Crampton

Fig. 11.

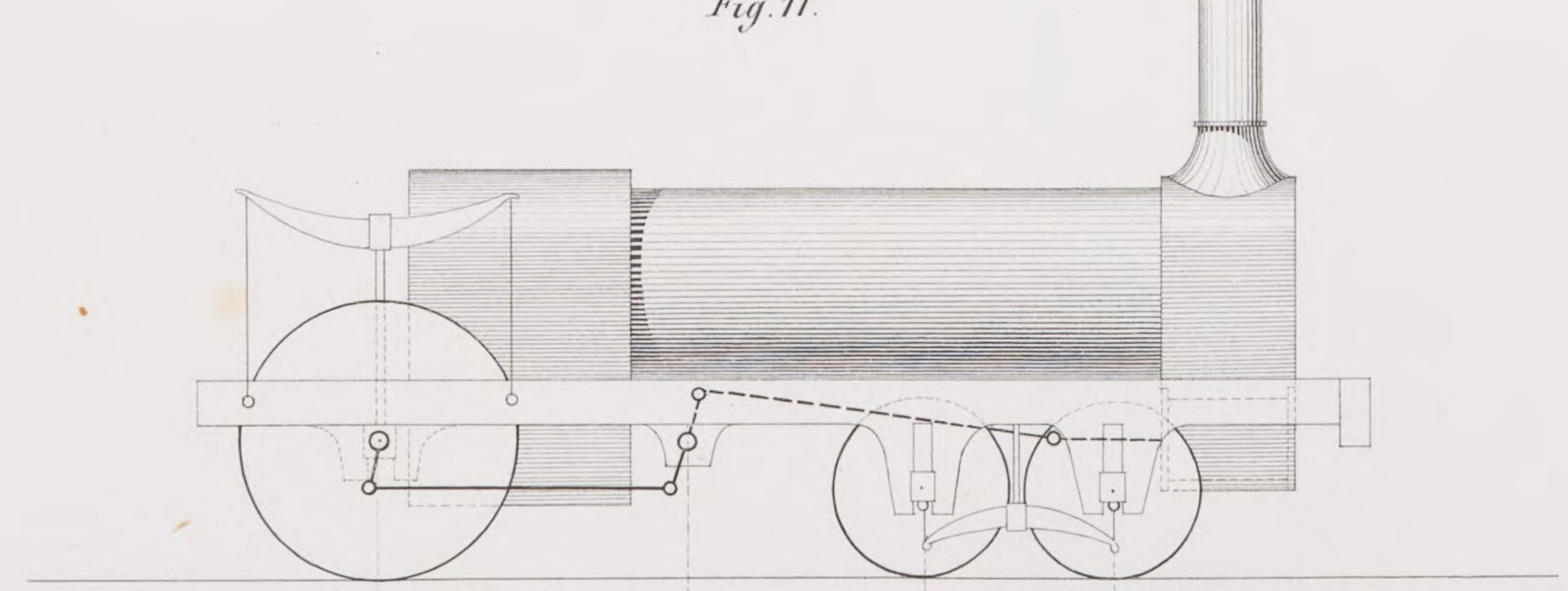
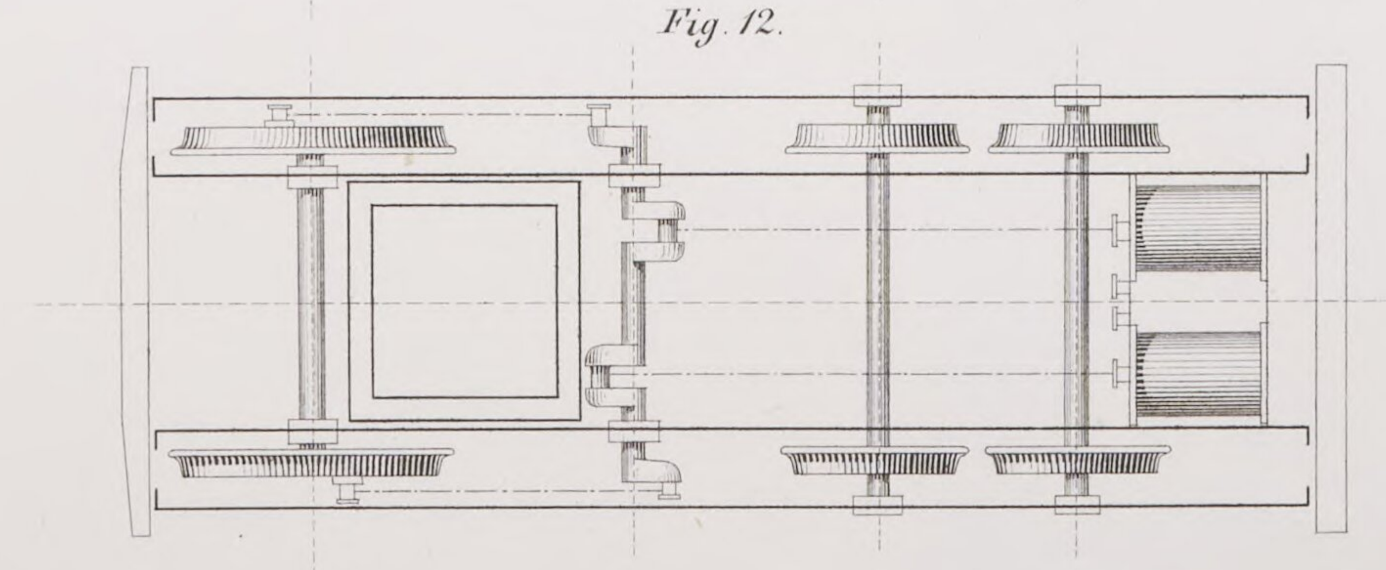


Fig. 12.



Tab. IV.

Stephenson

Fig. 13.

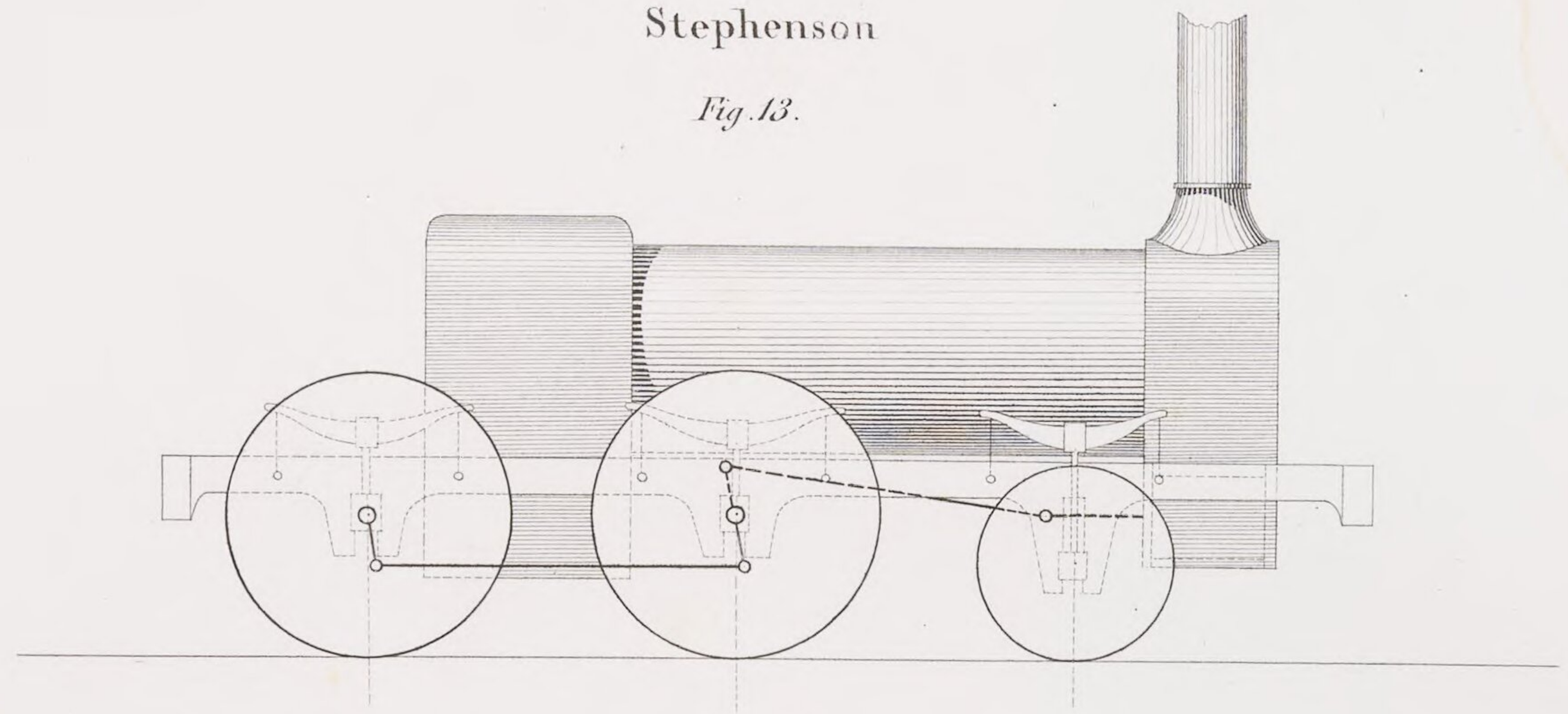
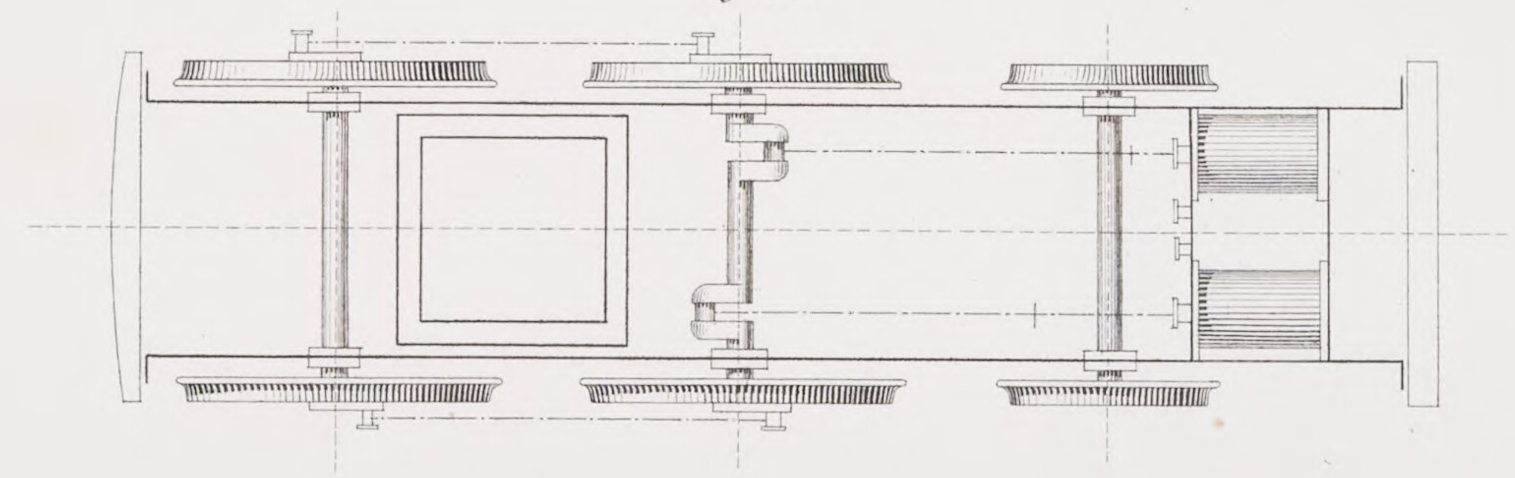


Fig. 14.



Stephenson

Fig. 15.

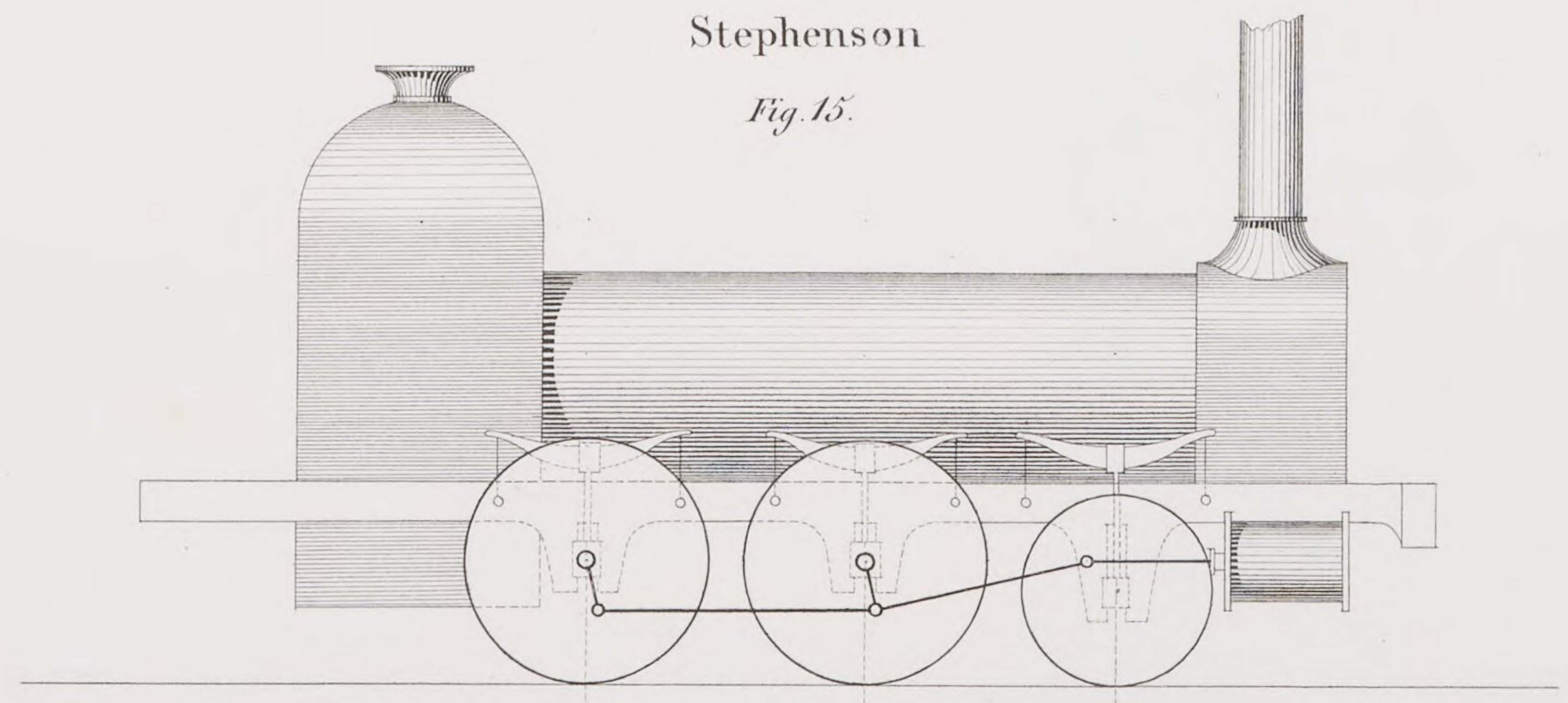
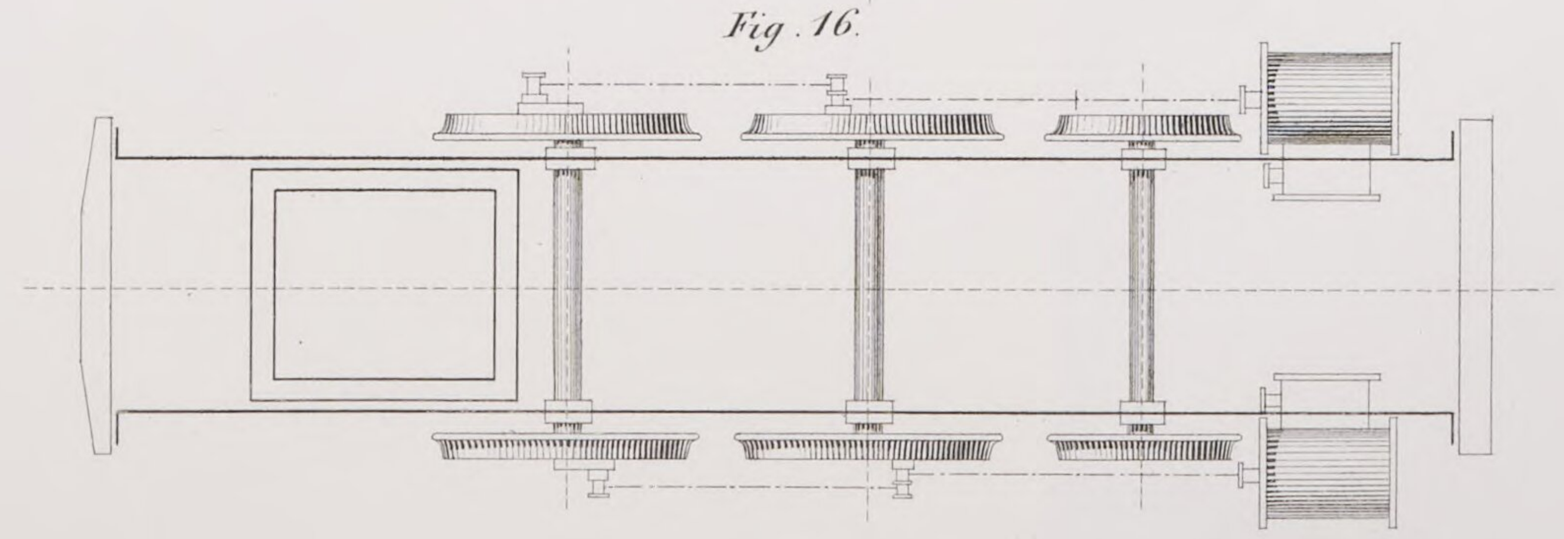


Fig. 16.



sculp L. Geißendorfer. Carlsruhe, W. Creuzbauer's Lith.

Norris.

Fig. 17.

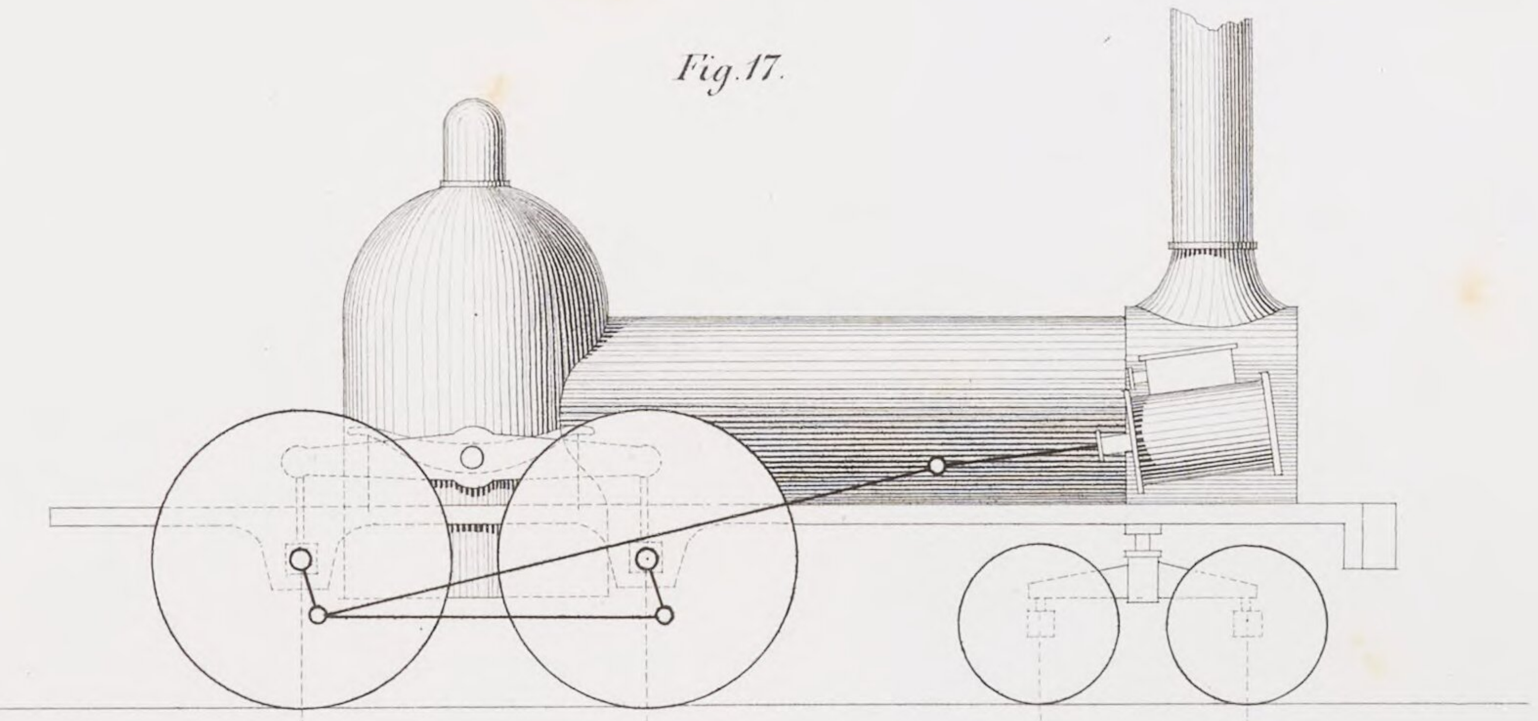
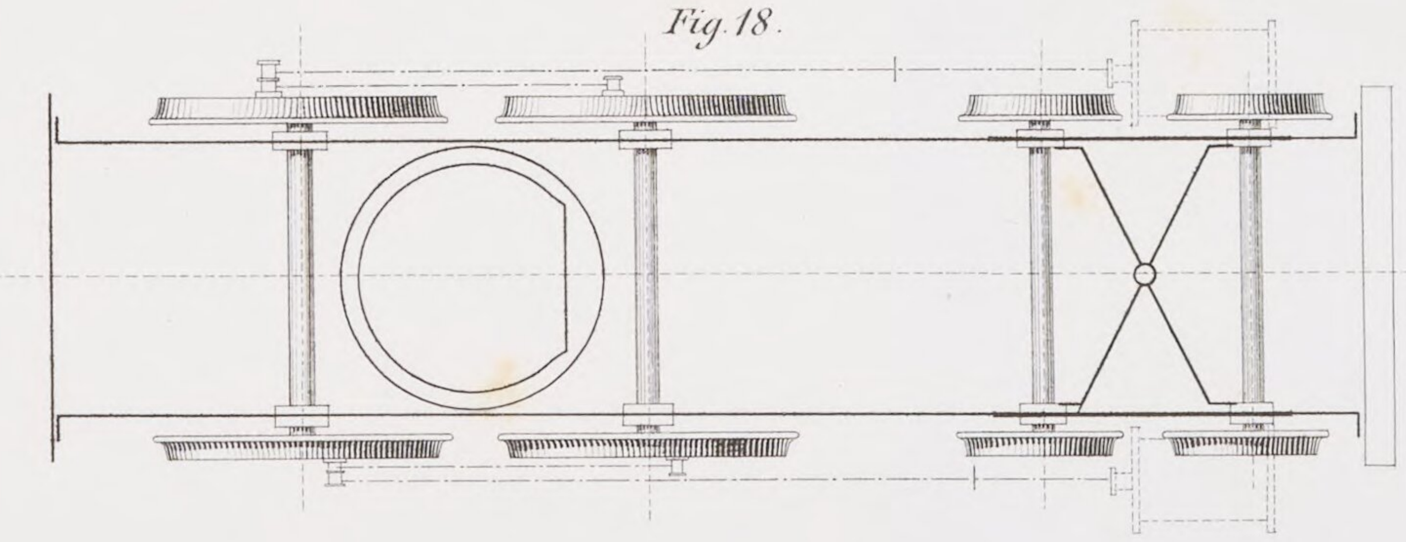


Fig. 18.



Würtemberg.

Fig. 19.

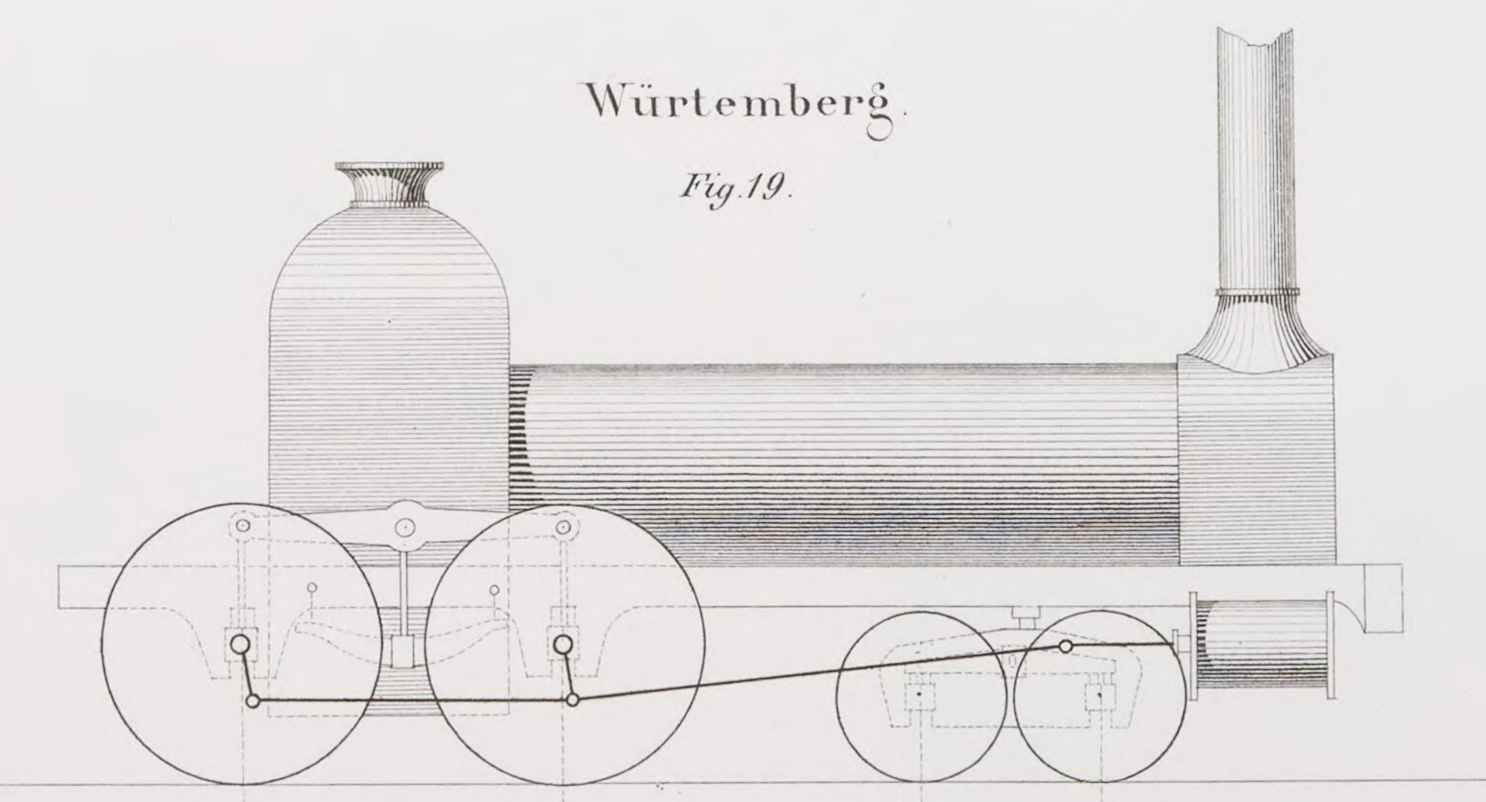
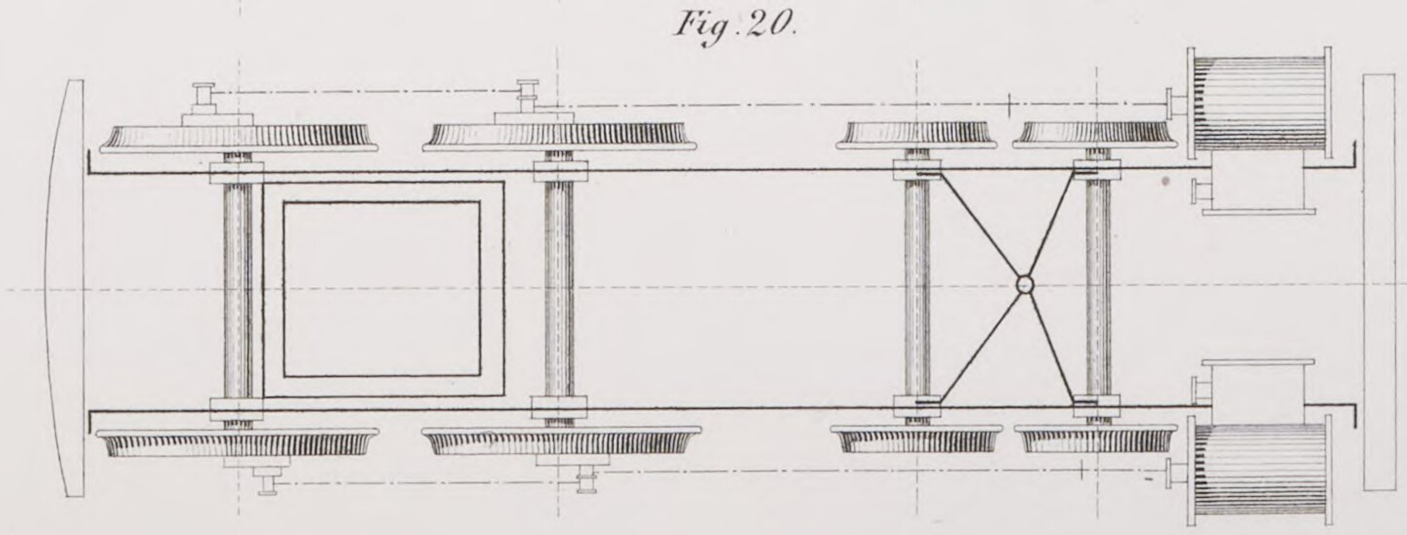


Fig. 20.



Tab.VI.

Stephenson.

Fig. 21.

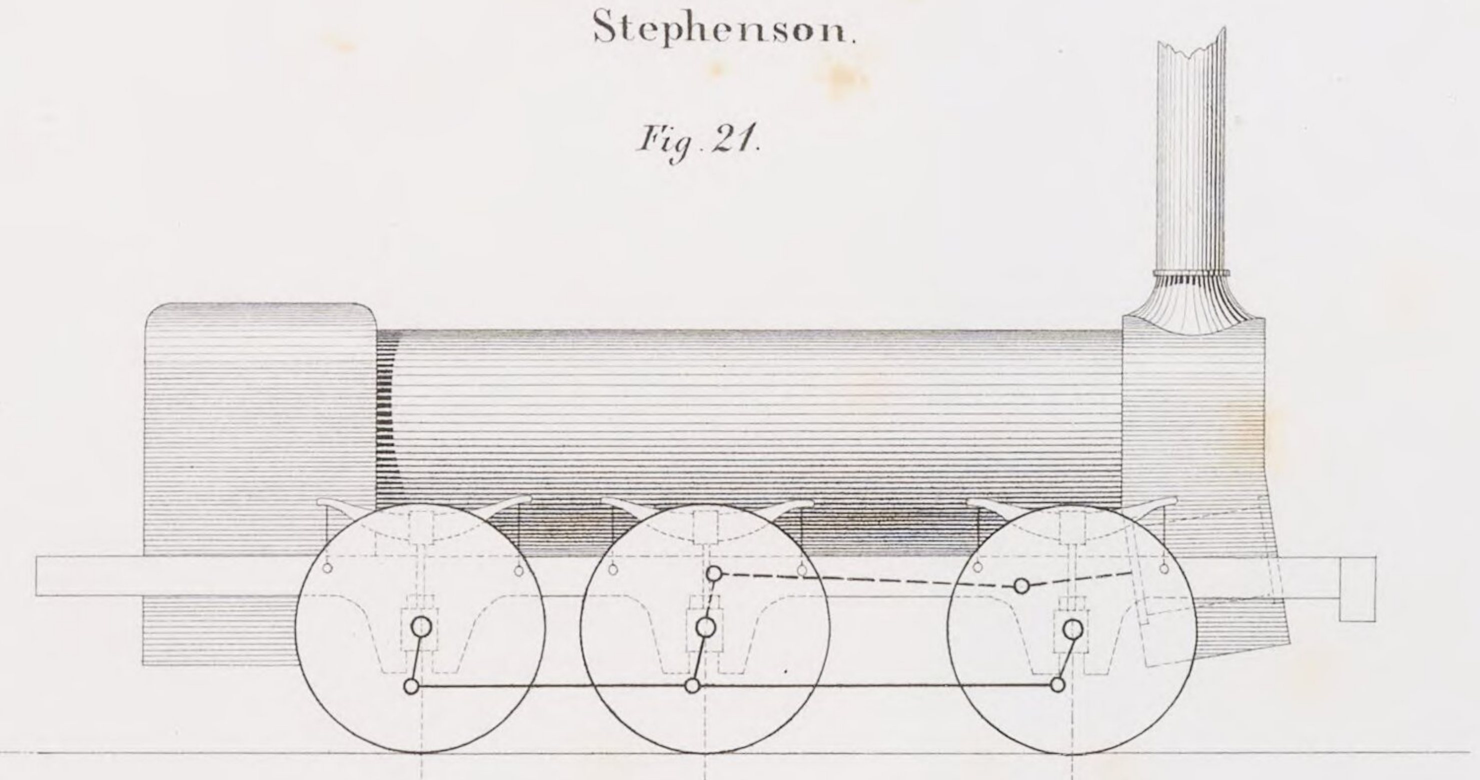
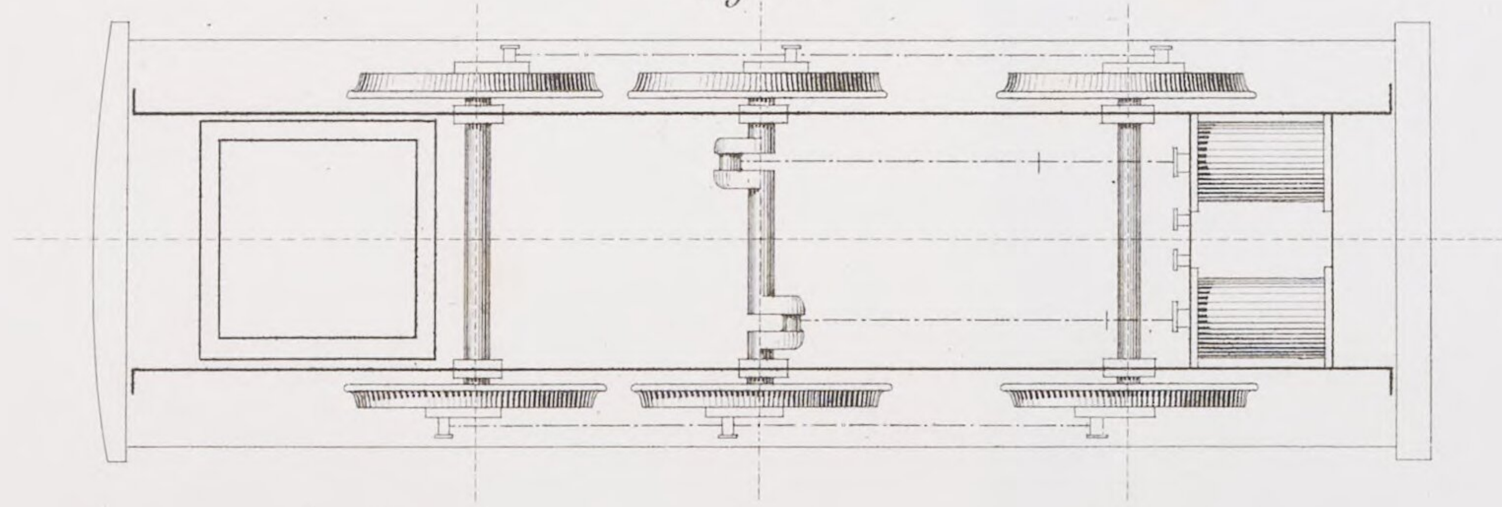


Fig. 22.



Alp

Fig. 23.

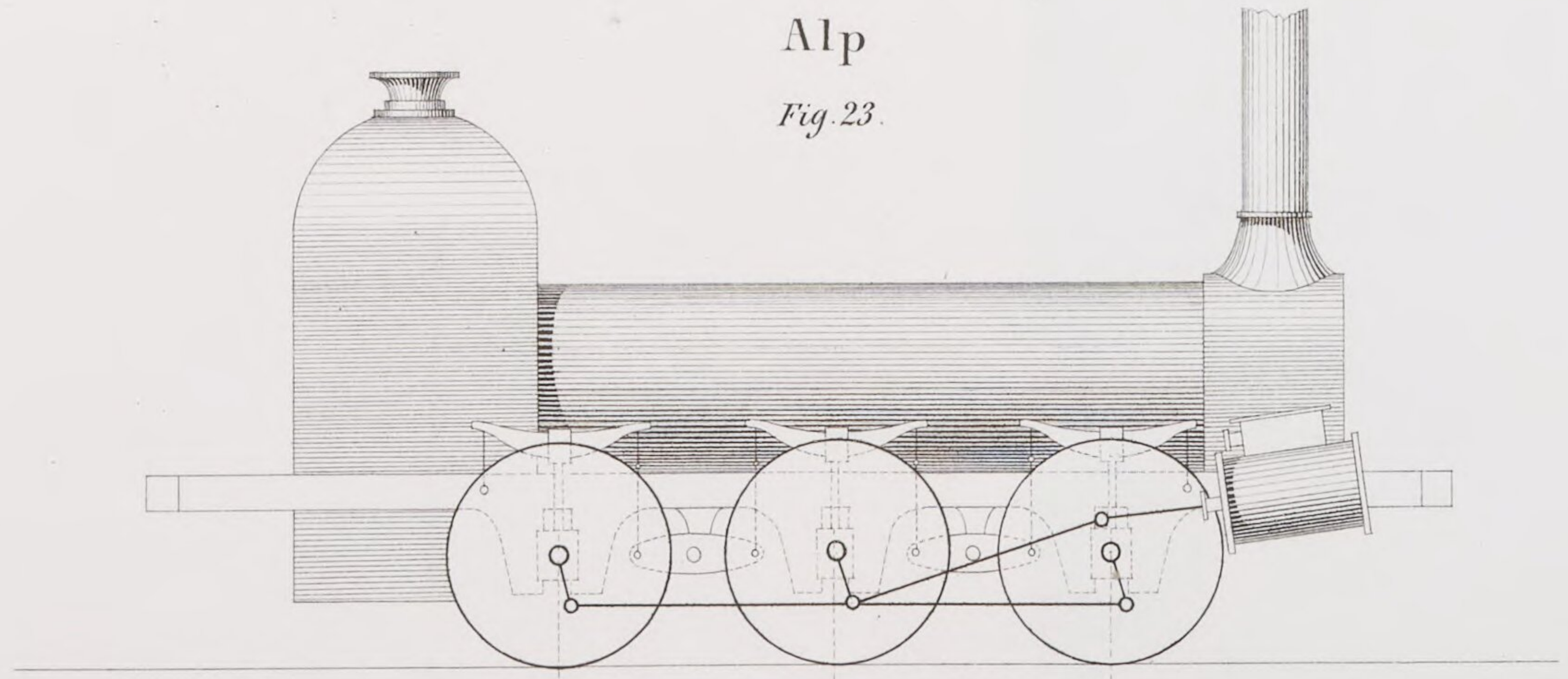
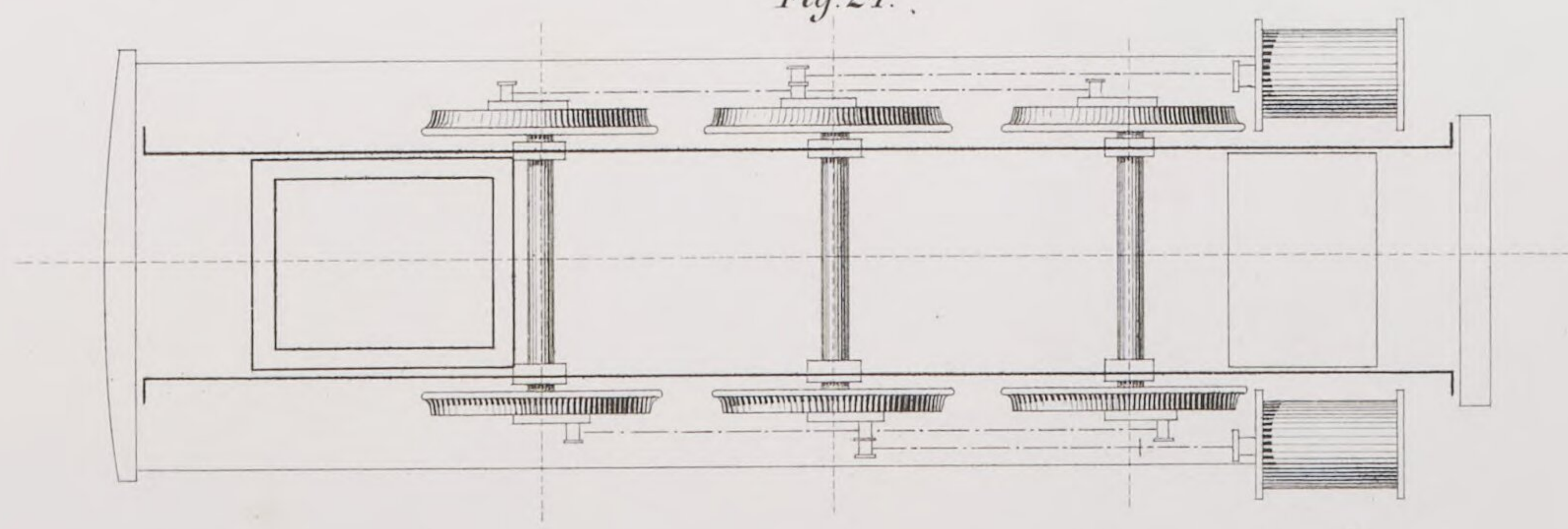


Fig. 24.



Sömering Locomotive,
System Engerth.

Fig. 25.

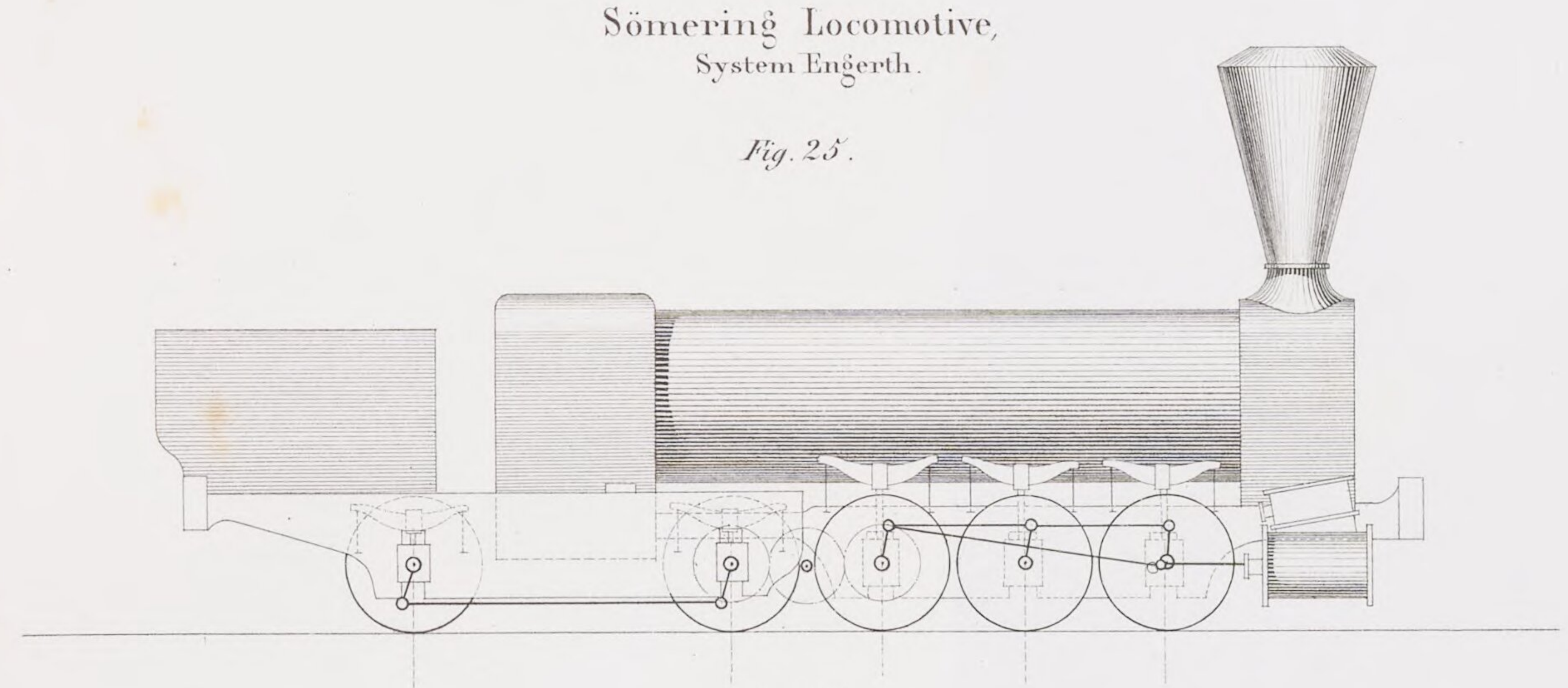
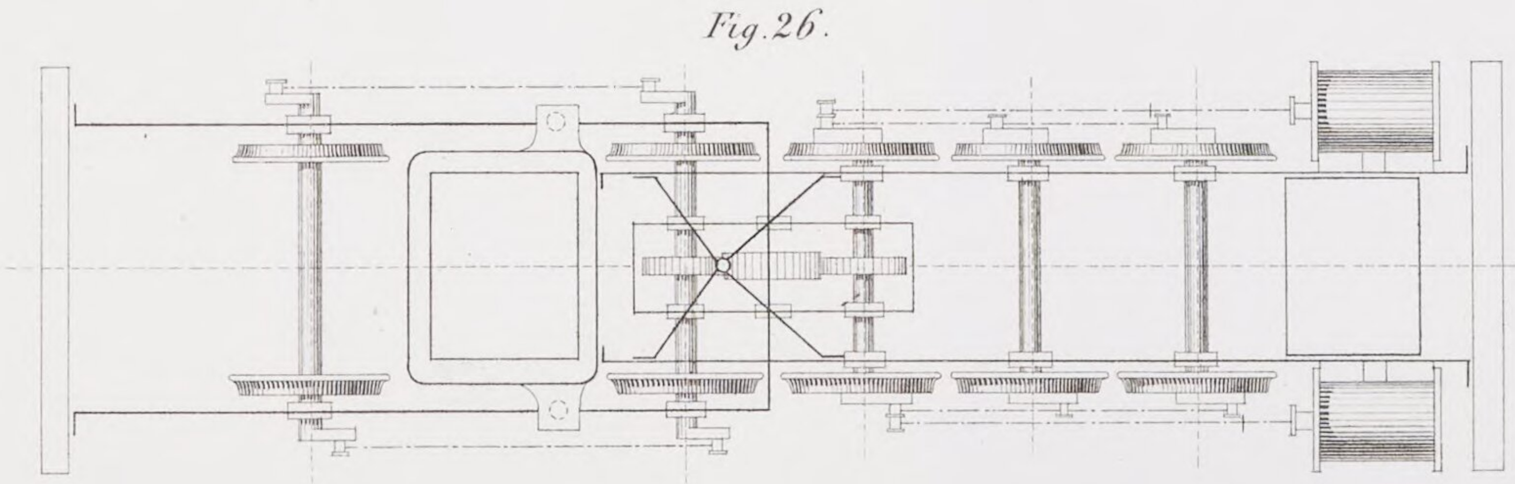


Fig. 26.



Crampton modifizirt.

Fig. 27.

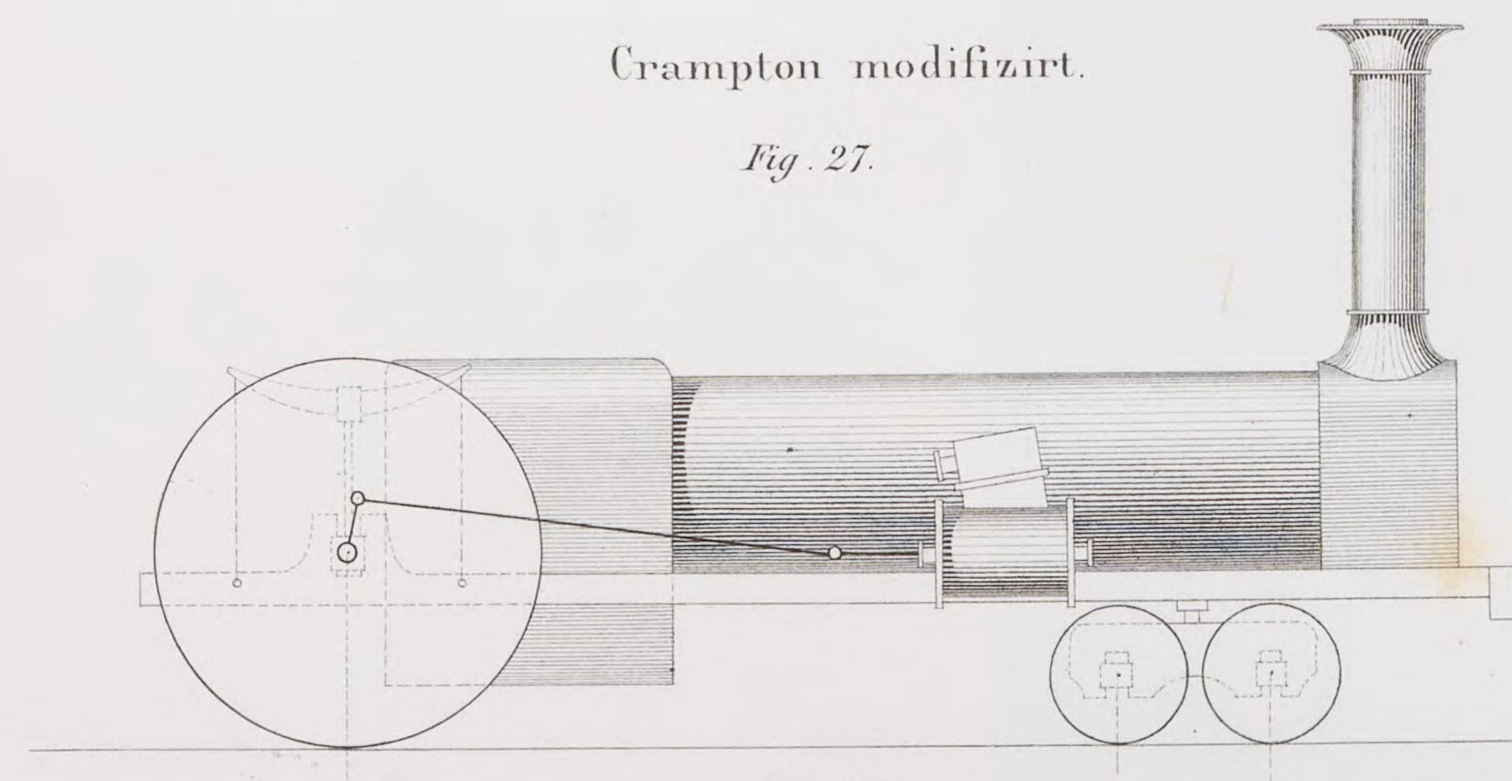
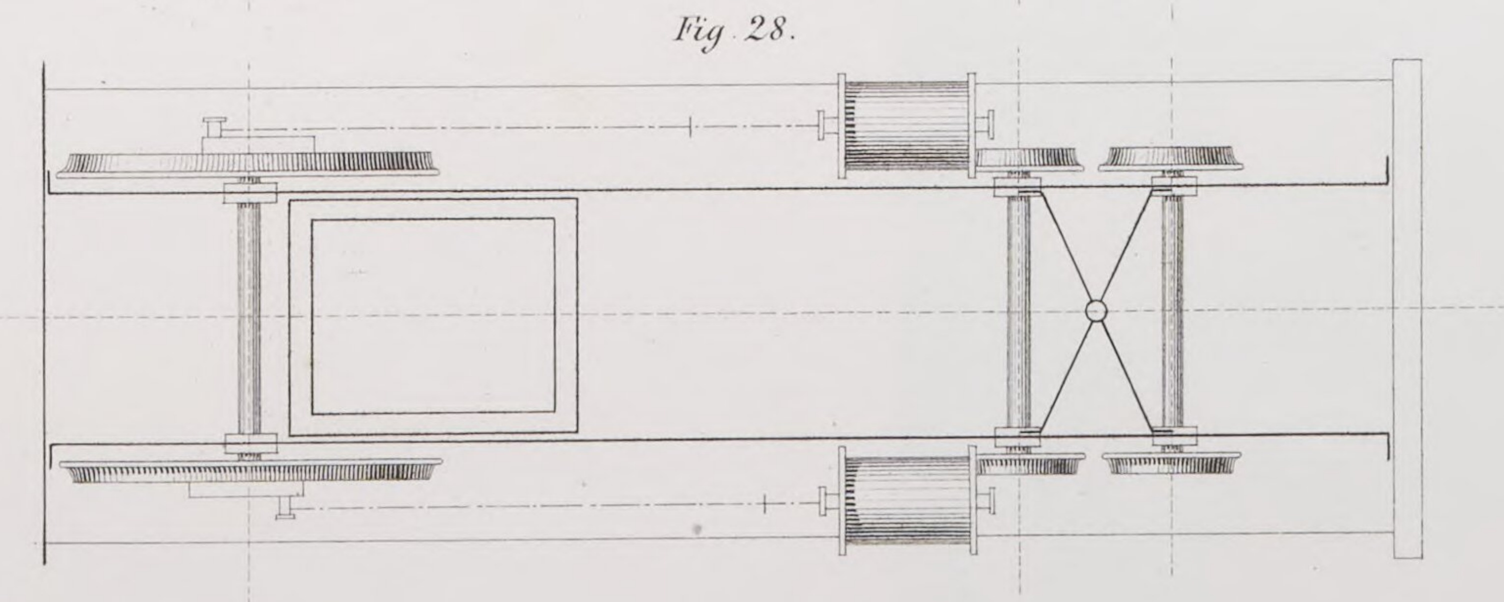


Fig 28.



Würtemberg modifizirt.

Fig. 29.

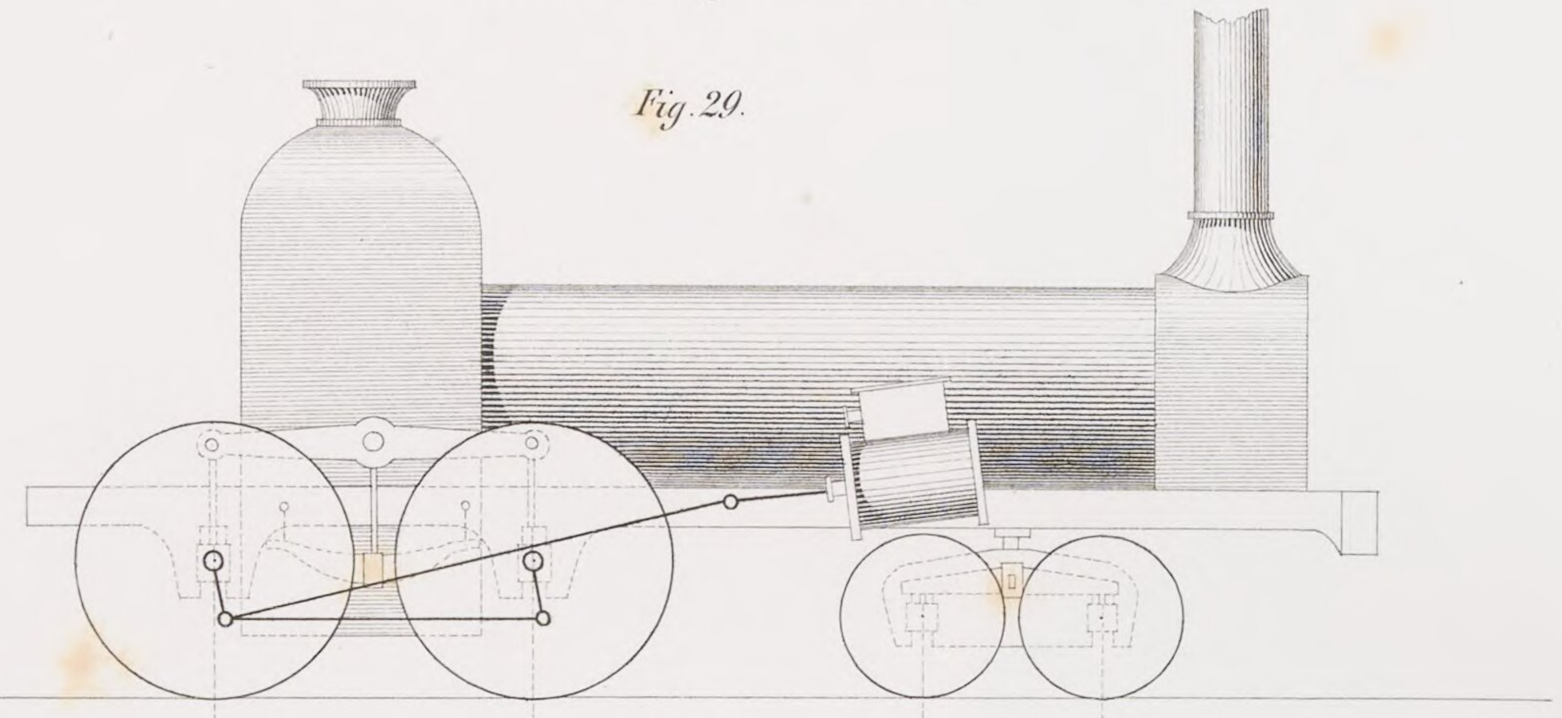
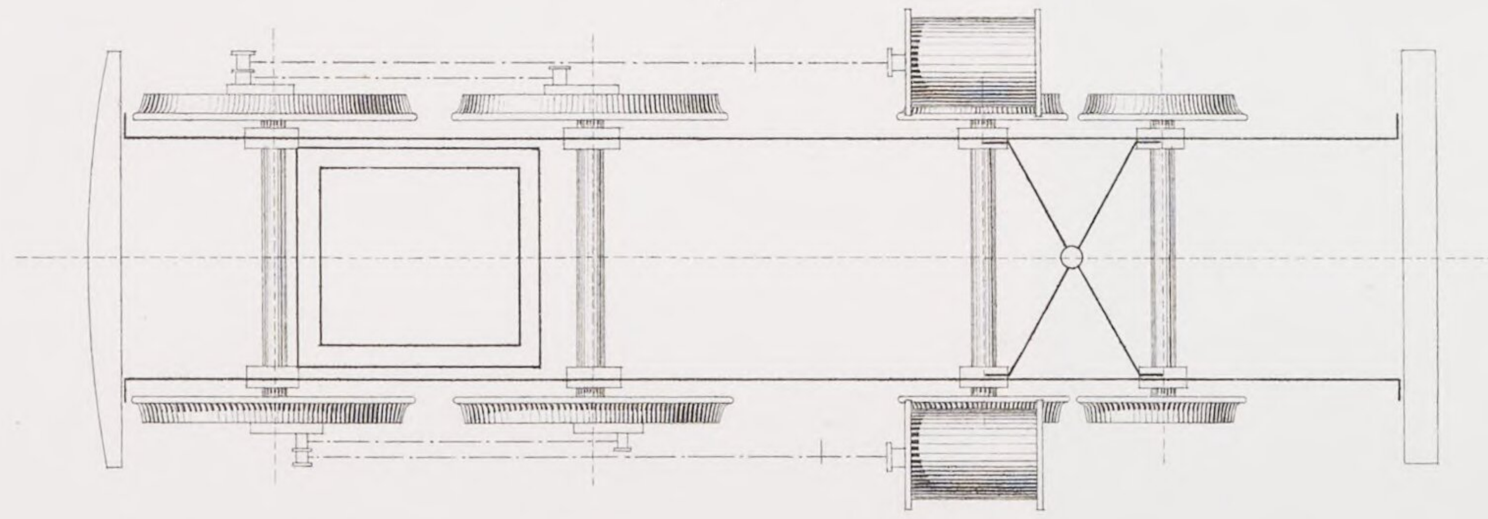


Fig. 30.



Locomotive mit Schleifenbewegung.

Fig. 31.

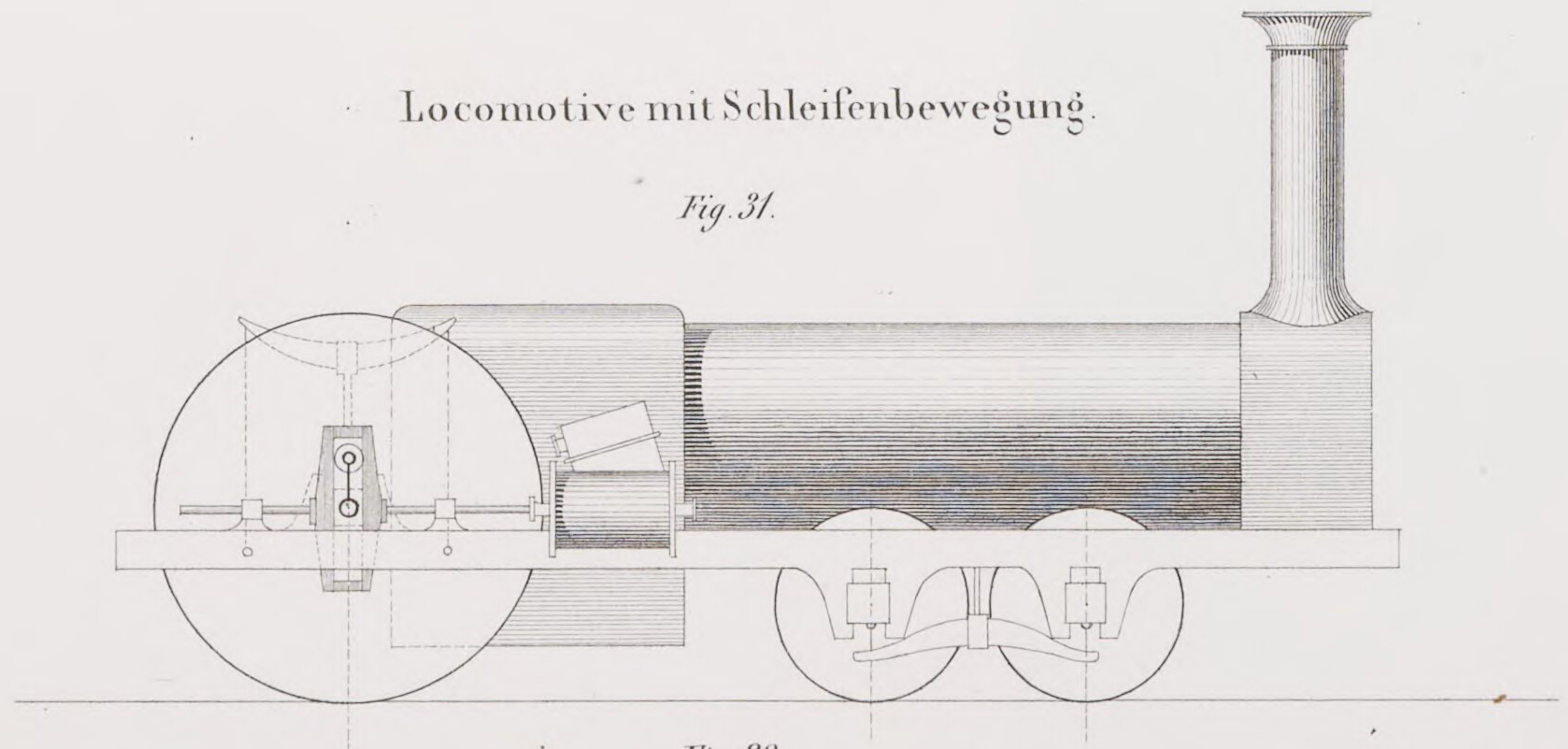
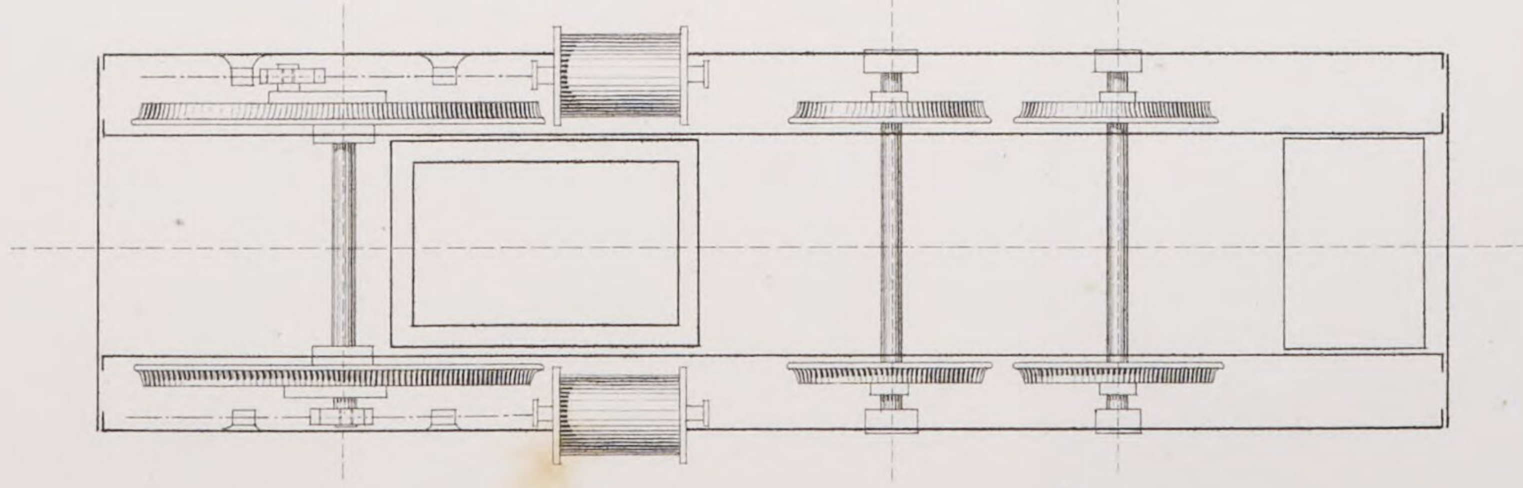
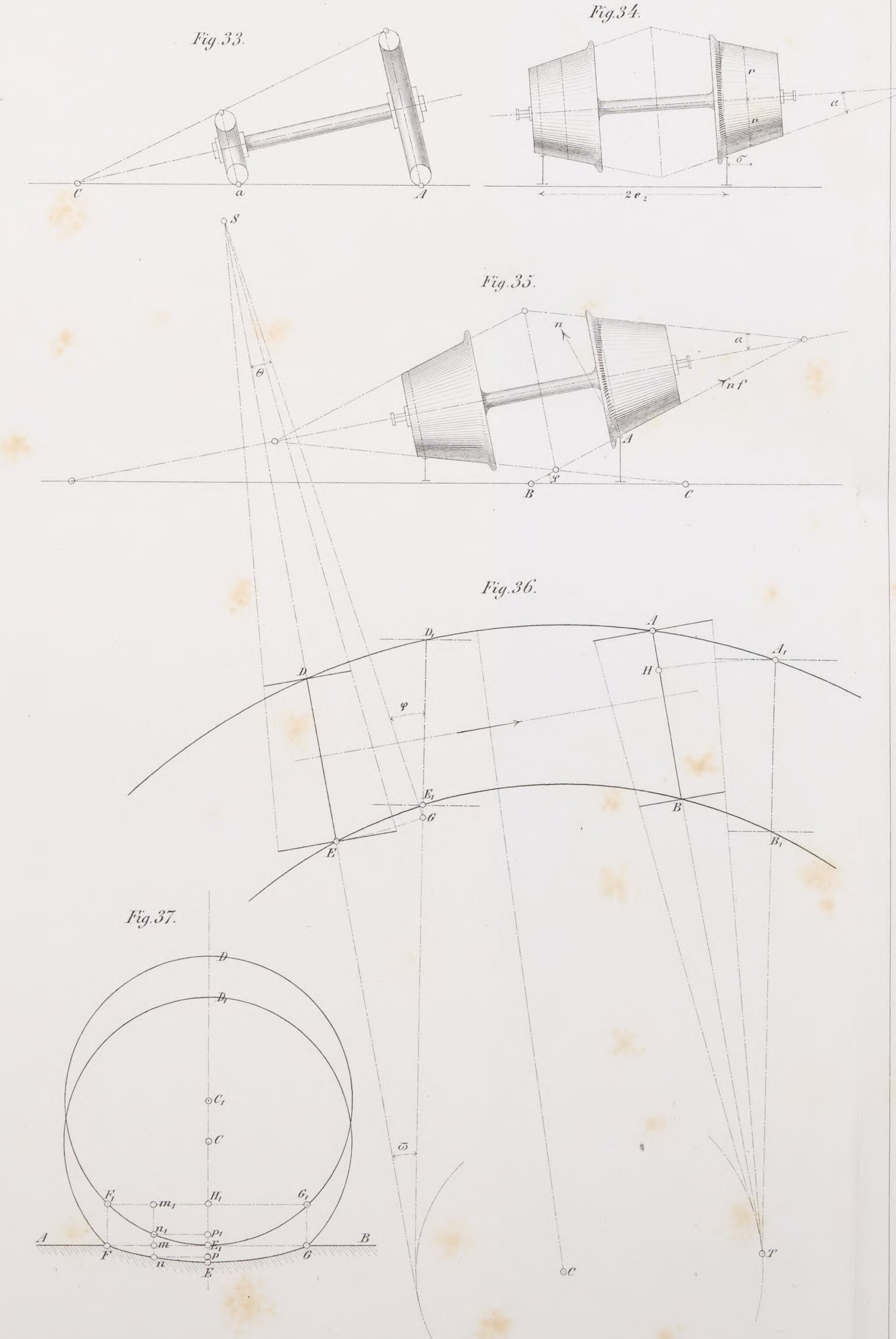


Fig. 32.



Tab. IX.



Tab. X.

Fig. 38.

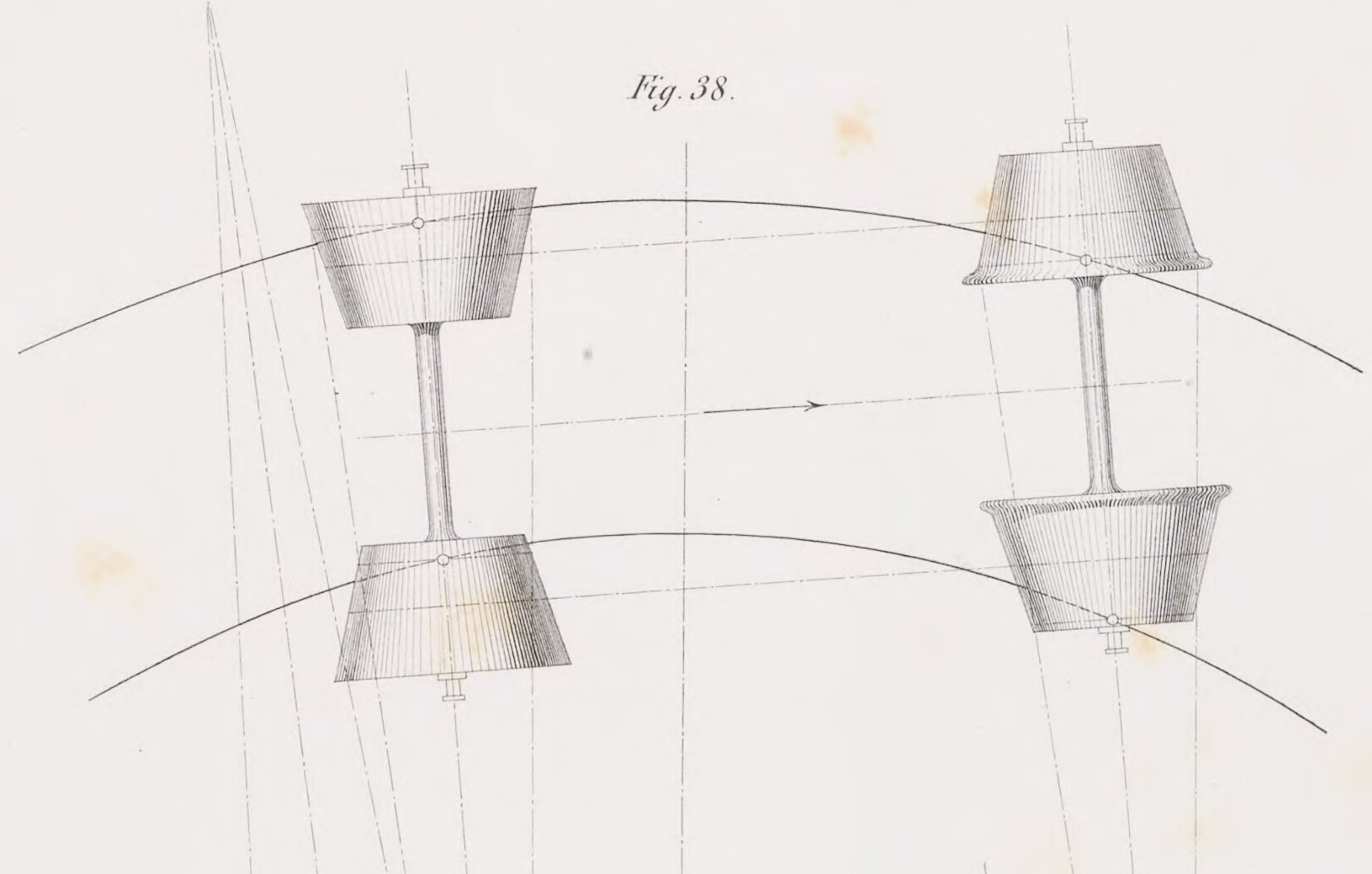


Fig. 39.

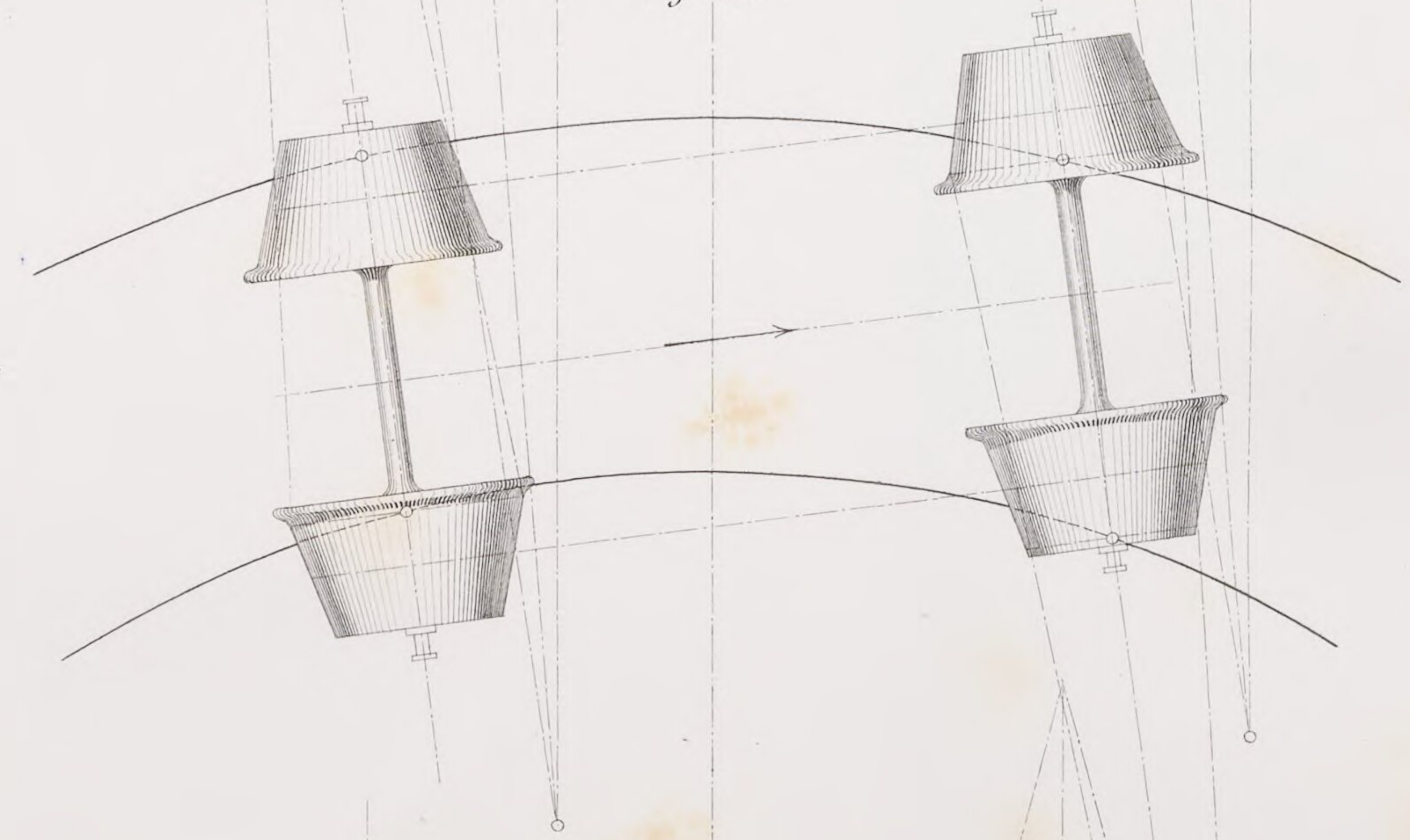
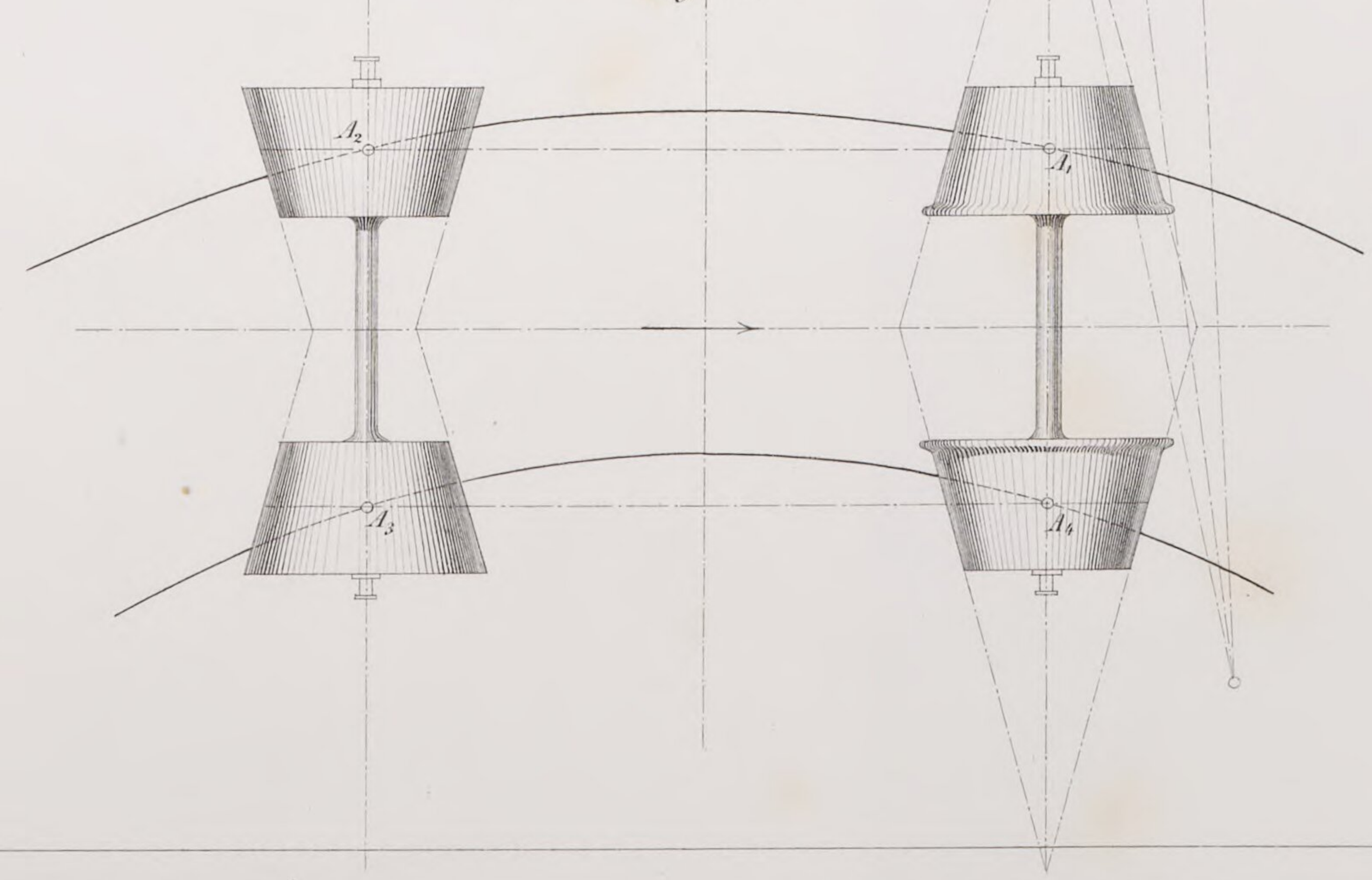


Fig. 40.



Lith. Anst. v. Creuzbauer in Carlsruhe.

Tab.XI

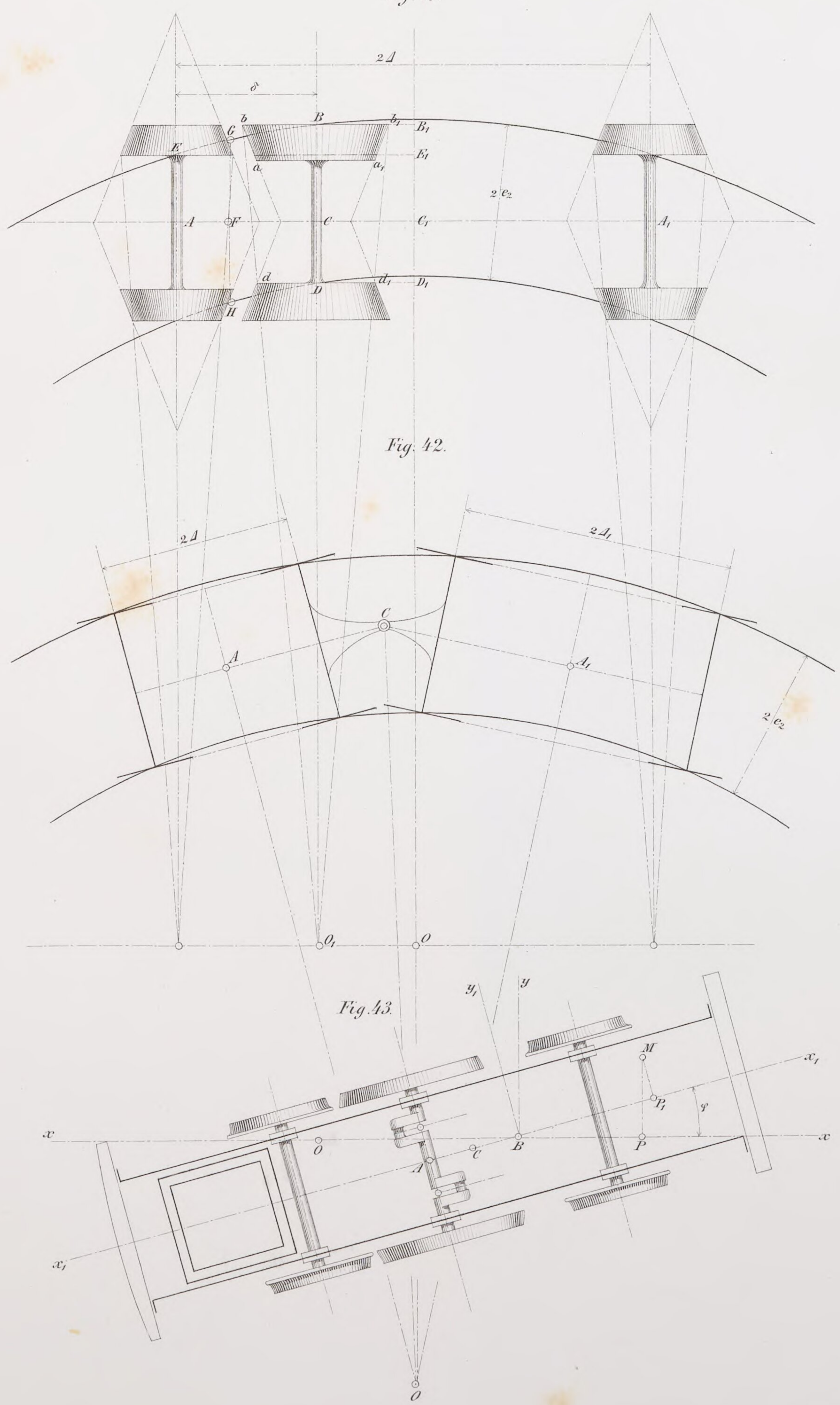
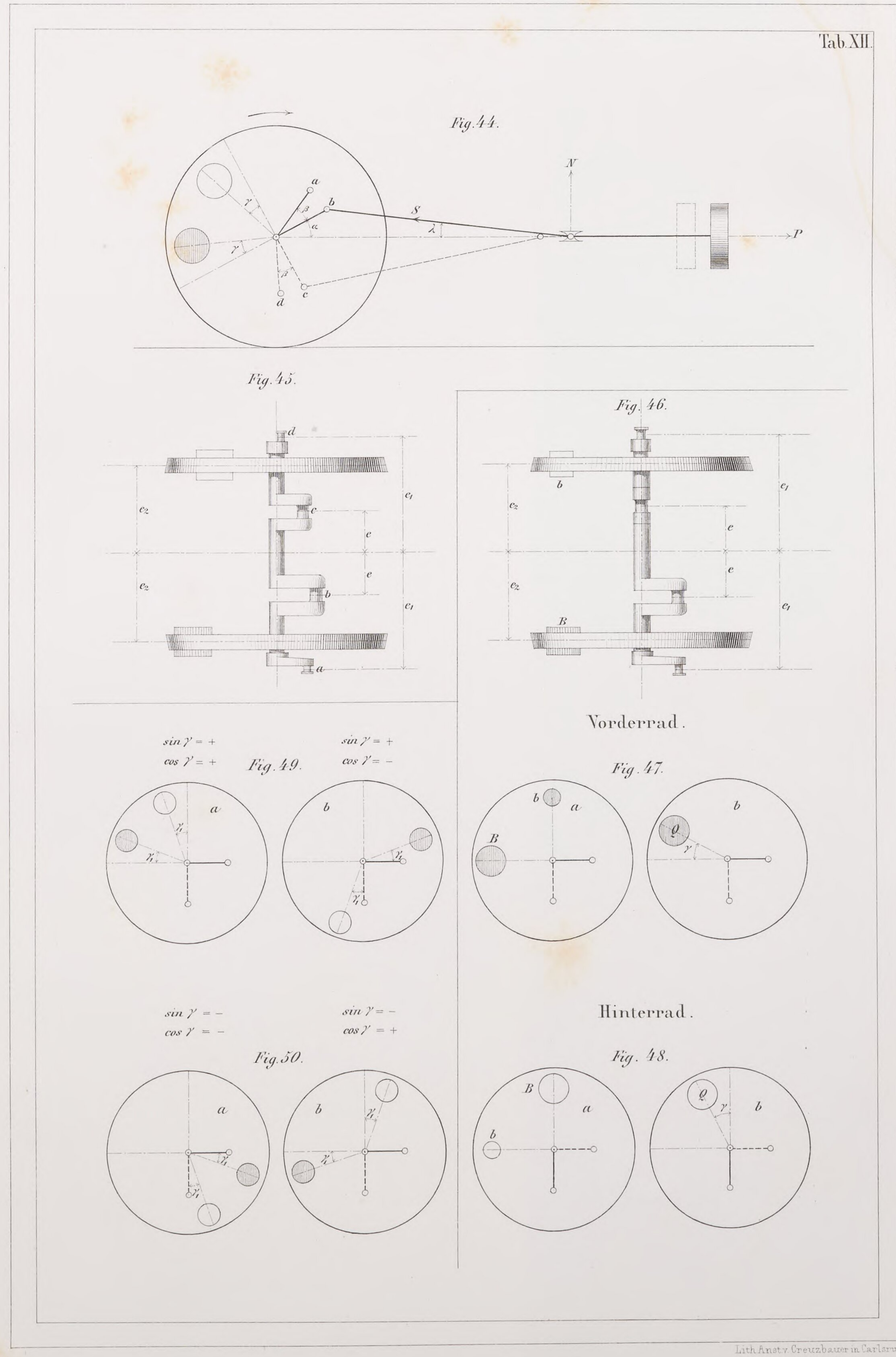


Fig. 41.

Fig. 42.

Fig. 43.

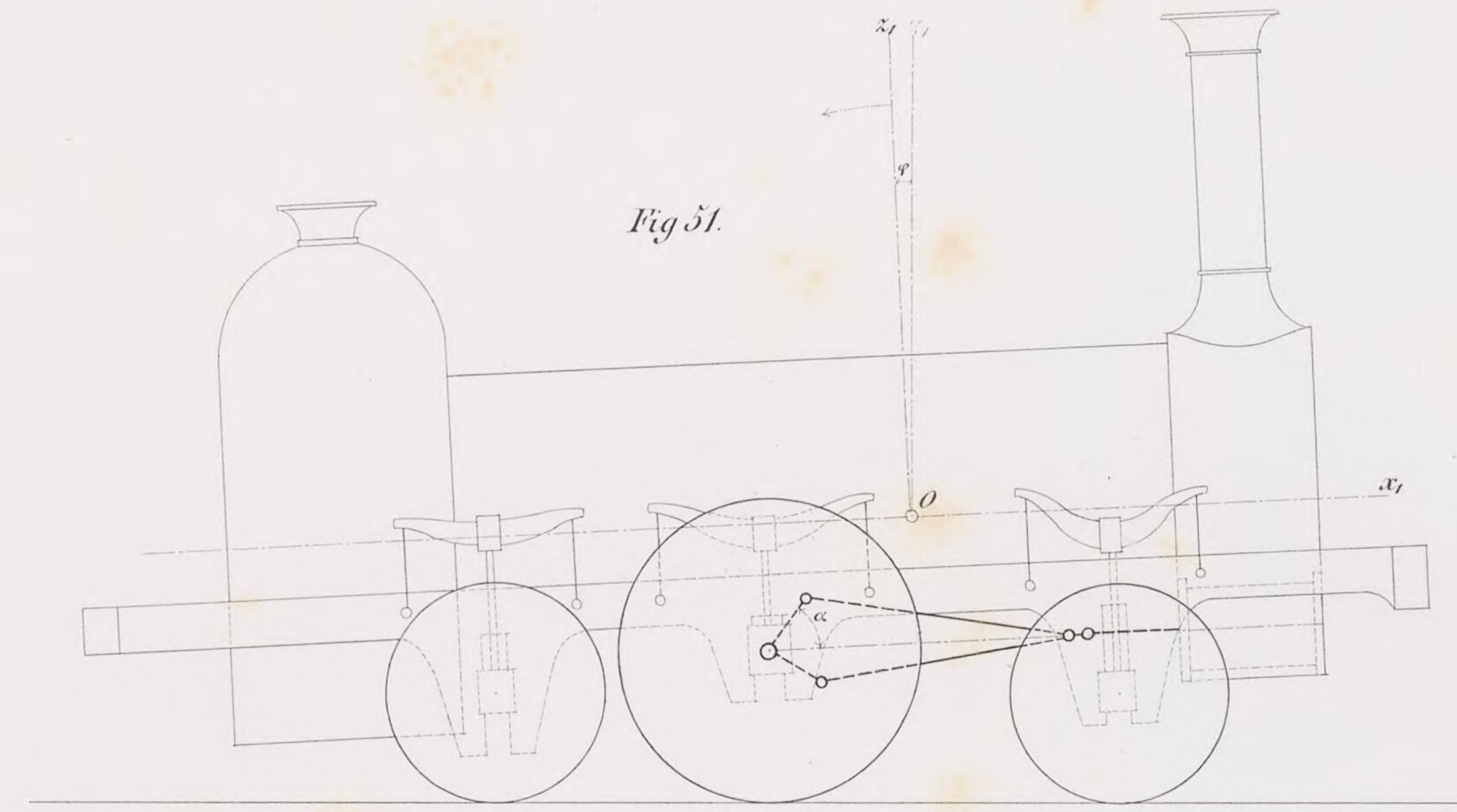
Lith. Anst. v. Creuzbauer in Carlsruhe



Lith. Anst. v. Creuzbauer in Carlsruhe

Tab. XIII.

Fig. 51.



zu Fig. 51.

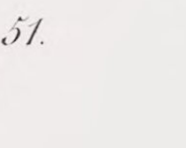


Fig. 52.

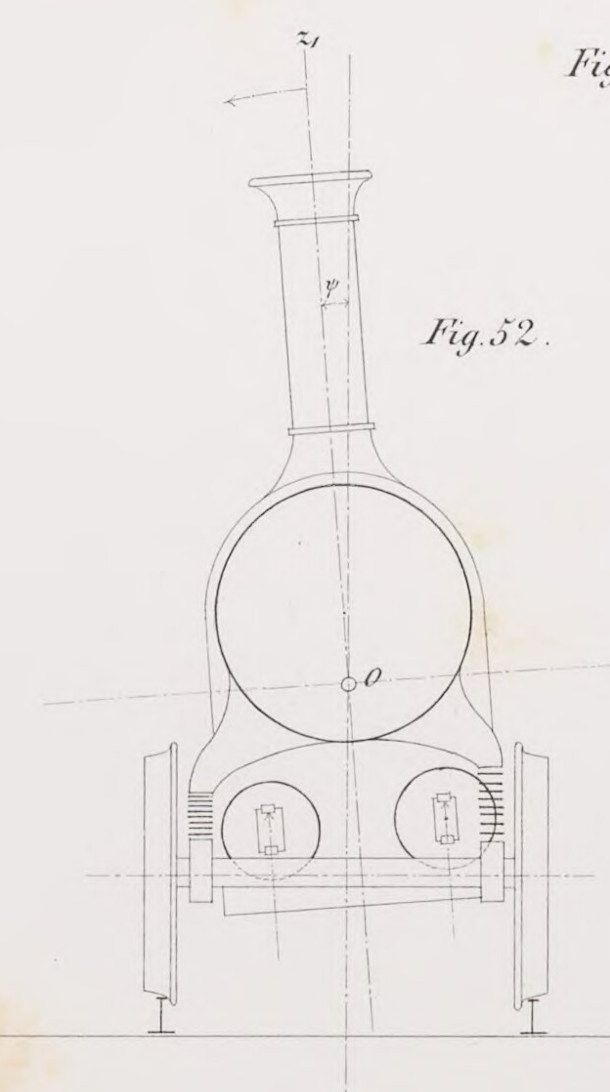


Fig. 53.

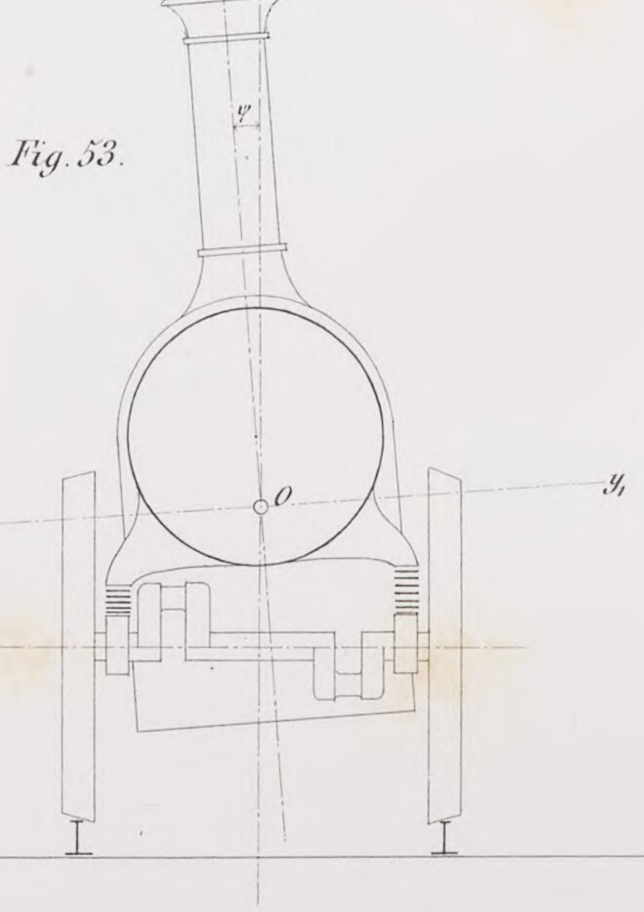
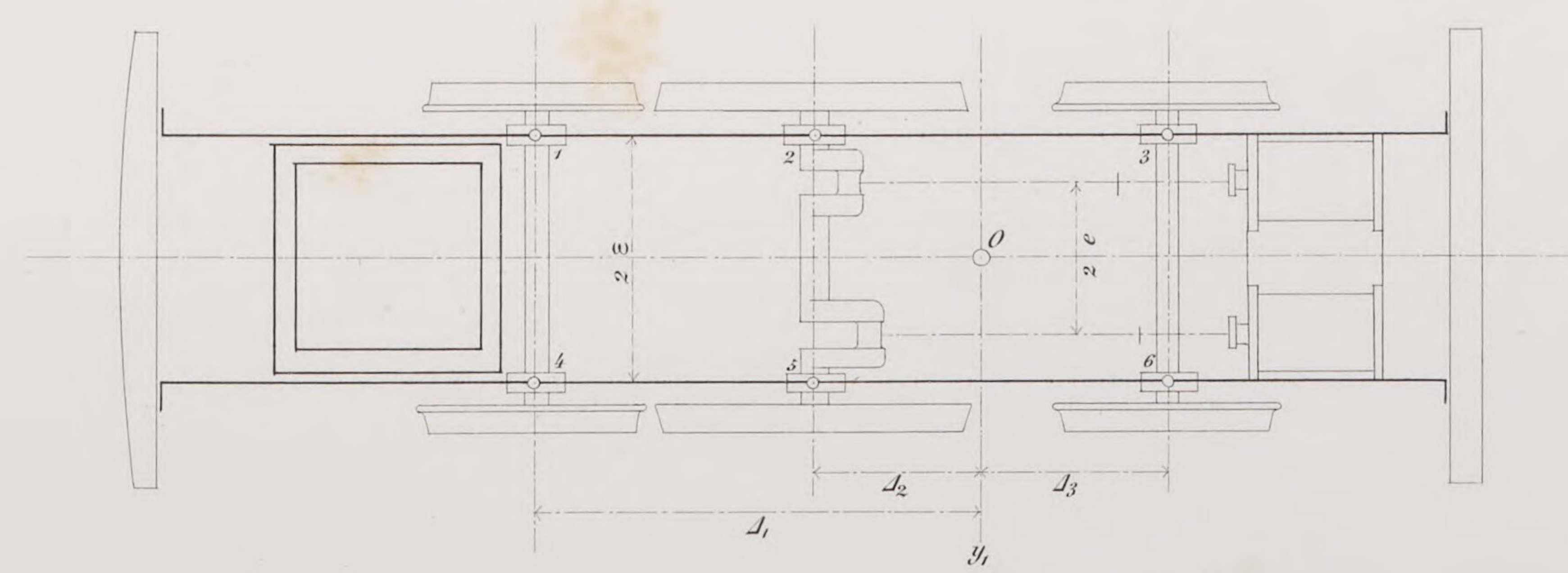
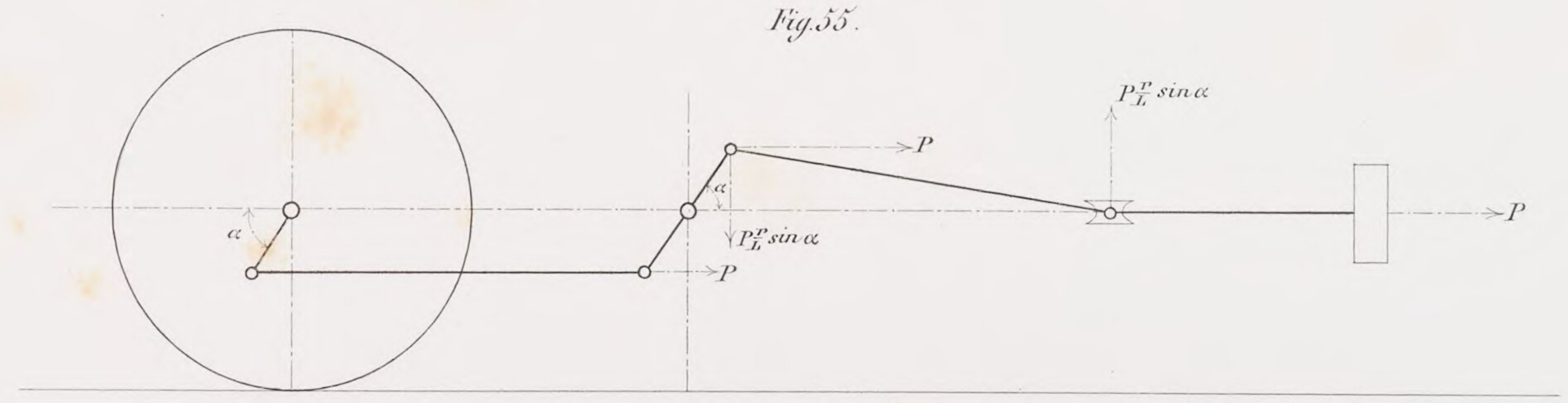


Fig. 54.



Vordere Maschine.

Fig. 55.



Hintere Maschine.

Fig. 56.

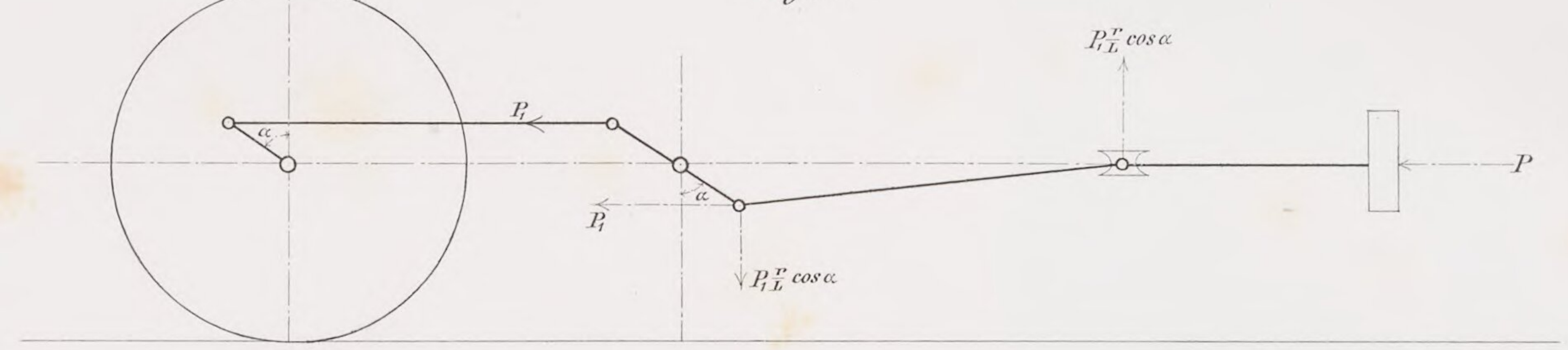
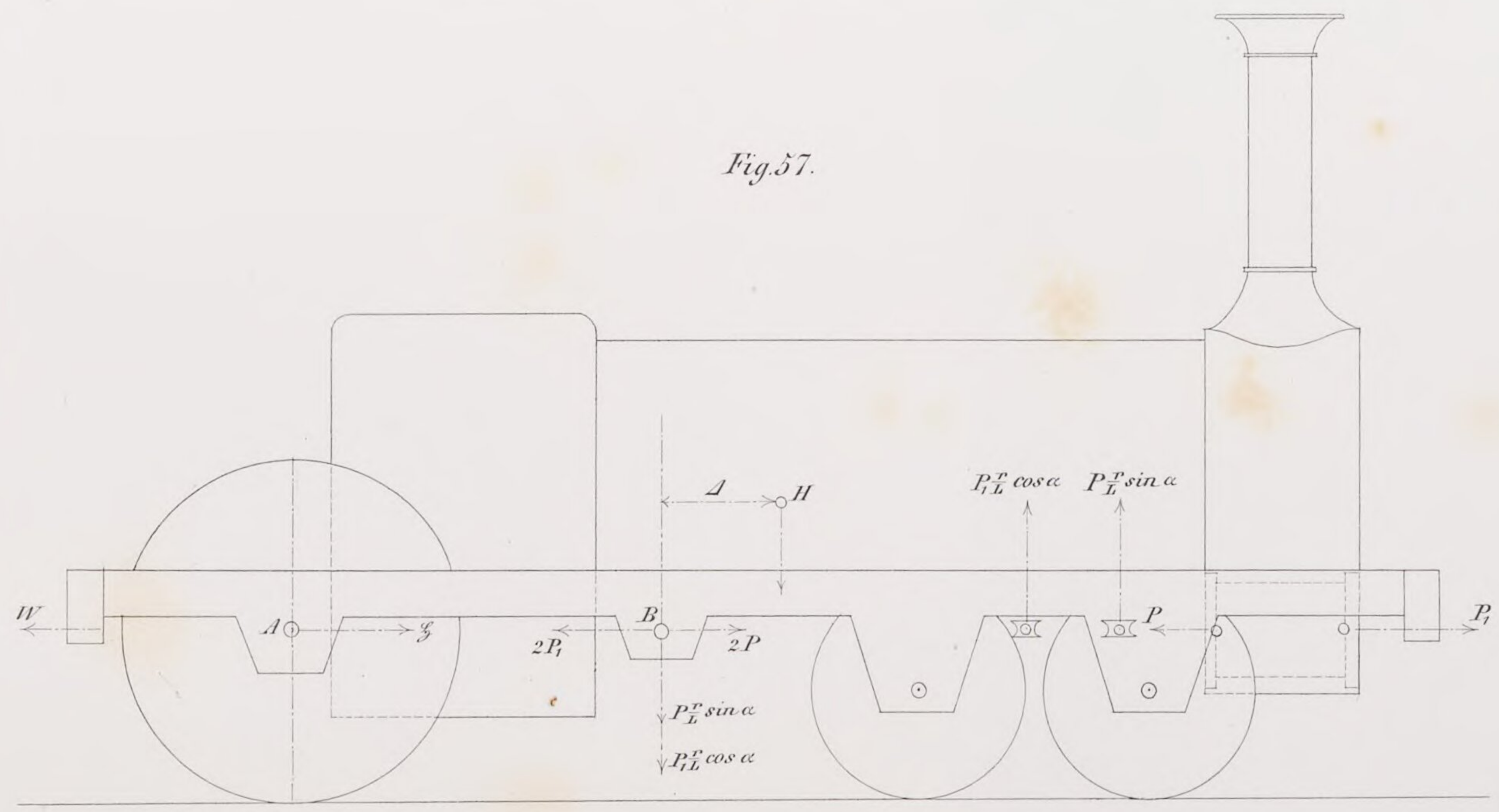
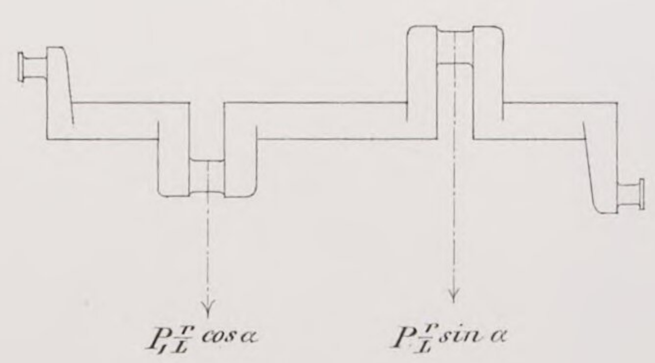


Fig. 57.



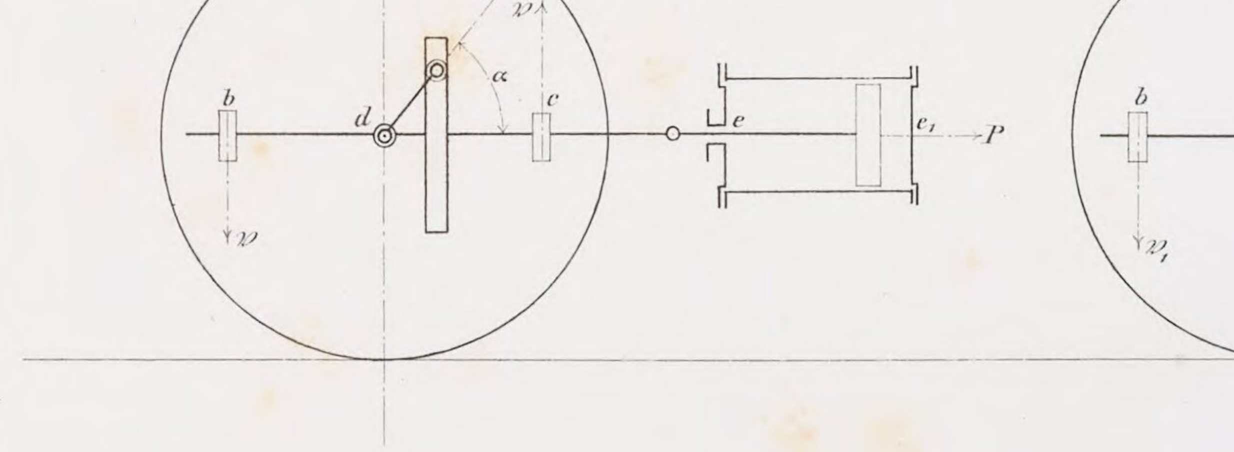
Blindaxe.

Fig. 58.



Vordere Maschine

Fig. 59.



Hintere Maschine.

Fig. 60.

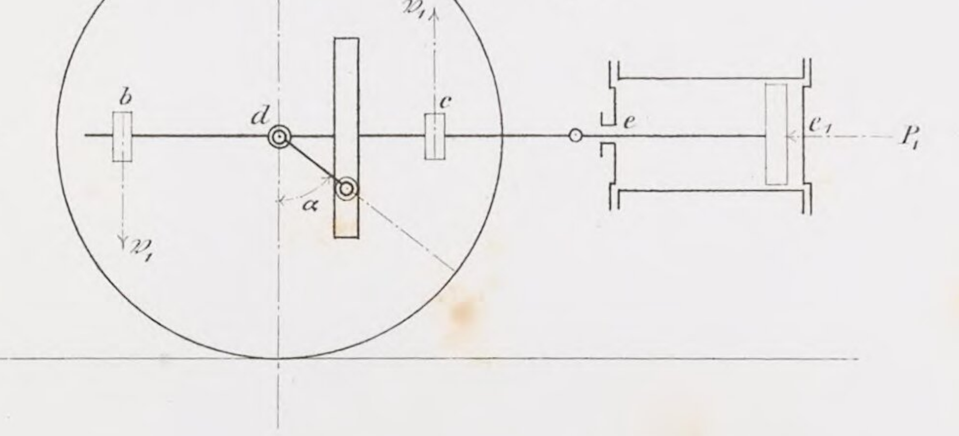


Fig. 61.

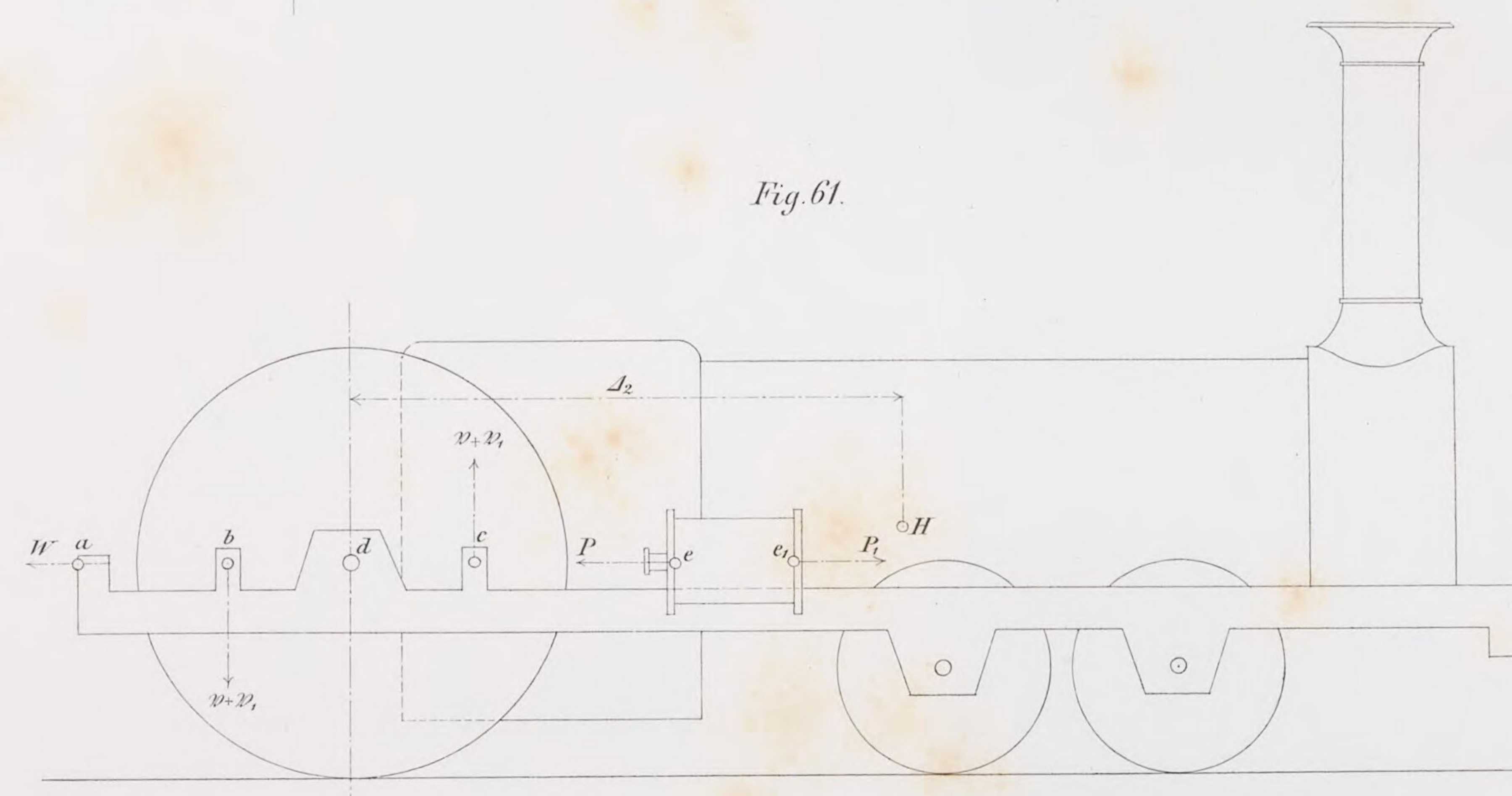


Fig. 62.

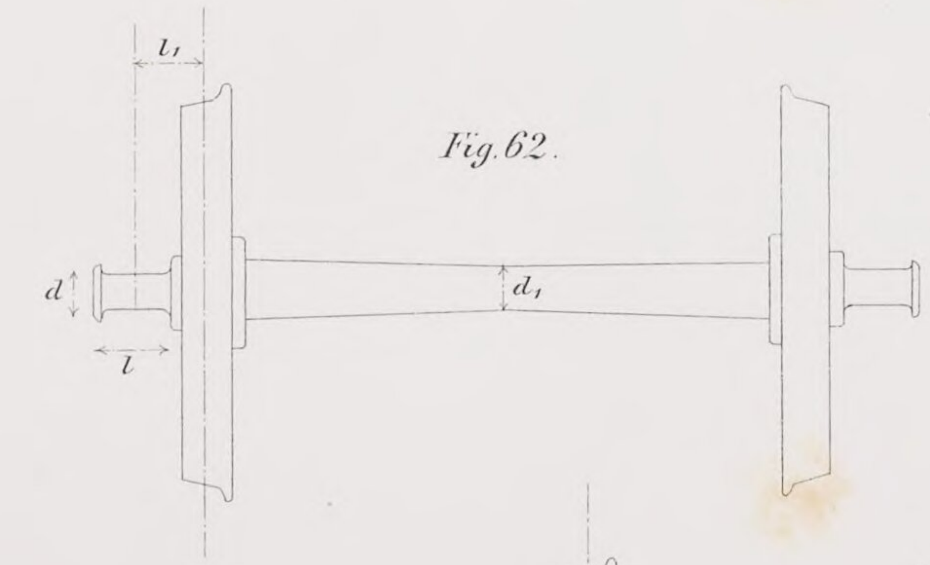


Fig. 63.

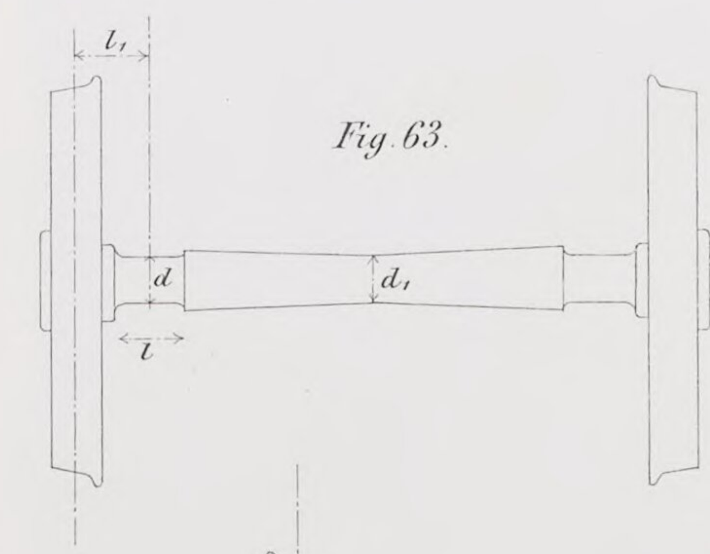
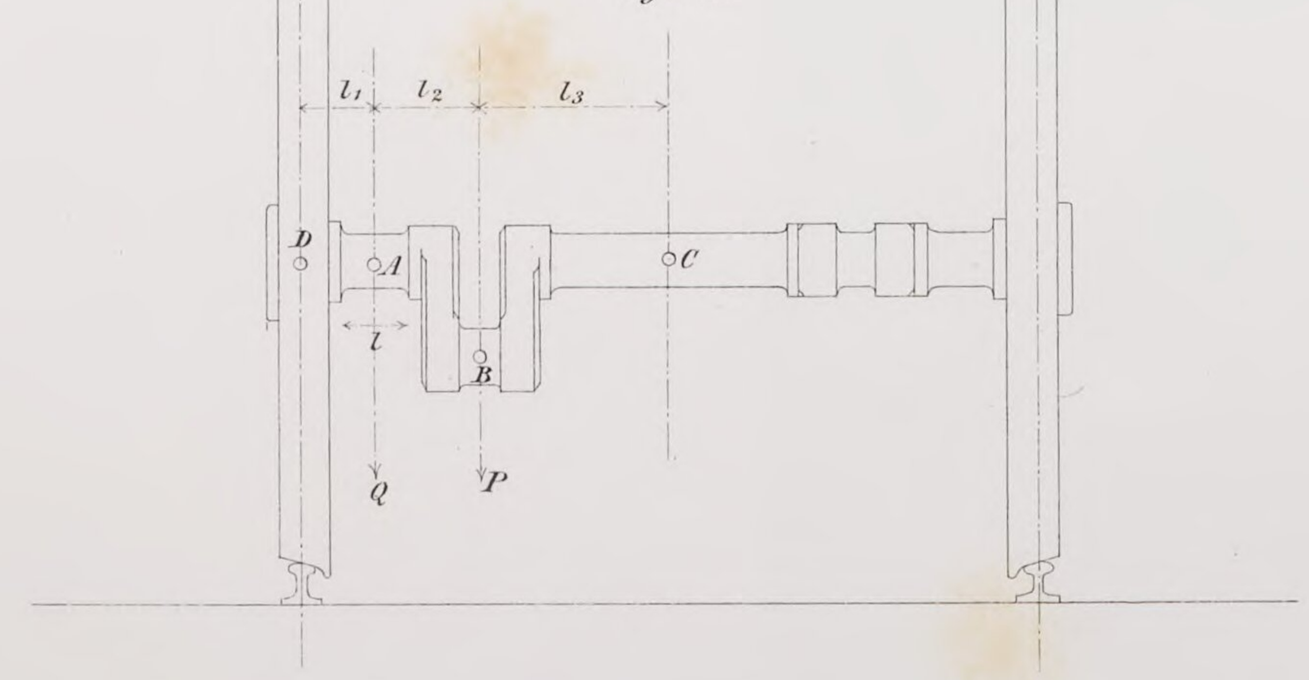


Fig. 64.



Tab. XVI.

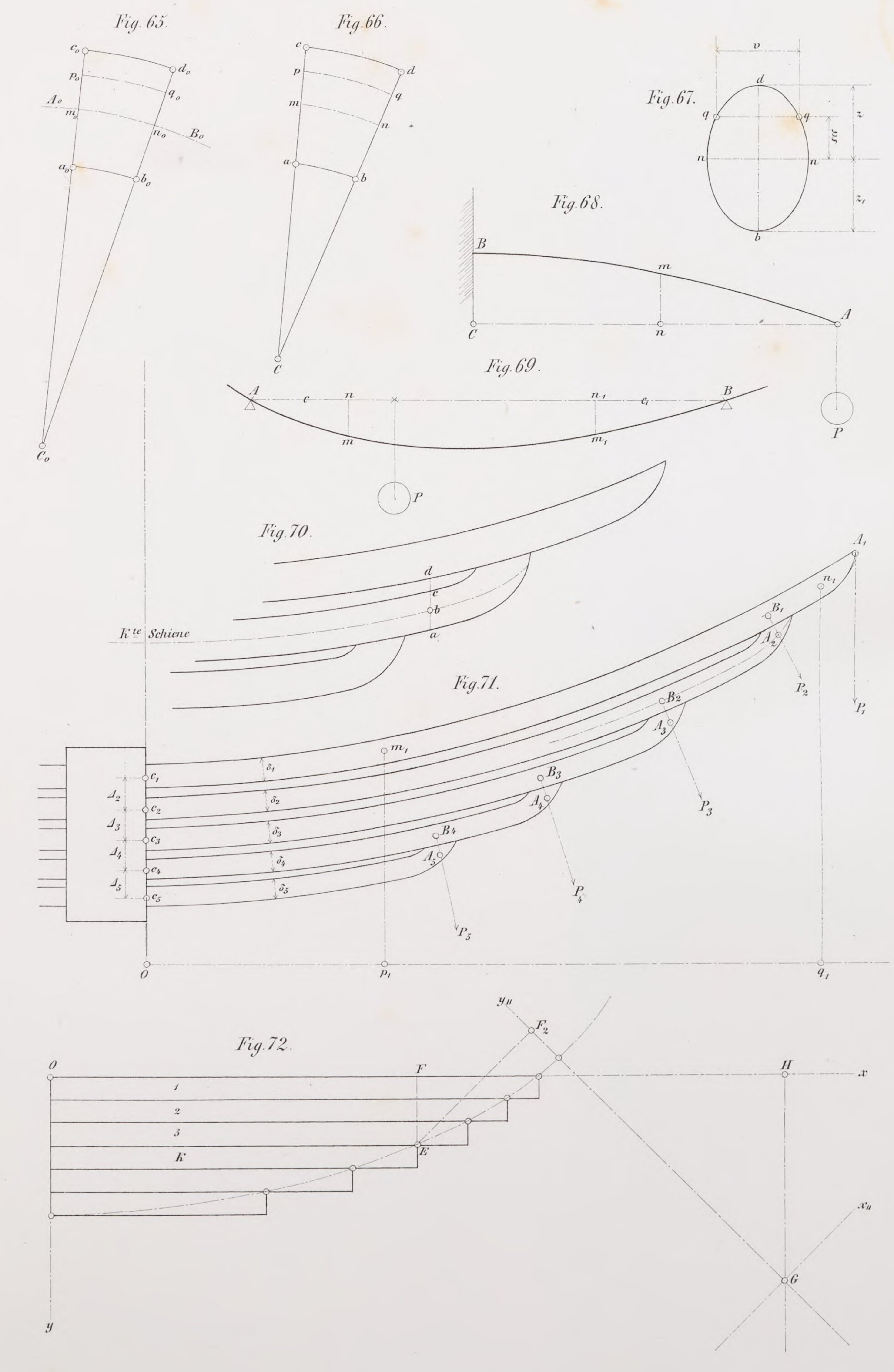
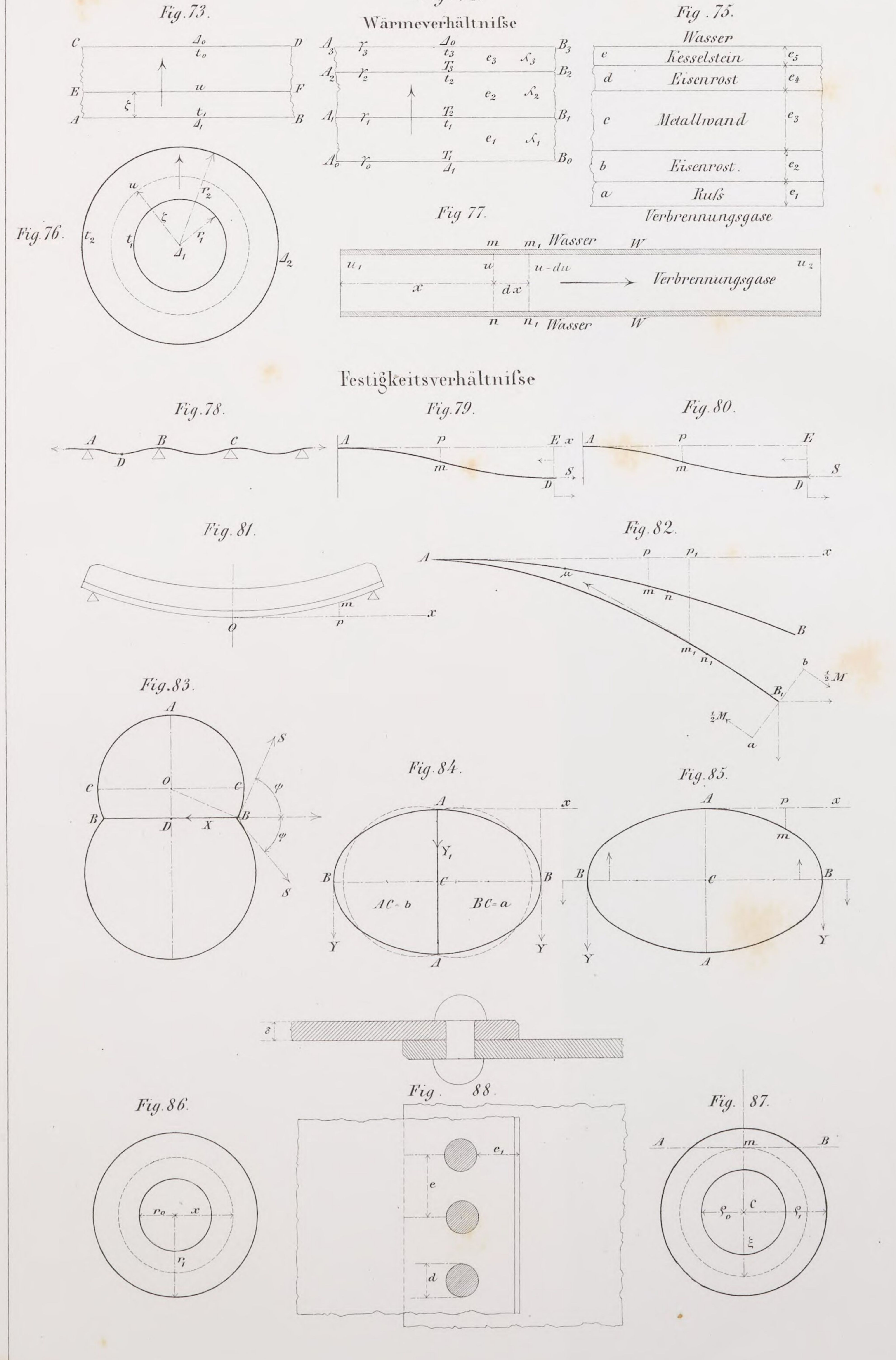


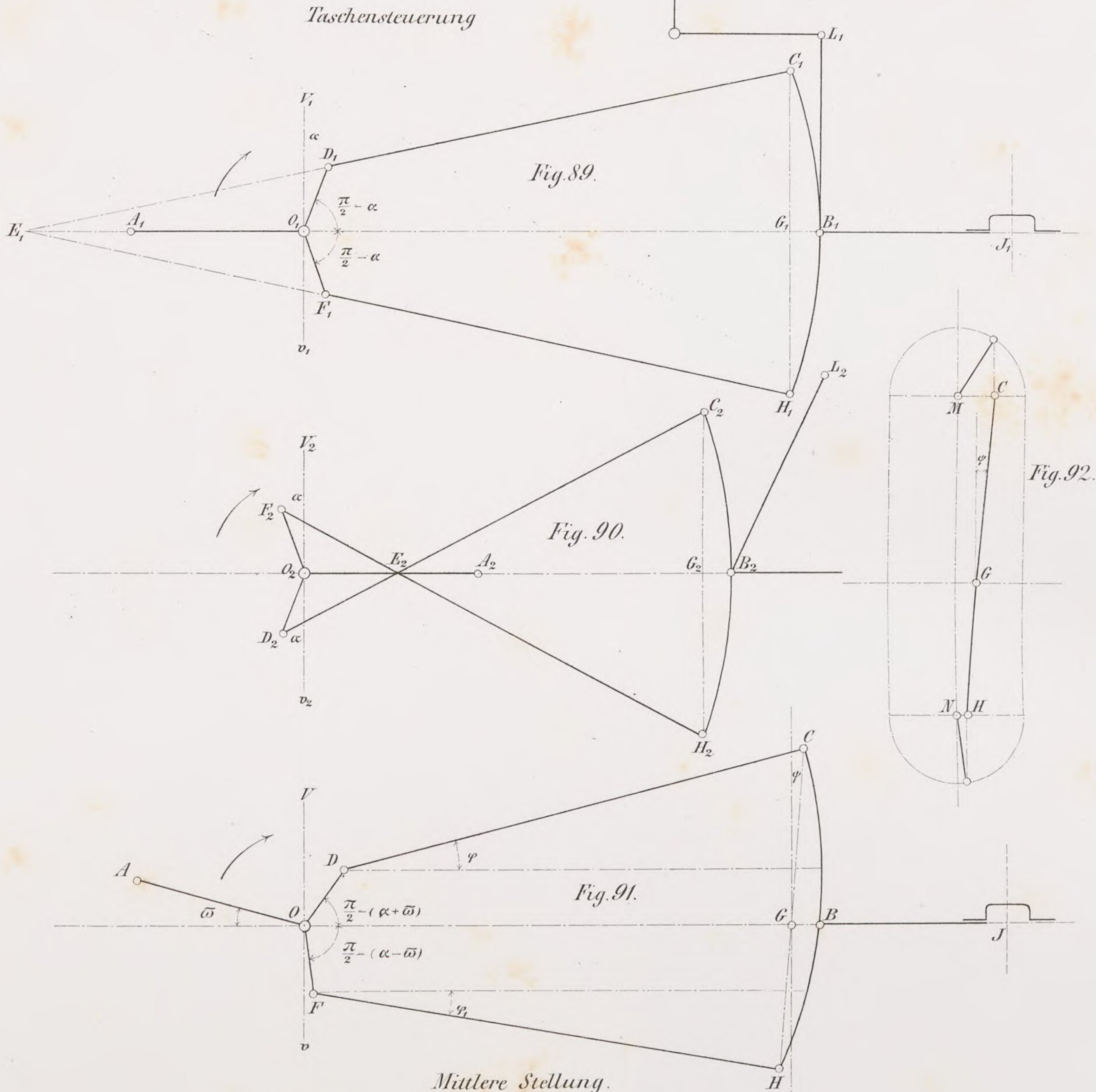
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Kte Schiene
Fig. 71.
Fig. 72.

Tab. XVII.

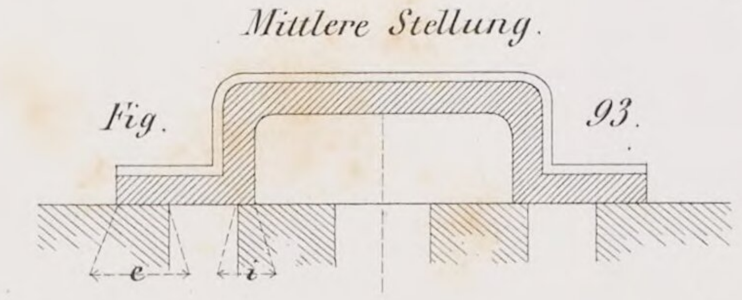


Bayerische
Staatsbibliothek
München

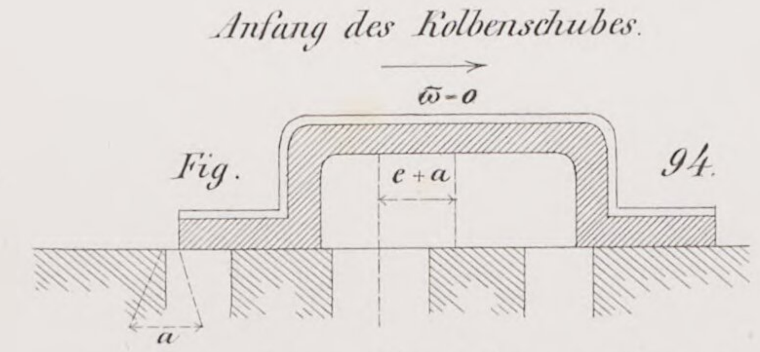
Taschensteuerung



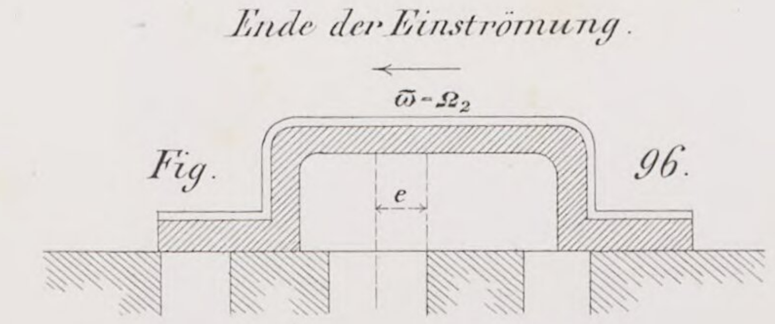
Mittlere Stellung.



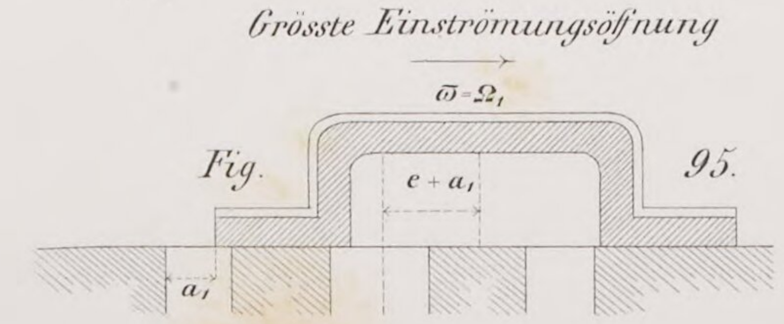
Anfang des Kolbenschubes.



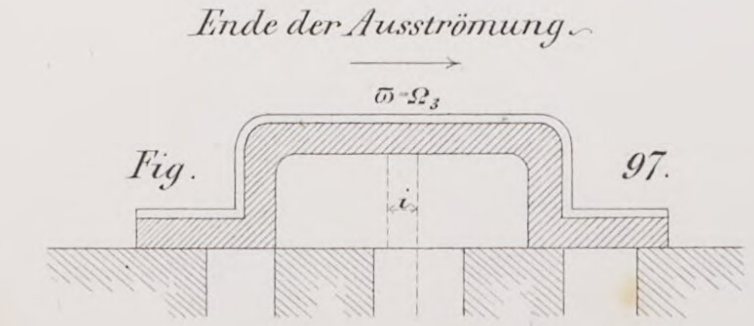
Ende der Einströmung.



Grösste Einströmungsöffnung



Ende der Ausströmung.



F. X. BEER
kgl. Hofbuchbind
MÜNCHEN
Ledererga∫se N
13/III

F. X. BEER
kgl. Hofbuchbinder
in
MÜNCHEN
Lederergafse N° 25.

13
III

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Redtenbacher, Ferdinand,

Die Gesetze des Lokomotiv-Baues

Mannheim 1855

4 Math.a. 240 nb
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053060-0